ANALIZA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR

II

Editura tehnică

Acad. prof. dr. P. S. THEOCARIS, prof. dr. ing. M. BUGA,
dr. ing. C. BURADA, ing. M. BĂLTĂNOIU, dr. ing. I. CONSTANTINESCU,
conf. dr. ing. D. HORBANIUC, dr. ing. N. ILIESCU,
prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU, conf. dr. ing. M. MODIGA,
ing. L. NĂILESCU, dr. ing. I. PASCARIU,
prof. dr. doc. ing. VL. POPOVICI, prof. dr. ing. M. TRIPA

ANALIZA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR

Bazele teoretice ale metodelor tensometrice și indicații practice privind utilizarea acestora

II

Scanned with OKEN Scanner

În lucrare, care apare în două volume, sînt prezentate metodele și tehnicile utilizate pentru analiza experimentală a deformațiilor și tensiunilor.

În primul volum sînt date, la început, noțiunile și relațiile generale folosite la analiza experimentală a deformațiilor și tensiunilor, iar în capitolele următoare sînt prezentate, mai întîi, metodele și tehnicile tensometrice devenite clasice (extensometrele mecano-optice, tensometria electrică, fotoelasticitatea) și apoi metodele interferometrice (moiré și holografia).

Sînt prezentate, în continuare, în volumul doi, metoda causticelor (publicată pentru prima oară sub formă integrată), metoda lacurilor casante, metodele de analiză experimentală utilizate la evaluarea tensiunilor remanente, precum și o serie de aspecte teoretice și practice privind măsurările tensometrice pe modele și indicații privind etalonarea tensometrelor și prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor tensometrice.

Ținînd seama de dezvoltarea, din ultimii ani, a metodei elementelor finite, care completează, în multe cazuri, metodele tensometrice, în ultimul capitol se dau noțiunile de bază privind aplicarea practică a acestei metode.

La sfîrșitul lucrării se prezintă o serie de indicații privind alegerea celor mai adecvate metode și tehnici tensometrice pentru o anumită problemă practică.

Metodele și tehnicile tensometrice prezentate sînt ilustrate de exemple de lucrări practice, în majoritate efectuate de autori.

Colectivul de autori este alcătuit din cadre didactice și cercetători cu experiență, bine cunoscută, în domeniul respectiv. Se remarcă prezența în colectiv a acad. prof. P. S. Theocaris, cercetător cu renume mondial, în domeniul tensometriei.

Lucrarea se adresează inginerilor și cercetătorilor cu preocupări privind analiza experimentală a stării de tensiune și deformație, precum și studenților din institutele de învățămînt tehnic superior.

Datorită aplicațiilor și indicațiilor practice pe care le prezintă, lucrarea este utilă și personalului auxiliar, care concură la pregătirea și efectuarea lucrărilor experimentale.

Prin nivelul științific și caracterul său aplicativ, lucrarea — prima de acest fel, nu numai în țara noastră — constituie un prețios instrument pentru specialiștii preocupați de realizarea unor structuri mai ieftine și, în același timp, mai sigure în exploatare.

Redactor: NATALIA FIUCIUC
Tehnoredactor: ELLY GORUN
Coperta: ELLY GORUN

Bun de tipar: 16.03.1977; Coli de tipar 27; + 1 planșă.
Tiraj: 4100+20+75 exemplare legate. C.Z. 531.781


C. 573. I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu. nr. 23—25
București

CUPRINS

Volumul II

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

6

STUDIUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI SINGULARE CU AJUTORUL CAUSTICELOR

Acad. prof. dr. P.S. THEOCARIS

6.1. INTRODUCERE

Analiza experimentală a stării plane de tensiuni în regiunile foarte deformate, cu o variaţie abruptă a pantei, a constituit întotdeauna o problemă dificilă pentru toate metodele experimentale. Metodele experimentale cunoscute pînă acum dau informaţii insuficiente asupra variaţiei parametrilor care caracterizează starea plană a tensiunilor în regiunile foarte deformate, cum sînt, de exemplu, vecinătatea punctelor de aplicare a forţelor, vecinătatea punctelor unde există o discontinuitate geometrică a materialului sau în sfîrşit unde se află o discontinuitate a proprietăţilor mecanice ale materialului (structuri din materiale cvasiizotrope *). În ultimul caz, al unui material composit constituit dintr-un număr oarecare de sectoare de materiale diferite, punctul comun al vîrfurilor sectoarelor reprezintă un punct singular al cîmpului de tensiuni, caracterizat atît printr-o discontinuitate geometrică cît şi printr-o discontinuitate a materialului. Soluţiile date de teoria liniară a elasticităţii, în acest caz, prezintă o comportare asimptotică a tensiunilor de ordin $O(r^{-\lambda})$ în punctul singular considerat, unde coeficientul λ este, în general, un număr complex, avînd partea reală pozitivă. Determinarea coeficientului λ este problema fundamentală a teoriei elasticităţii pentru punctele singulare.

Singularitatea cîmpului tensiunilor în domeniul elastic poate fi creată în condiţiile următoare :

a) Printr-o discontinuitate geometrică a cîmpului de tensiuni (fisură, crestătură, etc).

b) Prin modul de încărcare (forţe concentrate sau discontinue).

c) Printr-o discontinuitate geometrică a caracteristicilor elasto-mecanice ale materialului.

---

* Este vorba de structuri alcătuite din zone cu proprietăţi elasto-mecanice diferite, numite de autor materiale composite.

Scanned with OKEN Scanner

6.1.1. SINGULARITĂŢI DATORITE FORMEI GEOMETRICE A CÎMPULUI DE TENSIUNI

Variaţia asimptotică a tensiunilor în punctul singular care este creat în vîrful comun al sectoarelor într-un material composit este datorată discontinuităţii geometrice a constantelor elastice ale materialului care are loc la frontiera comună a celor două sectoare în contact. Ordinul de singularitate al cîmpului tensiunilor în punctul singular depinde de constantele elastice ale materialelor constituente şi de forma geometrică a sectoarelor.

Valoarea ordinului de singularitate $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ este determinată de rădăcinile λ_1 şi λ_2 ale ecuaţiei caracteristice. În raport cu valorile rădăcinilor λ_1 şi λ_2 se pot deosebi următoarele cazuri :

a) Singularitatea de ordinul $O(r^{-1+\lambda_1})$ cînd rădăcina λ_1 a ecuaţiei caracteristice este reală.

b) Singularitate de ordinul $O[r^{-1+\lambda_1} \cos (\lambda_2 \log r)]$ sau $O[r^{-1+\lambda_1} \sin (\lambda_2 \log r)]$, cînd λ este un număr complex.

c) Singularitate de ordinul $O(\log r)$, dacă ecuaţia caracteristică nu are rădăcini în intervalul $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1$ şi, în plus, $\mathrm{d}D/\mathrm{d}\lambda = 0$ în punctul $\lambda = 1$.

Acestei categorii îi aparţine cazul materialului composit conţinînd un sector de unghi α la vîrf. Pentru un unghi $\alpha = \pi$ valoarea rădăcinii λ este egală cu 1 şi nu există singularitate deoarece singularitatea a fost definită ca $r^{(-1+\lambda)} = r^0 = 1$. Dacă unghiul $\alpha > \pi$, λ variază între valorile 1 şi 0,5. Această ultimă valoare este atinsă în cazul în care $\alpha = \pi$. Acesta este cazul unei fisuri într-o placă izotropă şi elastică unde singularitatea este de ordinul $r^{(-1+\lambda)} = r^{-0,5}$ cînd $r \to 0$.

6.1.2. SINGULARITĂŢI CREATE DE FORŢE EXTERIOARE APLICATE CÎMPULUI DE TENSIUNI

Este bine ştiut că o forţă concentrată, aplicată unui punct al frontierei corpului elastic, creează o singularitate de ordinul r^{-1}. În acelaşi fel, o forţă repartizată pe frontiera unui corp elastic după o lege oarecare, creează o singularitate de ordinul r^{-1}, care este datorată fie discontinuităţii coordonatei forţei, fie numai discontinuităţii pantei forţei într-un punct de pe frontiera corpului elastic încărcat.

6.1.3. SINGULARITĂŢI CREATE ÎN MATERIALELE COMPOSITE

În cazul general al unui composit constituit din mai multe sectoare, singularitatea creată în vîrful comun al muchiilor depinde de unghiul muchiilor şi de proprietăţile mecanice ale sectoarelor. Astfel, în cazul simplu a două sectoare sudate între ele, este bine cunoscut [31], [36], [37], [38], că valoarea coeficientului λ este cuprinsă între 1 (pentru care nu există singularitate) şi 0,5 ($r^{-0,5+1} = r^{-0,5}$). Valoarea $\lambda = 0,5$ corespunde cazului unei fisuri într-o placă omogenă şi izotropă, ca şi cazului unui bisector în care cele două materiale sînt sudate între ele. Din contră,

Scanned with OKEN Scanner

în cazul în care contactul dintre cele două materiale este de natură coulombiană (frecare), ordinul de singularitate poate fi mai mic decît 0,5, în funcție de valoarea coeficientului de frecare [33], [34], [35]. Singularitatea, în acest caz, este mai accentuată cînd coeficientul de frecare crește. În cazurile precedente, pentru o formă geometrică dată a bi-sectorului, singularitatea crește (λ scade) în același timp cu diferența dintre caracteristicile elasto-mecanice ale celor două materiale. În cazul unei fisuri într-un bi-sector, fisura fiind cuprinsă într-un singur material și extremitatea sa atingînd suprafața de separare a celor două materiale, ordinul de singularitate este mai mic de 0,5.

După cum se știe, metoda fotoelasticității, ca și metodele optice asemănătoare ce utilizează lumină polarizată, prezintă în regiunea puternic deformată a singularității cîmpului tensiunilor o mare concentrare a franjelor izocrome, care împiedică o evaluare precisă a tensiunilor. De asemenea, nu se cunoaște, pînă acum, dacă, în regiunea foarte deformată a singularității caracterizată printr-o variație bruscă a tensiunilor, indicele de refracție al materialului are o variație importantă, sau dacă el rămîne în această regiune, de asemenea, o funcție liniară de valorile tensiunilor principale. Este bine știut că analiza distribuției tensiunilor în regiunea restrînsă din vecinătatea punctului singular este foarte grea și complicată și că metoda de extrapolare a franjelor izocromatice în vecinătatea acestei regiuni în jurul singularității scade exactitatea evaluării tensiunilor. Observații asemănătoare rămîn valabile pentru metoda holografiei interferometrice (vezi § 5.3), care dă un număr mai mare de franje în jurul punctului singular. În orice caz, această metodă dă și o precizie insuficientă pentru evaluarea coeficientului de concentrare a tensiunilor k în punctele singulare. Asupra metodei celei mai convenabile pentru evaluarea lui K există discuții în lucrările [41] și [42]. În ceea ce privește analiza tensiunilor în jurul punctelor singulare cu ajutorul franjelor moiré (vezi cap. 5), observațiile precedente rămîn valabile. Într-adevăr, ele sînt bine cunoscute datorită cercetărilor făcute în S.U.A., unde s-au folosit franjele moiré pentru determinarea coeficientului K și care au obținut rezultate valabile numai în cazurile cînd este cunoscut dinainte ordinul de singularitate [43].

În sfîrșit, tensometria electrică (vezi cap. 3) și extensometrele mecano-optice (vezi cap. 2) pot fi folosite la determinarea tensiunilor, departe de regiunea punctului singular, iar apoi, rezultatele obținute pot fi extrapolate printr-o metodă convenabilă de extrapolare în regiunea singularității. Smith și colaboratorii săi [39], [40] au aplicat metoda fotoelasticității pentru determinarea coeficientului K, dar nici rezultatele lor nu sînt satisfăcătoare.

Pentru determinarea exactă a parametrilor cîmpului de tensiuni în regiunea singularității, s-a dezvoltat o nouă metodă, numită *metoda causticelor*. După această metodă, regiunea vecină cu singularitatea dintr-o epruvetă transparentă sau opacă este luminată de către un fascicul de raze monocromatice, paralele, convergente sau divergente. Razele care sînt reflectate de suprafețele din față sau din spate ale epruvetei se împrăștie și formează, atunci cînd sînt proiectate pe un ecran paralel cu epruveta,

Scanned with OKEN Scanner

o curbă foarte luminoasă care se numeşte *caustică* şi care reprezintă *înfăşurătoarea urmelor acestor raze pe ecran.*

Reflexia razelor este supusă legilor opticii geometrice şi, prin urmare, elementele geometrice ale curbei causticei sînt determinate de caracteristicile regiunii puternic deformate, adică de ordinul de singularitate a cîmpului tensiunilor şi de coeficientul de concentrare a eforturilor K. Aceşti doi parametri caracteristici ai cîmpului de tensiuni pot fi determinaţi măsurînd elementele geometrice ale causticei (diametru, unghi, rază). Curba causticei care se formează pe ecran reprezintă o imagine exactă a regiunii puternic deformate a cîmpului tensiunilor şi, în consecinţă, determinarea parametrilor caracteristici ai cîmpului tensiunilor cu singularitate, se face cu o mare precizie. Metoda causticelor este caracterizată, printre altele, printr-o mare simplitate care rezultă din principiul însuşi al metodei. În afară de studiul punctelor singulare, această metodă este indicată pentru studiul distribuţiei tensiunilor în toate problemele cîmpurilor elastice de stare plană de solicitare.

În cele ce urmează vor fi înfăţişate principiul şi relaţiile fundamentale ale metodei causticelor ca şi o serie de aplicaţii practice ale acestei metode care vor sublinia superioritatea sa faţă de celelalte metode tensometrice în studiul punctelor singulare. Experienţele care vor fi prezentate în acest capitol au fost realizate în Laboratorul de rezistenţa materialelor de la Universitatea tehnică naţională din Atena.

6.2. PRINCIPIUL METODEI

Se consideră o placă transparentă dintr-un material birefringent şi o rază de lumină monocromatică şi coerentă care întîlneşte placa într-un punct oarecare M, sub un unghi de incidenţă nul. Figura 6.1 reprezintă reflexiile şi refracţiile succesive ale unei raze de lumină i într-o placă transparentă.

Raza de lumină va fi reflectată în mod consecutiv pe cele două feţe ale plăcii şi, în acelaşi timp, ea traversează placa. Se notează cu k numărul de reflexii consecutive şi cu l numărul de refracţii consecutive ale aceleiaşi raze. În cazul razelor reflectate, acestea vor fi notate cu r_{1+0}; $r_{(1+2)}$; $r_{(3+2)}$; $r_{(5+2)}$, ... etc., iar razele care traversează placa cu $t_{(0+2)}$; $t_{(2+2)}$; $t_{(4+2)}$; etc.

Intensitatea razelor de ordin $(k+1)$ notată cu $I^r_{(k+1)}$, se exprimă prin [2]

$$I^r_{(k+1)} = R^k\,(1 - R)^l I_i \tag{6.1}$$

unde R reprezintă coeficientul de reflexie [2] care este exprimat prin

$$R = \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}^2 \tag{6.2}$$

unde n este indicele de refracţie al materialului neîncărcat şi I_i intensitatea luminii incidente. Este uşor de constatat că pentru plexiglas, de exemplu, care are un indice de refracţie $n = 1{,}5$, $R = 0{,}04$. Pentru această valoare a lui R intensitatea razei $r_{(1+0)}$ reflectată pe suprafaţa

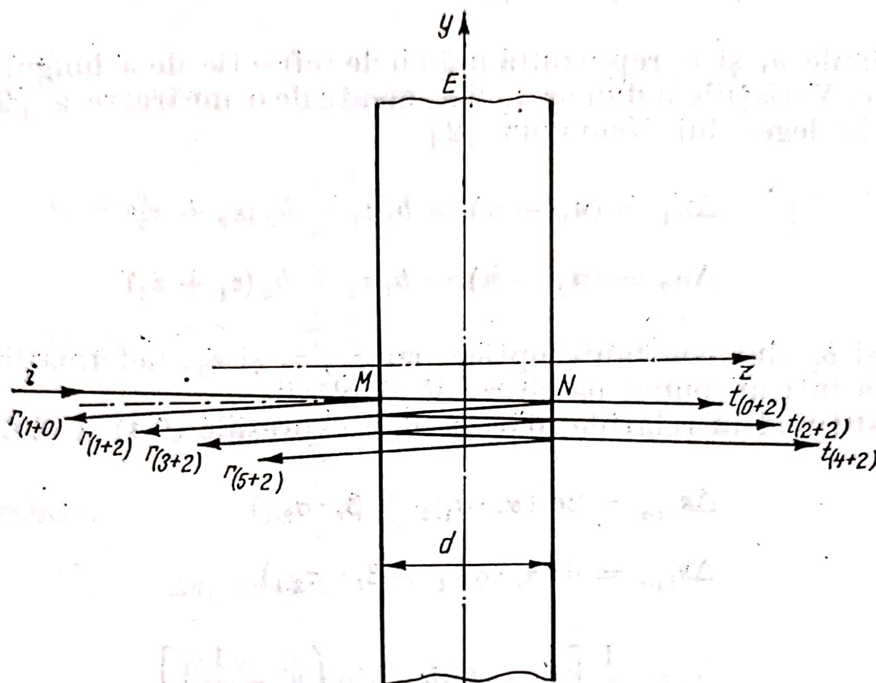


Fig. 6.1.

anterioară a plăcii ia valoarea $I_{r(1+0)} = 0{,}04\, I_i$ şi intensitatea razei $r_{(1+2}$ reflectată pe faţa posterioară a plăcii ia valoarea $I_{r(1+2)} = 0{,}03686\, I_i$.) Pentru raza de ordin $r_{(3+2)}$ rezultă că $I_{r(3+2)} = 0{,}00006\, I_i$.

Ţinînd seama de acestă constatare, vor fi considerate numai razele $r_{(1+0)}$ şi $r_{(1+2)}$, iar razele de ordin superior vor fi neglijate fiind nesemnificative.

Variaţia absolută a drumului optic pentru raza r_{1+2} în direcţiile tensiunilor principale, notate cu indicii 1 şi 2 se exprimă prin

$$\Delta s_{r(1,2)} = 2\left[(n_{1,2} - n)\,d + \left(n_{1,2} - \frac{1}{2}\right)\Delta d\right]. \tag{6.3}$$

În expresia (6.3) primul termen reprezintă dublul variaţiei absolute a drumului optic pentru raza care traversează placa şi al doilea termen reprezintă variaţia drumului optic datorat variaţiei grosimii plăcii Δd.

Variaţia grosimii plăcii este dată de

$$\Delta d = -\frac{\mu d}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6.4}$$

în care μ exprimă coeficientul lui Poisson şi E este modulul lui Young.

În mod analog, variaţia drumului optic pentru razele care traversează placa se exprimă după cum urmează

$$\Delta s_{t(1,2)} = (n_{1,2} - n)\, d + (n - 1)\, \Delta d. \qquad (6.5)$$

Mărimile n_1 şi n_2 reprezintă indicii de refracţie de-a lungul direcţiilor principale. Variaţiile indicilor n_1 şi n_2 create de o încărcare a plăcii se exprimă prin legea lui Neumann [2]

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= (n_1 - n) = b_1 \varepsilon_1 + b_2 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \Delta n_2 &= (n_2 - n) = b_1 \varepsilon_2 + b_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \end{aligned} \qquad (6.6)$$

unde b_1 şi b_2 sînt constante optice, iar ε_1, ε_2 şi ε_3, deformaţiile specifice principale într-un punct oarecare M al plăcii.

Substituind în relaţiile (6.3) şi (6.5) expresiile (6.4) şi (6.6) se obţine

$$\begin{aligned} \Delta s_{r\,1,2} &= 2d\,(\alpha_r \cdot \sigma_{1,2} + \beta_r \cdot \sigma_{2,1}) \\ \Delta s_{t\,1,2} &= d\,(\alpha_t \cdot \sigma_{1,2} + \beta_t \cdot \sigma_{2,1}) \end{aligned} \qquad (6.7)$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{E}\left[b_1 - 2\mu b_2 - \mu\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \\ \beta_r &= \frac{1}{E}\left[b_2 - \mu(b_1 + b_2) - \mu\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \\ \alpha_t &= \frac{1}{E}[(b_1 - 2\mu b_2 - \mu(n - 1)] \\ \beta_t &= \frac{1}{E}[b_2 - \mu(b_1 + b_2) - \mu(n - 1)]. \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Notînd cu ξ coeficientul de anizotropie optică, aceste ultime relaţii iau forma

$$\begin{aligned} \Delta s_{r\,1,2} &= 2dc_r\,[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r(\sigma_1 - \sigma_2)] \\ \Delta s_{t\,1,2} &= dc_t\,[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t(\sigma_1 - \sigma_2)] \end{aligned} \qquad (6.9)$$

unde

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{\alpha_r + \beta_r}{2}; \quad \xi_r = \frac{\alpha_r - \beta_r}{\alpha_r + \beta_r} \\ c_t &= \frac{\alpha_t + \beta_t}{2}; \quad \xi_t = \frac{\alpha_t - \beta_t}{\alpha_t + \beta_t}. \end{aligned} \qquad (6.10)$$

Scanned with OKEN Scanner


Se observă că variaţia drumului optic (relaţiile (6.9)) este o funcţie de suma şi diferenţa tensiunilor principale şi de constantele optice c_r şi ξ_r (sau c_t şi ξ_t).

Un material transparent şi izotrop din punct de vedere optic este caracterizat prin următoarele condiţii

$$b_1 = b_2 = b$$

$$\alpha_r = \beta_r = c_r = \frac{1}{E}\left[b(1-2\mu) - \mu\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\alpha_t = \beta_t = c_t = \frac{1}{E}[b(1-2\mu) - \mu(n-1)] \tag{6.11}$$

$$\xi_t = \xi_r = 0$$

şi, prin urmare,

$$\Delta s_{r_1} = \Delta s_{r_2} = 2\, dc_r(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\Delta s_{t_1} = \Delta s_{t_2} = dc_t(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{6.12}$$

Razele de lumină, reflectate de către cele două feţe ale plăcii, care traversează placa, formează frontul de undă

$$S(x,\ y,\ z) = \text{const.} \tag{6.13}$$

Dacă se notează cu $s(x, y)$ drumul optic al razei cuprinse între cele două feţe ale plăcii, este valabilă relaţia

$$S(x,\ y,\ z) = z - s(x,\ y) = \text{const.} \tag{6.14}$$

Deviaţia razei, care este produsă prin încărcarea plăcii, este materializată pe un ecran paralel cu placa situată la o distanţă z_0 faţă de placă. Vectorul $\overline{w}$ care exprimă această deviaţie este dat de teoria eiconalului după cum urmează [2]

$$\overline{w} = -z_0 \operatorname{grad} s(x, y). \tag{6.15}$$

Deoarece frontul de undă al razelor incidente pe planul median al plăcii este paralel cu acest plan se poate scrie că

$$s(x,y) = s_0 + \Delta s(x,y) \tag{6.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s_0 este o constantă şi, prin urmare, grad $s_0 = 0$. Rezultă

$$\bar{w} = -z_0 \text{ grad } \Delta s(x,y). \tag{6.17}$$

În relaţia (6.17) trebuie să considerăm pentru variaţia $\Delta s(x,y)$ a drumului optic, expresia (6.9), pentru un material optic anizotrop şi expresia (6.12) pentru un material optic izotrop.

În forma generală, deviaţia $\bar{w}$ poate fi scrisă

$$\bar{w} = C \text{ grad}\{(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)\}. \tag{6.18}$$

Se subliniază că constantele C şi ξ iau următoarele valori:
$C = -2z_0 \, \mathrm{d}c_r$; $\xi = \pm \xi_r$ pentru razele care sînt reflectate pe suprafaţa posterioară a plăcii (deviaţia notată cu $\bar{w}_r$).
$C = -z_0 \, \mathrm{d}C_t$; $\xi = \pm \xi_t$ pentru razele care traversează placa (deviaţia $\bar{w}_t$).

Deviaţia razei de lumină reflectată de suprafaţa anterioară a plăcii şi notată cu $\bar{w}_f$, poate fi determinată plecîndu-se de la unghiul φ, dat de legea lui Snell

$$\varphi = 2\alpha = 2 \text{ grad} \frac{\Delta d}{2} = -\frac{\mu d}{E} \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2). \tag{6.19}$$

La o distanţă z_0 deviaţia $\bar{w}_f$ ia valoarea

$$\bar{w}_f = -z_0 \frac{\mu d}{E} \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6.20}$$

care rămîne aceeaşi atît pentru un material izotrop cît şi pentru un material anizotrop.

În cazul unui material izotrop, $\xi = 0$, cele trei deviaţii $\bar{w}_r$, $\bar{w}_t$, $\bar{w}_f$ iau forma generală

$$\bar{w} = C \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6.21}$$

unde mărimea C trebuie să fie înlocuită printr-una din valorile următoare

$$C = -2\, z_0\, dc_r, \qquad C = -z_0 dc_t$$

$$C = -z_0\, dc_f, \quad \text{unde } c_f = \frac{\mu d}{E}. \tag{6.22}$$

Mărimea vectorială $\bar{w}(\bar{w}_r, \bar{w}_t, \bar{w}_f)$ este reprezentată pe ecran prin deviaţia $P'Q'$ (fig. 6.2) între imaginea P' a punctului P al plăcii înainte de a fi încărcată şi poziţia sa finală Q'.

Scanned with OKEN Scanner

Alegînd un sistem de coordonate ortogonale avînd ca origine punctul O_1 (fig. 6.2) și axele O_1x_1 și O_1y_1 situate pe planul ecranului și paralele cu direcțiile axelor principale Ox și Oy ale fisurii, deplasarea totală $\overline{W}(x, y)$ a razei reflectate sau traversînd placa, poate fi scrisă ca

$$\overline{W}(x, y) = x\bar{i}_1 + y\bar{j}_1 + \overline{w}(x, y).$$

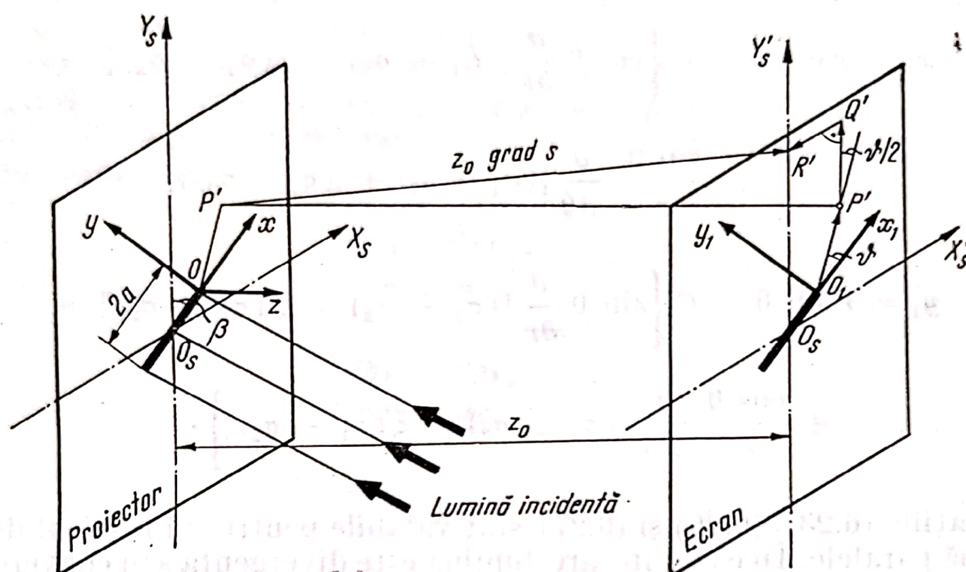


Fig. 6.2

Folosind variabila complexă $z = x + iy$ unde $i = \sqrt{-1}$, expresia precedentă devine

$$W(z) = z + w(z) \tag{6.23}$$

unde

$$w(z) = C \operatorname{grad} \{(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 + \sigma_2)\} \tag{6.24}$$

$$w(z) = C\left\{\frac{\partial}{\partial x}[(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] + i\frac{\partial}{\partial y}[(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)]\right\}. \tag{6.25}$$

Notînd cu x_1 și y_1 proiecțiile lui $W(z)$ pe axele O_1x_1 și respectiv O_1y_1, cu relația (6.25) se obține

$$\begin{aligned} x_1 &= x + C\left\{\frac{\partial}{\partial x}\,[(\sigma_1 - \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)]\right\} \\ y_1 &= y + C\left\{\frac{\partial}{\partial y}\,[(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi\,(\sigma_1 - \sigma_2)]\right\} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Dacă se consideră că $W(z)$ este raportat la un sistem de coordonate polare, definit prin relațiile

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ţinînd seama de următoarele formule de derivare

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta};\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

expresiile (6.26) devin

$$x_1=r\cos\theta+C\left\{\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}[(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(\sigma_1-\sigma_2)]-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}[(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(\sigma_1-\sigma_2)]\right\}$$

$$y_1=r\sin\theta+C\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}[(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(\sigma_1-\sigma_2)]+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}[(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(\sigma_1-\sigma_2)]\right\}. \qquad (6.27)$$

Relaţiile (6.23), (6.26) şi (6.27) sînt valabile pentru un fascicul de raze de lumină paralele. În cazul în care lumina este divergentă sau convergentă, trebuie să se ţină seama de factorul de mărire λ definit prin

$$\lambda=\frac{z_f+z_0}{z_f} \qquad (6.28)$$

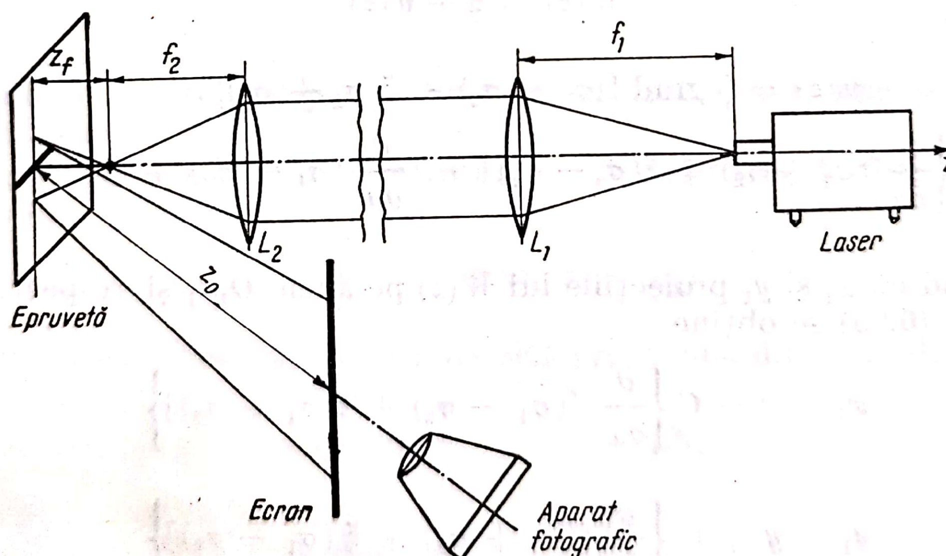


Fig. 6.3.

unde z_f este distanţa dintre focarul fasciculului şi placa încărcată.

În fig. 6.3 este arătată schema sistemului optic.

Factorul λ se aplică relației (6.23) sub următoarea formă :

$$W = \lambda z + w(z). \tag{6.29}$$

Razele reflectate de cele două fețe ale plăcii sau care traversează această placă și care prezintă o deviație $W(z)$ datorată încărcării plăcii, formează pe ecranul receptor o curbă foarte luminoasă care se numește *caustică*. Această curbă este o curbă singulară pentru suprafața $W(z) = W(x, y)$ și condiția de existență a unei singularități se exprimă cu ajutorul determinantului lui Jacobi, care trebuie să fie nul. Acest determinant se exprimă după cum urmează

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x} & \dfrac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.30}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial r} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.31}$$

Ecuațiile (6.30) sau (6.31) reprezintă *curba generatoare a causticei* care se numește „*curba inițială*" a causticei care se află pe placa încărcată. Ecuația causticei este exprimată prin sistemul fiecăreia dintre relațiile (6.30) sau (6.31) împreună cu relația (6.29).

Se pot distinge trei tipuri de *caustice*. Tipul F care este produs de reflexia razelor pe fața anterioară a plăcii. Tipul R care este produs de reflexia razelor pe fața posterioară a plăcii. Tipul T care este produs de razele care traversează placa.

Ecuațiile curbei inițiale și ale causticei pot fi considerabil prescurtate dacă starea de tensiune a plăcii se exprimă cu ajutorul funcției complexe $\Phi(z)$, dată de Muskhelishvili [27], sau funcția $Z(z)$ dată de Westergaard [28]. Este bine cunoscut că funcțiile $\Phi(z)$ și $Z(z)$ sînt funcții armonice și prin urmare satisfac condițiile Cauchy-Riemann, precum și ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{Re}\,\Phi(z)] = \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{Im}\,\Phi(z)], \quad \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{Re}\,\Phi(z)] = -\frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{Im}\,\Phi(z)], \tag{6.32}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.33}$$

Astfel folosind funcţia complexă $\Phi(z)$ şi considerînd $\xi = 0$, pentru un material izotrop din punct de vedere optic, relaţiile (6.26) dau

$$x_1 = \lambda x + C \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$y_1 = \lambda y + C \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{6.34}$$

Suma tensiunilor principale se exprimă prin partea reală a funcţiei $\Phi(z)$ şi astfel rezultă

$$(\sigma_1 + \sigma_2) = 4\mathrm{Re}\,\Phi(z) \tag{6.35}$$

Introducînd expresia (6.35) în relaţiile (6.34) se obţine

$$x_1 = \lambda x + 4C \frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{Re}\,\Phi(z)]$$

$$y_1 = \lambda y + 4C \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{Re}\,\Phi(z)]. \tag{6.36}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (6.32), expresia causticei în variabile complexe ia forma

$$W(z) = x_1 + y_1 i = \lambda z + 4C \frac{[\mathrm{d}\overline{\Phi}(z)]}{\mathrm{d}z}. \tag{6.37}$$

Substituind relaţia (6.32) în ecuaţia (6.30), se obţine

$$\begin{vmatrix} \lambda + C\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_1 + \sigma_2) & C\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ C\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\sigma_1 + \sigma_2) & \lambda + C\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda C\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right] + C^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma +$$

$$+ \sigma_2) - C^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2 = 0.$$

Ultima ecuaţie poate fi scrisă sub o formă prescurtată dacă se ţine seamă de ecuaţiile (6.32) şi (6.33). Se obţine astfel ecuaţia curbei iniţiale

$$\frac{4}{\lambda}\left| C \frac{\mathrm{d}^2 \Phi'(z)}{\mathrm{d}z^2} \right| = 1. \tag{6.38}$$

6.3. CURBA CAUSTICEI GENERATĂ LA EXTREMITATEA UNEI FISURI ÎNTR-O PLACĂ DIN MATERIAL PLASTIC BIREFRINGENT

Se consideră o placă subţire într-o stare plană de tensiuni din material elastic, avînd o izotropie mecanică şi o anizotropie optică, conţinînd o fisură de o formă arbitrară. În fig. 6.4 este arătată geometria fisurii

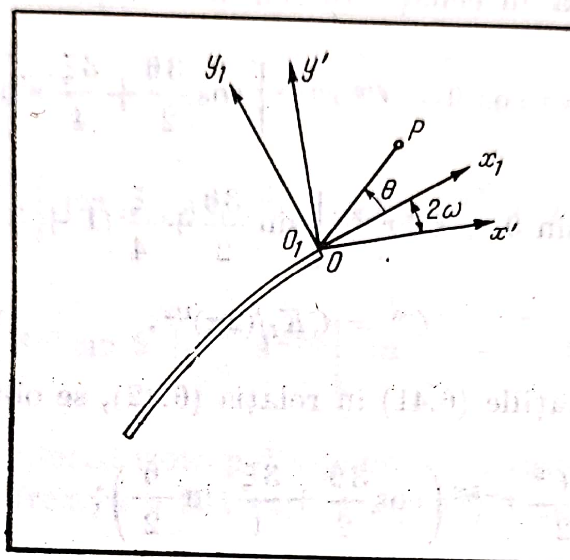


Fig. 6.4.

şi a sistemului de coordonate. Se alege un sistem de coordonate carteziene şi un alt sistem de coordonate polare avînd originile O în vîrful fisurii şi direcţia axei Ox tangentă la fisură. Este bine cunoscut, din teoria elasticităţii, că, pentru $r \to 0$, starea de tensiune în vecinătatea vîrfului fisurii este descrisă pentru primul mod de deformaţie a fisurii de formulele lui Sneddon [24]

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + \sigma_{x_0} \qquad (6.39.\text{a})$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (6.39.\text{b})$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (6.39.\text{c})$$

unde K_I este coeficientul de concentrare a tensiunilor conform primului mod de deformaţie a fisurii şi σ_{x_0} este tensiunea aplicată plăcii la infinit.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind relațiile (6.39) se poate calcula expresia

$$(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_x + \sigma_y) + \xi\,|(\sigma_x - \sigma_y) - 2i\tau_{xy}| =$$

$$= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \xi\sin\theta\right) \qquad (6.40)$$

care, fiind introdusă în ecuația (6.27), dă ecuațiile causticei

$$x_1 = r\cos\theta - C^* r^{-3/2}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{3\xi}{4}\sin 2\theta\right] \qquad (6.41)$$

$$y_1 = r\sin\theta - C^* r^{-3/2}\left[\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{\xi}{4}(1 + 3\cos 2\theta)\right]$$

unde

$$C^* = CK_I/(2\pi)^{1/2}. \qquad (6.42)$$

Substituind relațiile (6.41) în relația (6.42), se obține

$$\frac{\partial(x_1 y_1)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta - \frac{3C^*}{2} r^{-5/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{3\xi}{4}\sin\frac{\theta}{2}\right); & -r\sin\theta - \frac{3C^*}{2} r^{-3/2}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \xi\cos 2\theta\right) \\ \sin\theta - \frac{3C^*}{2} r^{-5/2}\left[\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{\xi}{4}(1 + 3\cos 2\theta)\right]; & r\cos\theta + \frac{3C}{2} r^{-3/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + \xi\sin 2\theta\right) \end{vmatrix} \qquad (6.43)$$

care conduce la relația

$$r = \left\{\frac{3C^*}{2}\left\{-\frac{\xi}{4}\sin\theta + \left[1 + \frac{\xi}{4}\left(7\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{\xi^2}{32}(25 + 7\cos 2\theta)\right]^{1/2}\right\}\right\}^{2/5} \qquad (6.44)$$

sau la expresia

$$r \equiv r_0 = \left[\frac{3C^*}{2} A\right]^{2/5} \qquad (6.45)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$A = -\frac{\xi}{4}\sin\theta + \left\{1 + \frac{\xi}{4}\left(7\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{\xi^2}{32}(25 + 7\cos 2\theta)\right\}^{1/2}. \tag{6.46}$$

Ecuaţia curbei iniţiale pentru un material birefringent arată influenţa coeficientului de anizotropie optică ξ asupra razei polare r care descrie curba.

Coordonatele unui punct al curbei caustice se obţin introducînd expresia (6.44) pentru r, în relaţiile (6.41). Se obţine.

$$x_1 = \left(\frac{3C^*}{2}\right)^{2/5}\left\{A^{2/5}\cos\theta + \frac{2}{3}A^{-3/5}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + 3\frac{\xi}{4}\sin 2\theta\right]\right\} \tag{6.47}$$

$$y_1 = \left(\frac{3C^*}{2}\right)^{2/5}\left\{A^{2/5}\sin\theta + \frac{2}{3}A^{-3/5}\left[\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{\xi}{4}(1 + 3\cos 2\theta)\right]\right\}.$$

În cazul unui material izotrop din punct de vedere optic, unde $\xi = 0$ şi constanta $A = 1$ (relaţia 6.46), expresia (6.45) a curbei iniţiale devine

$$r = r_0 = \left[\frac{3C^*}{2}\right]^{2/5}. \tag{6.48}$$

Relaţiile (6.47), care exprimă coordonatele causticei se reduc la

$$x_1 = \left(\frac{3C^*}{2}\right)^{2/5}\cdot\left(\cos\theta + \frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{3C^*}{2}\right)^{2/5}\cdot\left(\sin\theta + \frac{2}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\right). \tag{6.49}$$

Relaţia (6.48) reprezintă ecuaţia curbei iniţiale, iar ecuaţiile (6.49) exprimă coordonatele *causticei*, pentru un material izotrop din punct de vedere optic. În toate relaţiile precedente unghiul θ ia valori

$$-\pi < \theta < +\pi$$

şi valorile $\theta = \pm\pi$, care corespund celor două feţe ale fisurii.

6.4. CURBA CAUSTICEI GENERATĂ LA EXTREMITATEA UNEI FISURI ÎNTR-O PLACĂ DIN MATERIAL ELASTIC ȘI IZOTROP OPTIC

Se consideră o placă fisurată (fig. 6.4) într-o stare de solicitare plană care produce primele două moduri de deplasare relativă a celor două fețe ale fisurii (openig mode și edge-sliding mode).

Se notează cu K^* coeficientul complex de concentrare a tensiunilor care se exprimă prin

$$K^* = K_I - iK_{II} = |K^*|\, e^{-i\omega_0} \tag{6.50}$$

unde

$$\operatorname{tg}\omega_0 = K_{II}/K_I = \alpha \quad \text{și} \quad i = \sqrt{-1}. \tag{6.51}$$

K_I și K_{II} exprimă coeficienții de concentrare a tensiunilor pentru cele două moduri de deformare a fisurii.

Starea de tensiune în jurul punctului O (vîrful fisurii) este caracterizată, aproximativ, de funcția variabilei complexe [44]

$$\Phi(z) = \frac{K}{2\sqrt{2\pi z}} \tag{6.52}$$

care devine o relație exactă cînd $z \to 0$. Ecuațiile curbei inițiale și ale causticei generate în jurul punctului O, se obțin substituind primele două derivate ale funcției $\Phi(z)$ în relațiile (6.37) și (6.38).

Se obține astfel ecuația causticei

$$W = z - (\bar{K} C \bar{z}^{-3/2})/(\sqrt{2\pi}) \tag{6.53}$$

și ecuația curbei inițiale

$$\frac{3}{2\sqrt{2\pi}} |K|\,|C|\, r^{-5/2} = 1. \tag{6.54}$$

Curba inițială este un cerc de rază : $r \equiv r_0 = \left(\dfrac{3|K||C|}{2\sqrt{2\pi}}\right)^{2/5}$. (6.55)

Ținînd seama de relațiile (6.50), (6.52) și (6.55), ecuația causticei devine

$$W = r_0\left[e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{3}{2}\theta + \omega\right)}\right] \tag{6.56}$$

unde cantitatea ω este definită ca : $\omega = \arg(-\bar{K}C) = \omega_0 + k\pi$; (6.57) ($k = 0$ pentru $C > 0$ și $k = 1$ pentru $C < 0$).

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele x_1 şi y_1 ale unui punct oarecare al causticei sînt exprimate prin

$$x_1 = r_0\left[\cos\,\theta + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right)\right] \tag{6.58}$$

$$y_1 = r_0\left[\sin\,\theta + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right)\right]. \tag{6.59}$$

Pentru o fisură în primul mod de deformaţie ($K_{II} = 0$) coeficientul complex de concentrare a tensiunilor se reduce la partea sa reală $K^* = K_I$.

În acest caz ecuaţia causticei se obţine considerînd $\omega = 0$ în relaţiile (6.58) şi (6.59). Astfel se obţine

$$x_1 = r_0\left[\cos\,\theta + \frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \tag{6.60 a}$$

$$y_1 = r_0\left[\sin\,\theta + \frac{2}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\right]. \tag{6.60 b}$$

6.5. PROPRIETĂŢILE CURBELOR CAUSTICE

Ecuaţia (6.56) arată că curba iniţială este un cerc în cazul unei plăci fisurate, alcătuită dintr-un material elastic şi izotrop din punct de vedere optic. Ecuaţia causticei (6.56), în raport cu sistemul de axe $O_1\,x_1\,y_1$, (fig 6.4), ia o formă simplificată în raport cu noul sistem de axe $O_1\,x'\,y'$ care este definit de unghiul 2ω. Noua variabilă.

$$\theta' = (2\omega + \theta)\,; \quad (-\pi + 2\omega < \theta' < \pi + 2\omega) \tag{6.61}$$

introdusă în ecuaţia (6.56), conduce la

$$W' = r_0\left(e^{i\theta'} + \frac{2}{3}\,e^{i\frac{3}{2}\theta'}\right). \tag{6.62}$$

Proiecţiile ecuaţiei (6.62) pe axele O_1x' şi O_1y' dau coordonatele unui punct, care aparţine causticei

$$x' = r_0\left(\cos\,\theta' + \frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}\,\theta'\right) \tag{6.63a}$$

$$y' = r_0\left(\sin\,\theta' + \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\,\theta'\right). \tag{6.63 b}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile causticei (6.62) sau (6.63) arată că forma causticei nu depinde de geometria și de sarcina plăcii fisurate. Numai dimensiunile causticei depind de acești factori menționați. În plus, se poate deduce din ecuațiile (6.60) că o caustică este simetrică în raport cu axa O_1x' numai în cazul în care $\omega = 0$, adică în cazul în care primul mod de deformare este activ la fisură (opening mode), pentru un material izotrop din punct de vedere optic. Figura 6.5 reprezintă caustica $DCBABB'CD'$ generată în jurul vîr-

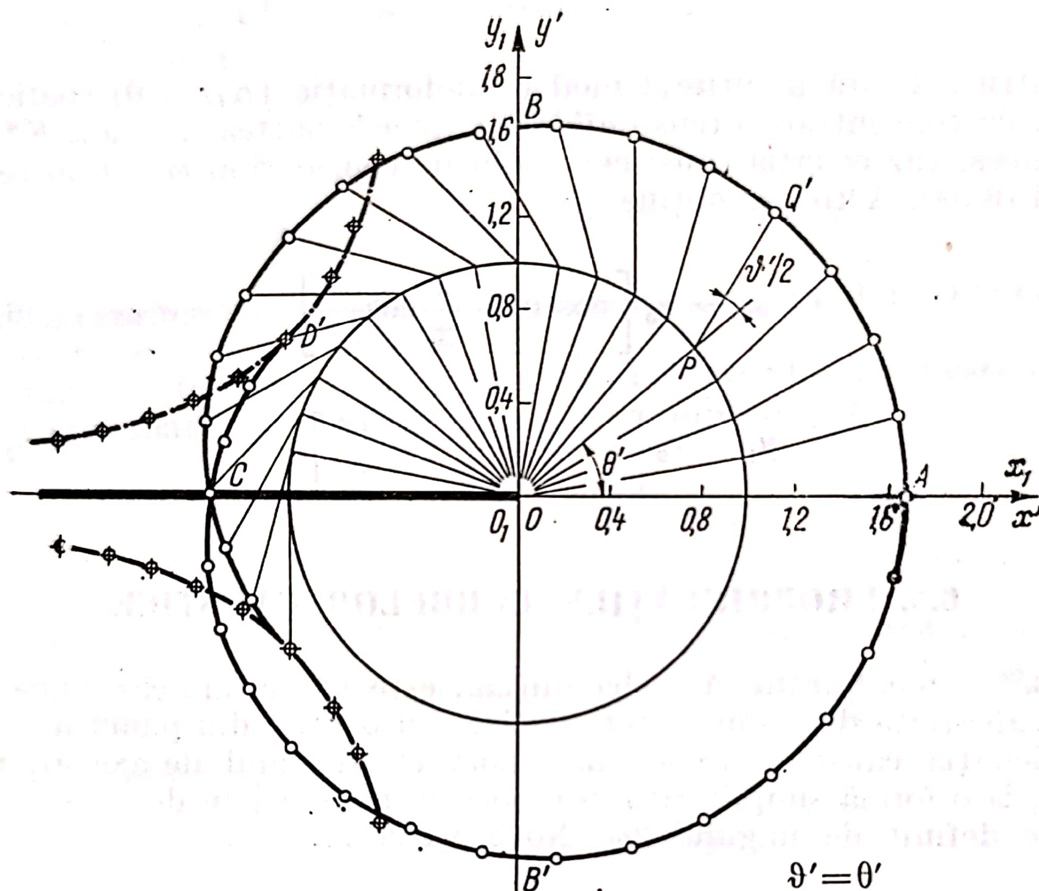


Fig. 6.5.

fului unei fisuri în cazul unui coeficient de concentrare a tensiunilor, K_I, real (unde $\omega = 0$ și $K_{II} = 0$).

Punctele D și D' sînt imaginile celor două fețe ale fisurii proiectate pe ecranul unde caustica este formată. Coordonatele punctelor D și D' sînt determinate de ecuațiile (6.60) considerînd $\theta = \pm\pi$. Rezultă deci

$$x' = -r_0 \tag{6.64}$$

$$y' = \pm(2r_0/3) \tag{6.65}$$

unde raza r_0 este dată de ecuația (6.55). În figura 6.5 valoarea constantei C este considerată ca negativă și coeficientul de concentrare a tensiunilor K este pozitiv și real.

O construcție geometrică ușoară rezultă din expresia (6.62). În fiecare punct P' al curbei inițiale de rază r_0 (realațiile 6.46) determinat de unghiul θ' (fig. 6.5), se trasează vectorul $P'Q'$ de lungime $2r_0/3$ și formînd un unghi $3\theta'/2$ cu axa Ox'.

Valoarea maximă a razei polare OQ' se află în punctul A al causticei pentru care $\theta' = 0$. Această valoare dă o rază ρ_{max} a causticei exprimată prin

$$\rho_{max} = \frac{5r_0}{3}. \tag{6.65}$$

Valoarea minimă a razei caustice se află pentru $\theta' = \pm\pi$ în punctele D și D' pentru care

$$\rho_{min} = \frac{\sqrt{13}\, r_0}{3}. \tag{6.66}$$

Raza polară a punctului C (fig. 6.4) se obține plecînd de la condiția $y' = 0$ care, prin ecuația (6.63 b), dă

$$\cos\frac{\theta'}{2} = \frac{1}{4}; \quad \theta' = \pm 151°3 \tag{6.67}$$

și mai departe

$$\rho_{mediu} = \frac{4r_0}{3}. \tag{6.68}$$

Diametrul longitudinal al causticei $D_l = CA$ (fig. 6.5) poate fi calculat și cu expresia :

$$D_l = \rho_{max} + \rho_{mediu} = 3r_0. \tag{6.69}$$

Coordonatele punctelor B și B' se obțin punînd $x' = 0$ în relațiile (6.63 a) și (6.63 b). În acest caz rezultă

$$\theta' = \pm 75°4' \quad \text{și} \quad \rho_t = 1{,}582\, r_0 \tag{6.70}$$

În consecință diametrul transversal D_t al causticei este egal cu

$$D_t = 3{,}163\ r_0. \tag{6.71}$$

Valorile maxime ale coordonatelor unui punct al causticei se obțin cu ajutorul condițiilor $dx'/d\theta = 0$ și $dy'/d\theta = 0$. Aceste condiții, introduse în relațiile (6.63), dau

$$\sin\theta' + \sin\frac{3\theta'}{2} = 0 \tag{6.72}$$

$$\cos\theta' + \cos\frac{3\theta'}{2} = 0. \tag{6.73}$$

Scanned with OKEN Scanner

Adăugînd condiţia $-\pi < \theta' < \pi$, ecuaţiile (6.72) şi (6.73) dau următoarele valori pentru unghiul θ'.

$$\theta' = 0^\circ; \quad \theta' = \pm 144^\circ \quad \text{şi} \quad \theta' = \pm 72^\circ. \tag{6.74}$$

Înlocuind valorile (6.74) în ecuaţiile (6.63) se obţine

$$x'_{max} = \frac{5r_0}{3} = \rho_{max}; \quad x'_{min} = 1{,}348\, r_0$$

$$y'_{max} = y'_{min} = 1{,}585 r_0. \tag{6.75}$$

Dreptunghiul circumscris curbei caustice are următoarele laturi

$$D_l^{max} = x'_{max} - x'_{min} = 3{,}015\, r_0$$

$$D_t^{max} = y'_{max} - y'_{min} = 3{,}170\, r_0 \tag{6.76}$$

care diferă foarte puţin de diametrele longitudinal şi transversal date de relaţiile (6.69) şi (6.71). Diametrele (6.67) reprezintă elemente caracteris-

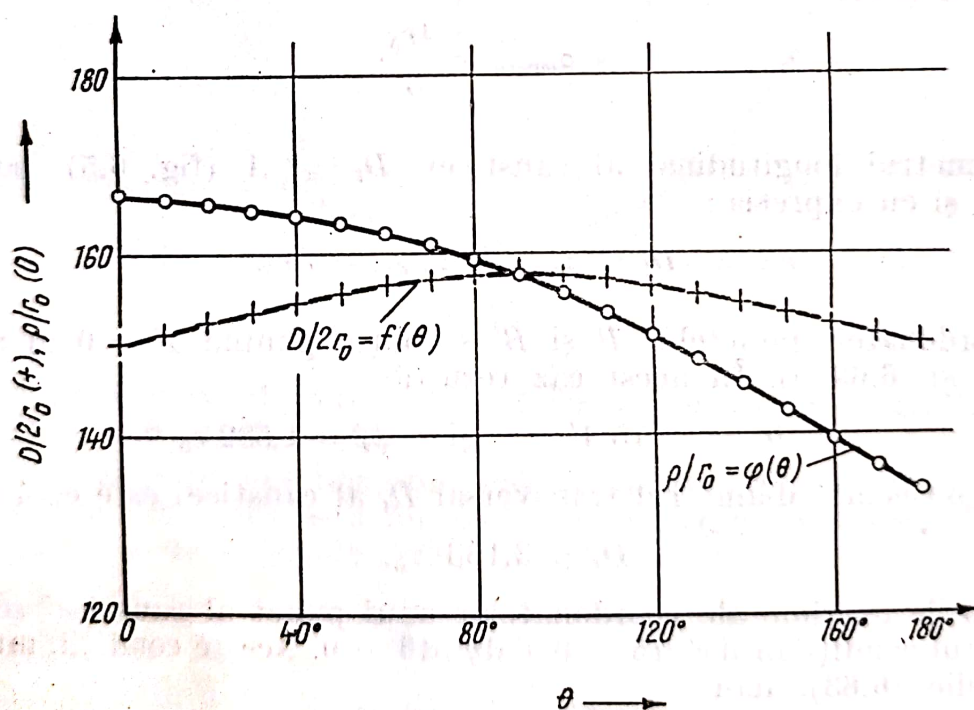


Fig. 6.6.

tice ale causticei care vor fi folosite pentru determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor în vîrful fisurii. Figura (6.6) reprezintă grafic, variaţia diametrului D şi a razei polare ρ în funcţie de unghiul θ.

Raza ρ este dată de

$$\rho = \frac{r_0}{3}\left(13 + 12\cos\frac{\theta'}{2}\right)^{1/2}. \tag{6.77}$$

Introducînd expresia $W' = \rho' e^{i\varphi'}$, ecuaţia (6.53) devine

$$\rho' = r_0\left[e^{i(\theta'-\varphi')} \pm \frac{2}{3}\, e^{i(3\theta'/2-\varphi')}\right]. \tag{6.78}$$

Această ecuaţie poate fi despărţită în două ecuaţii parametrice

$$\rho' = r_0\left[\cos(\theta' - \varphi') \pm \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}\theta' - \varphi'\right)\right]$$

$$0 = r_0\left[\sin(\theta' - \varphi') \pm \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\theta' - \varphi'\right)\right]. \tag{6.79}$$

Ultima ecuaţie dă valoarea unghiului φ'

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y'}{x'} = \frac{3\sin\theta' + 2\sin\frac{3}{2}\theta'}{3\cos\theta' + 2\cos\frac{3}{2}\theta'}. \tag{6.80}$$

Se poate pune, de asemenea, $W = \rho\, e^{i\varphi}$ şi din ecuaţia (6.56) se obţine

$$\rho = r_0\left[e^{i(\theta-\varphi)} + \frac{2}{3}\, e^{i(3\theta/2+\omega-\varphi)}\right]. \tag{6.81}$$

Separînd partea reală de partea imaginară a relaţiei (6.81) se obţine

$$\rho = r_0\left[\cos(\theta - \varphi) + \frac{2}{3}\cos(3\theta/2 + \omega - \varphi)\right]$$

$$0 = r_0\left[\sin(\theta - \varphi) + \frac{2}{3}\sin(3\theta/2 + \omega - \varphi)\right] \tag{6.82}$$

Din ultima ecuaţie se obţine

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{3\sin\theta + 2\sin(3\theta/2 + \omega)}{3\cos\theta + 2\cos(3\theta/2 + \omega)}. \tag{6.83}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră acum cazul general cînd unghiul ω, definit de ecuaţia (6.57) ca o funcţie de ω_0, dat de relaţia (6.51), este diferit de 0. În acest caz ecuaţia causticei este exprimată de relaţia (6.62), ecuaţia curbei iniţiale este exprimată de relaţia (6.55) şi unghiul θ' este cuprins între valorile definite de expresia (6.61).

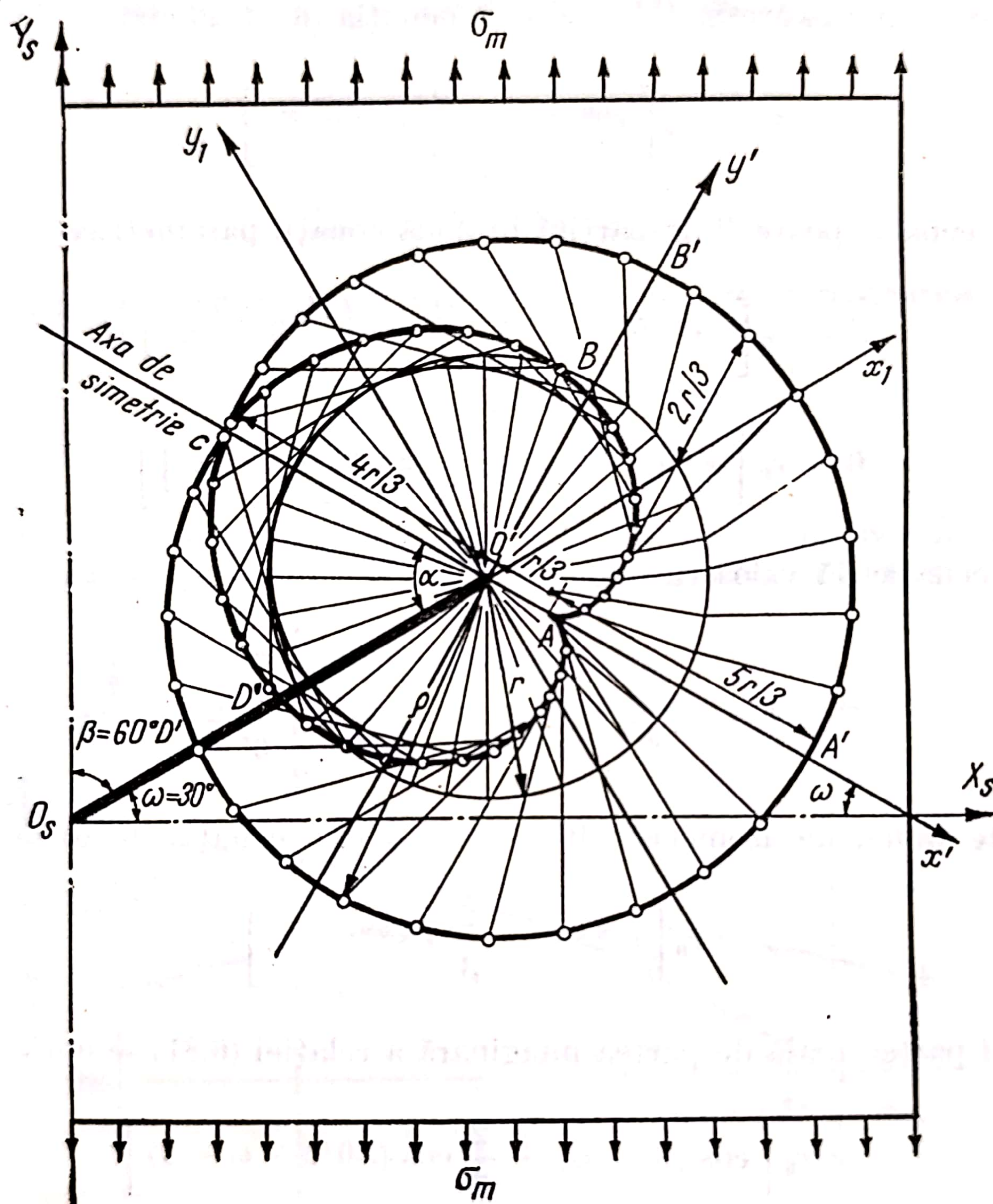
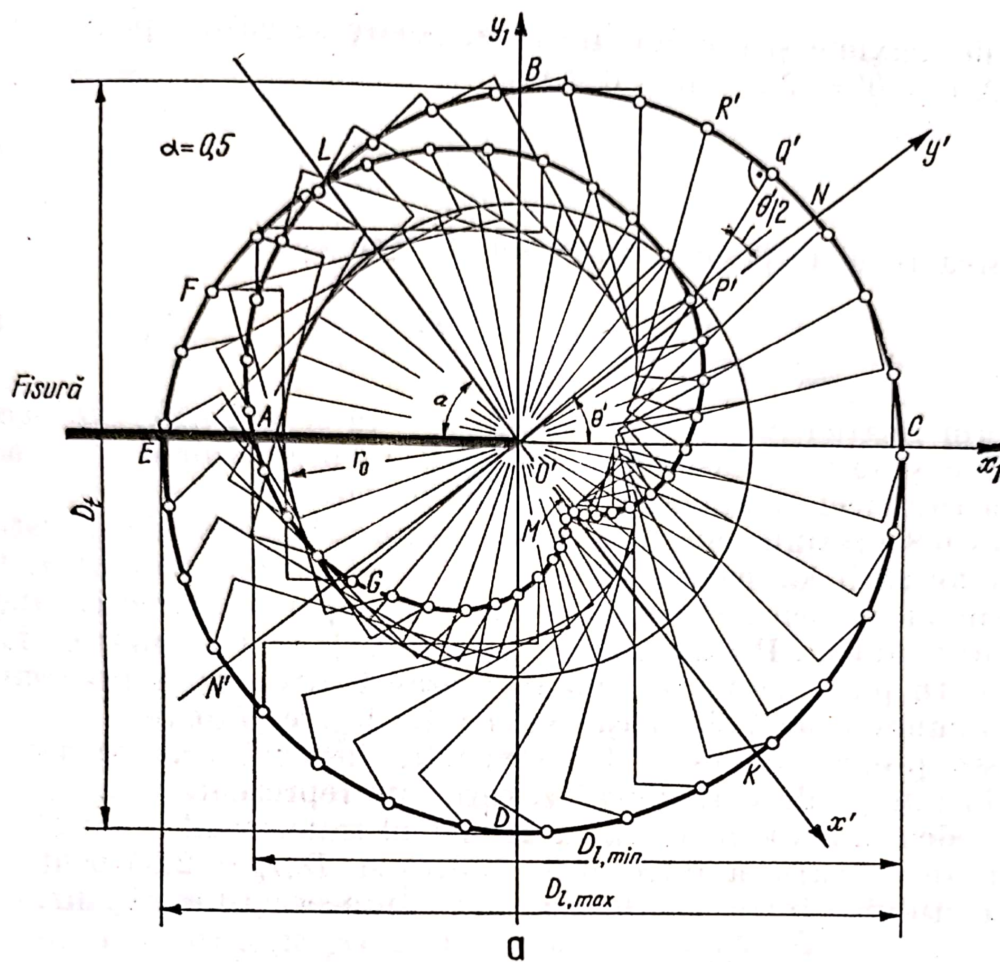


Fig. 6.7.

Figura 6.7 reprezintă geometria formării curbei iniţiale şi a causticei în cazul general. Relaţiile (6.55) şi (6.63) au fost aplicate pentru cazul special al unui unghi $\omega = \frac{\pi}{2} - \beta = 30°$.

Ecuaţia (6.63) arată coordonatele causticei ca fiind funcţie periodică de unghiul θ' avînd perioada egală cu 4π.

Scanned with OKEN Scanner



α=0

α=0,25

α=1

α=∞

b

Fig. 6.8.

Valorile maxime şi minime ale razei polare se găsesc pentru $\theta' = 0$ (punctul A') şi $\theta' = 2\pi$ (punctul A)

$$\rho_{max} = \frac{5r_0}{3}; \quad \rho_{min} = \frac{r_0}{3}. \tag{6.84}$$

Valoarea razei mijlocii a punctului C este egală cu

$$\rho_{mediu} = \frac{4r_0}{3}. \tag{6.85}$$

Conform relaţiei (6.56) coeficientul $\alpha = \mathrm{tg}\, \omega = K_{II}/K_I$ influenţează dimensiunile şi forma causticei şi, în plus, unghiul format între axa de simetrie a causticei şi tangenta la vîrful fisurii.

Figura 6.8 prezintă cinci tipuri de înfăşurări principale (caustice) şi geometria formării lor pentru diferite valori ale coeficientului α. Curba care corespunde valorii $\alpha = 0$ este simetrică în raport cu direcţia tangentei la fisură în vîrful ei. Pentru $\alpha \not\equiv 0$ toate curbele sînt asimetrice faţă de axa fisurii. În plus, pentru o valoare α crescătoare, suprafaţa conţinută de către ramura principală a causticei este descrescătoare.

Această proprietate este, de asemenea, ilustrată prin variaţia diametrului în funcţie de parametrul α, care este reprezentată în figura 6.9. Se poate vedea în această figură că diametrul transversal raportat la raza curbei iniţiale r_0 variază între $D_t/r_0 = 3{,}16$ şi $D_t/r_0 = 2{,}55$ pentu valori ale coeficientului α între $\alpha = 0$ şi $\alpha = \infty$. În aceeaşi figură sînt, de ase-

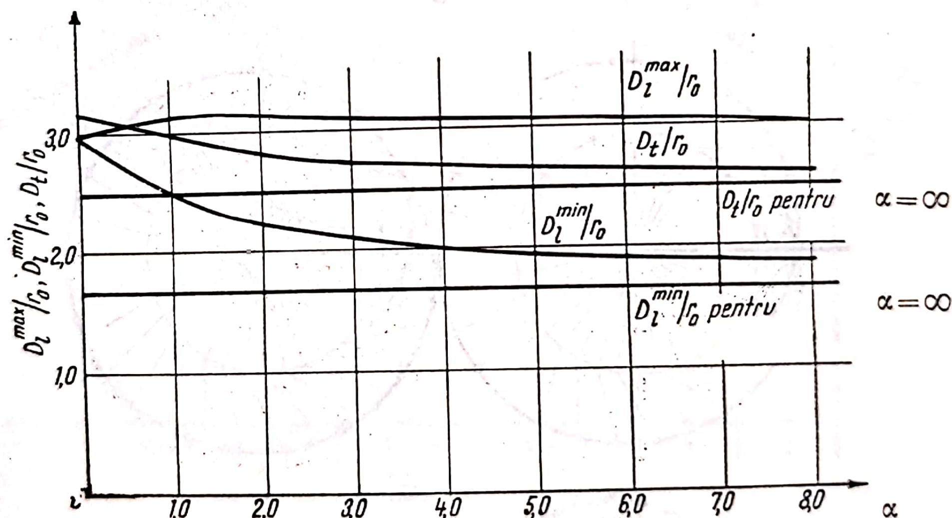


Fig. 6.9.

menea, trasate variaţiile rapoartelor D_l^{max}/r_0 şi D_l^{min}/r_0 în funcţie de α. Fiecare curbă a causticei are proprietăţi bine determinate de către valoarea parametrului α şi, în consecinţă, este uşor să se determine valoarea acestui parametru cu ajutorul causticei corespunzătoare. În acest scop este mai indicat să se aleagă raportul $(D_l^{max} - D_l^{min})/D_l^{max}$, care este reprezentat în fig. 6.10 ca funcţie de coeficientul α.

Cunoscînd raportul precedent, determinat pe fotografia causticei, se poate evalua coeficientul α cu ajutorul curbei din fig. 6.10. Valoarea astfel găsită pentru α, este introdusă în diagrama din figura 6.9 pentru a determina rapoartele $\delta_l^{max} = D_l^{max}/r_0$; $\delta_l^{min} = D_l^{min}/r_0$ şi $\delta_t = D_t/r_0$, care sînt utile, în continuare, pentru determinarea razei curbei iniţiale r_0.

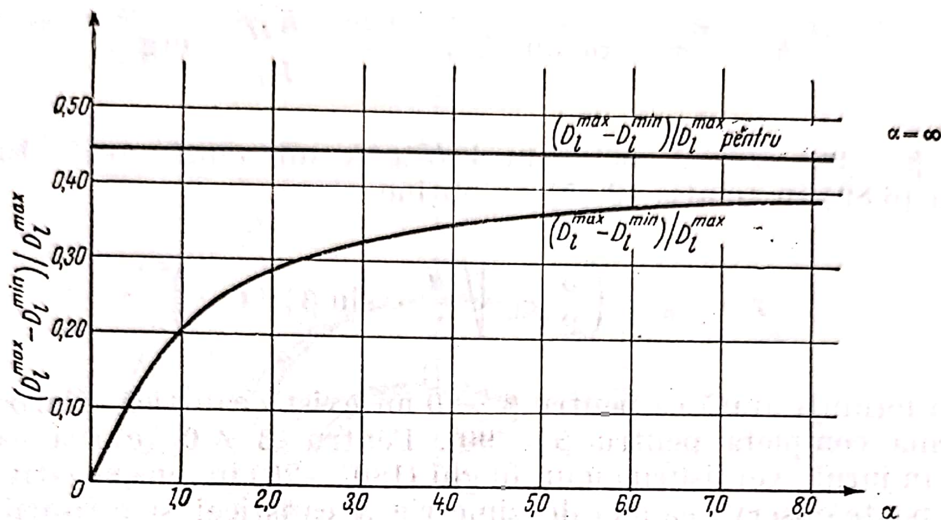


Fig. 6.10.

În plus, este de remarcat că curba causticei care este reprezentată în figura 6.8, a are o construcţie geometrică foarte simplă. Într-adevăr, dacă se transformă ecuaţiile (6.58) şi (6.59) ţinînd seama de relaţiile (6.50) şi (6.45) se obţin coordonatele x_1 şi y_1 ale fiecărui punct al causticei cu relaţiile

$$x_1 = r_0\left[\cos\theta \pm \frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\cos\frac{3\theta}{2} - \alpha\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$y_1 = r_0\left[\sin\theta \pm \frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\sin\frac{3\theta}{2} + \alpha\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right]. \qquad (6.86)$$

Relaţiile (6.86) arată că fiecărui punct P' al curbei iniţiale care face un unghi θ' cu axa Ox, i se trasează un vector $P'Q'$ de lungime $\frac{2r_0}{3}(1 + \alpha^2)^{-1/2}$ care face un unghi $3\theta/2$ cu axa Ox şi, mai departe, un vector $P'Q'$ perpendicular pe acesta, de lungime $\frac{2r_0}{3}|\alpha|(1+\alpha^2)^{-1/2}$.

În cazul unei fisuri rectilinii de lungime $2a$ şi pătrunsă într-o placă încărcată la infinit de o tensiune σ_m care face unghiul β cu fisura, coeficientul de concentrare a tensiunilor se exprimă [3] prin

$$K = -i\sigma_m\sqrt{\pi a}\cdot\sin\beta e^{i\beta} \qquad (6.87)$$

Scanned with OKEN Scanner

care poate fi scrisă sub forma

$$K_I = \sigma_m \sqrt{\pi a} \cdot \sin^2 \beta \,; \quad K_{II} = \sigma_m \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \tag{6.88}$$

sau sub forma

$$|K| = \sigma_m \sqrt{\pi a} \sin |\beta| \,; \qquad \alpha = \frac{K_{II}}{K_I} = \text{ctg}\, \beta \cdot \tag{6.89}$$

Pentru $\beta = 90°$, $\alpha = 0$ coeficientul K este un număr real. Introducînd formula (6.89) în relația (6.55) se obține

$$r = r_0 = \left(\frac{3}{2}\,\sigma_m \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot |\sin \beta| \cdot |C|\right)^{2/5} \cdot$$

Această formulă arată că pentru $\beta = 0$ nu există caustică. Curba caustică are forma completă pentru $\beta = 90°$. Pentru $\beta \neq 0$, curba caustică se rotește în jurul axei fisurii cu un unghi $(180° - 2\beta)$ în sens negativ (fig. 6.7). Se mai poate observa că axa de simetrie a causticei și a fisurii sînt două drepte simetrice față de direcția tensiunii σ_m aplicată plăcii la infinit.

6.6. FORMA CAUSTICELOR EXPERIMENTALE ȘI DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE CONCENTRARE A TENSIUNILOR

Se consideră o placă de plexiglas fisurată, pentru care, cu ajutorul sistemului optic reprezentat în figura 6.3 s-au obținut cele trei tipuri de caustice notate prin F, R și T (vezi § 6.2).

Ținînd seama că pentru plexiglas constantele optice care intră în relațiile (6.22) au valorile [5]

$$\begin{aligned} c_t &= -1{,}01 \times 10^{-5}\ \text{cm}^2/\text{daN} \\ c_r &= -3{,}24 \times 10^{-5}\ \text{cm}^2/\text{daN} \\ c_f &= -1{,}21 \times 10^{-5}\ \text{cm}^2/\text{daN} \end{aligned} \tag{6.90}$$

relația (6.55) dă pentru razele curbelor inițiale rapoartele

$$r_t : r_r : r_f = 1{,}024 : 1{,}596 : 1{,}039 \tag{6.91}$$

Dacă ecranul este așezat între sursa de lumină și placa fisurată, se pot observa două caustice, adică tipurile F și R. Pentu a observa tipul T, ecranul trebuie să fie așezat în spatele plăcii. Figura 6.11 arată cele trei tipuri de curbe inițiale și de caustice. Astfel, curba inițială și caustica

$(H'I'AIH)$ formată prin reflexia razelor pe fața anterioară a plăcii (C negativ) sînt însemnate prin semnul ($\times$). Curba inițială și caustica $(E'CD'A'DCE)$ formată prin reflexia razelor pe fața posterioară (C pozitiv) sînt însemnate prin semnul ($+$) și curba inițială și caustica $(GC'F'A''FC'G')$ formată prin razele care traversează placa (C pozitiv) sînt însemnate prin semnul ($\circ$). Se poate observa, pe această figură, că curba cea

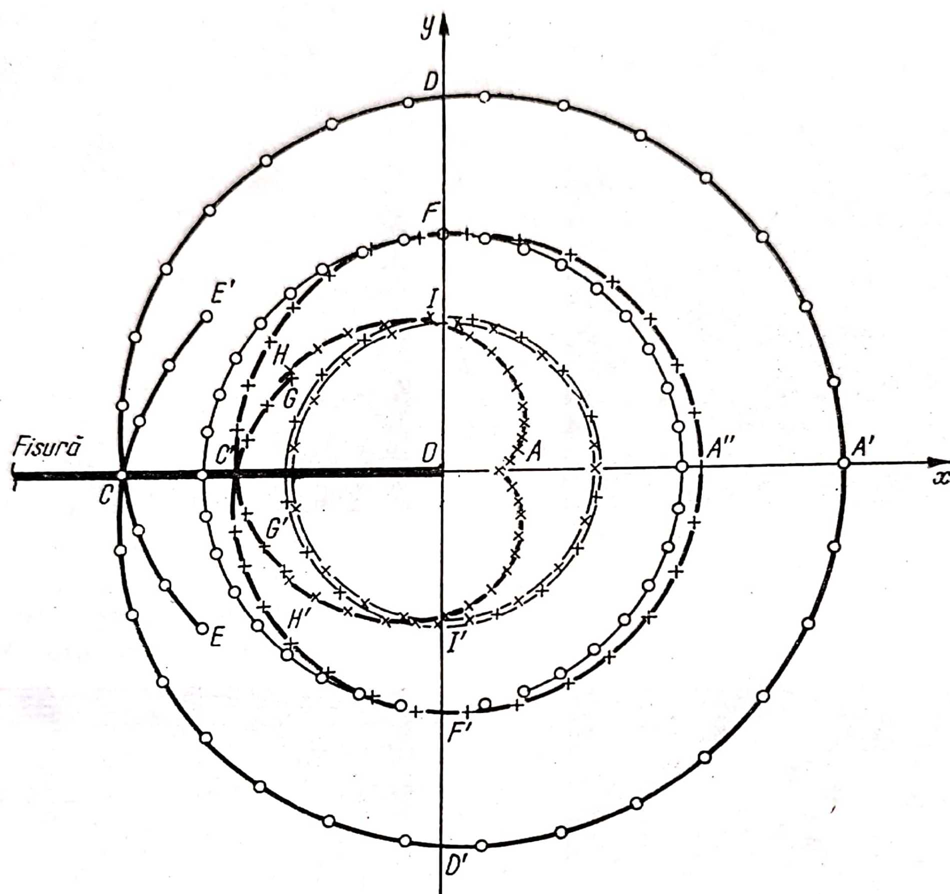


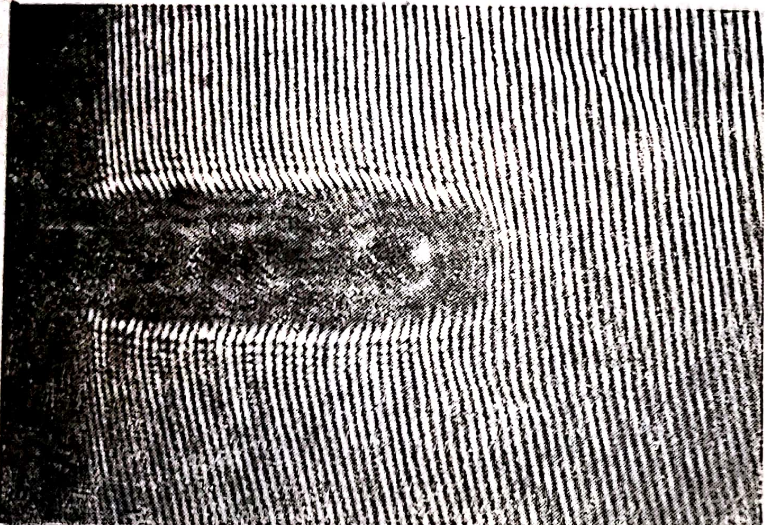
Fig. 6.11.

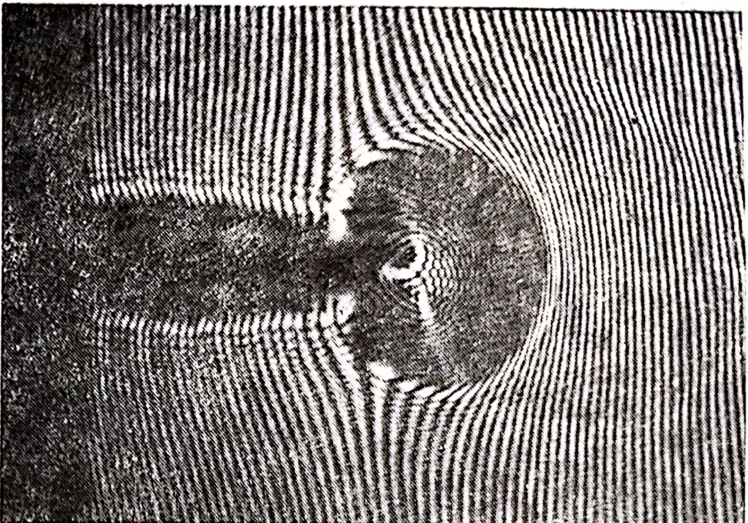
mai mare a causticei este podusă de razele reflectate de suprafața posterioară a plăcii (tip R). Prin urmare, această curbă este cea mai sensibilă la variația condițiilor de încărcare a plăcii și ea este indicată a fi folosită. Pentru razele polare δ'_{min}, ρ_{max} și ρ'_{mediu} și, de asemenea, pentru diametrele celor trei tipuri de caustice sînt îndeplinite următoarele condiții

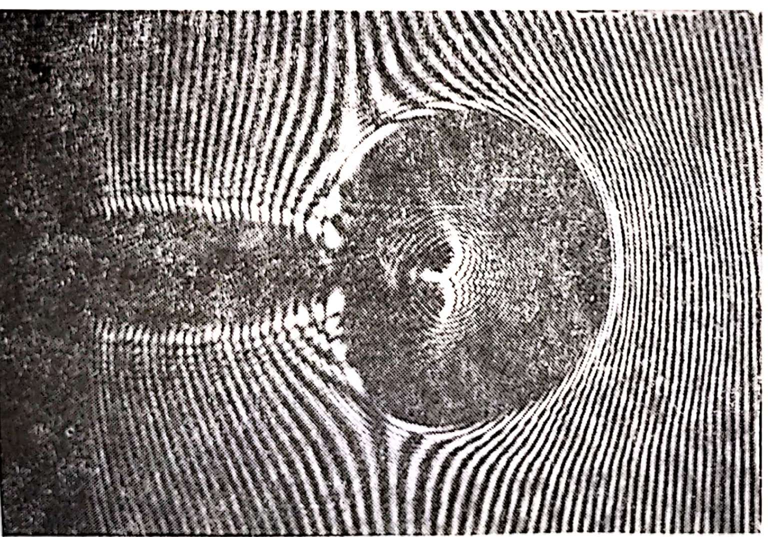
$$(\rho'_{min.f}) = (r_{0,f})/_3 ; \quad (\rho'_{mediu,f}) = 4_0(r_{0,r,f})/3$$

$$(\rho'_{max.r,t}) = -5\,(r_{0,r,t})/3 ; \quad (D_{l,r,t}) = 3(r_{0,r,t}) ; \quad (D_{t,r,t}) = 3{,}163(r_{0,r,t}). \qquad (6.92)$$

Este interesant de observat că, deși curba causticei teoretice este o curbă continuă de perioadă 4π, unde partea exterioară aparține reflexiilor de pe fața posterioară a plăcii și partea inferioară aparține reflexiilor de


a)


b)


c)

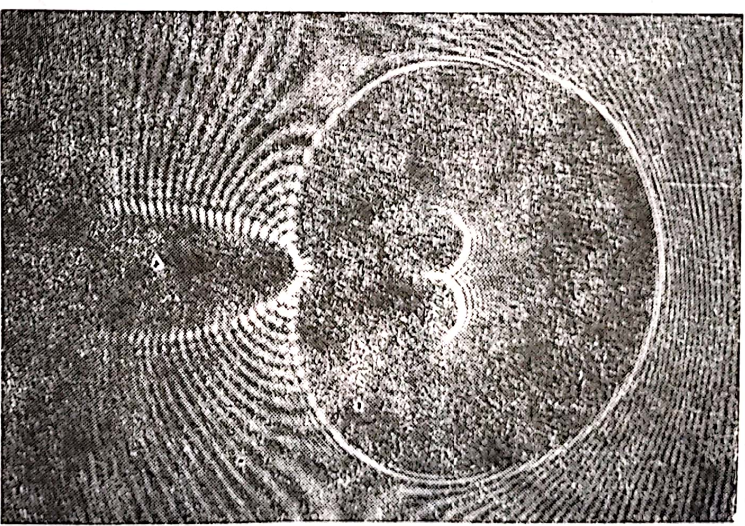

d)

Fig. 6.12.

pe fața anterioară a plăcii. Caustica obținută experimental se împarte în două părți separate care se termină în punctele E și E' pentru partea exterioară și punctele H și H' pentru partea interioară.

În diferite cazuri curbele caustice experimentale au fost obținute folosind montajul experimental din figura 6.3. Astfel, în figura 6.12 se prezintă interferograma și causticele formate la vîrful unei fisuri într-o placă de plexiglas supusă la o tensiune de întindere σ într-o direcție perpendiculară pe fisură, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate. Caracteristicile plăcii sînt : lărgimea $b = 47{,}6$ mm, grosimea 2,8 mm, lungimea fisurii $a = 5$ mm. Lungimea fisurii este considerată mică față de lungimea plăcii, în așa fel ca distribuția tensiunilor în jurul vîrfului fisurii să nu fie influențată de marginea din față a plăcii. Distanța între maginile fisurii este de ordinul a 0,3 mm. Caracteristicile dispozitivului optic utilizat sînt : distanța focală a lentilelor $f_1 = f_2 = 110$ cm, $z_f = 15{,}5$ cm și $z_0 = 116{,}5$ cm (fig. 6.3).

În figura 6.13 curba causticei generată pe o placă din bronz este prezentată ca avînd caracteristici geometrice identice cu placa de plexiglas, dar la care sistemul optic din figura 6.3 a fost schimbat în felul următor : placa a fost așezată la o distanță z_f negativă față de lentila L_2 și ca urmare factorul de mărire λ este negativ. Pe ecran se observă numai caustica produsă prin reflexia razelor pe suprafața anterioară a plăcii, care are forma curbei exterioare din figura 6.12.

În sfîrșit, în figura 6.14 sînt reprezentate causticele generate la extremitatea unei fisuri create într-o placă de plexiglas sub acțiunea unei forțe de tracțiune, pentru o valoare a unghiului $\beta = 45°$. Se poate evalua în această figură unghiul de rotație a axei de simetrie a curbei caustice față de direcția fisurii.

Proprietățile causticelor dau posibilitatea determinării coeficientului de concentrare a tensiunilor la extremitatea unei fisuri într-o placă oarecare supusă la o stare plană de tensiune. Determinarea coeficientului global K cere cunoașterea celor două mărimi, fie valoarea sa absolută $|K|$ și raportul $\alpha = (K_{II}/K_I) = \operatorname{tg} \omega$ (relațiile (6.50) și (6.51)), fie componentele sale : reală K_I și imaginară K_{II}. Pentru a rezolva problema, din punct de vedere practic, trebuie să se măsoare pe curba causticei două mărimi in dependente. Aceste mărimi pot fi fie diametrele D_l^{max} și D_l^{mni}, fie diametrul D_l^{max} și unghiul care este format de direcția fisurii cu axa de simetrie a causticei (vezi § 6.5). Mărimile care sînt măsurate pe curba causticei trebuie să fie reduse la parametrul λ al sistemului optic, care a fost folosit în timpul experiențelor.

Aplicînd formulele de la paragraful 6.5, se poate găsi raza curbei inițiale cu ajutorul diametrului transversal D_l^{max}

$$r_0 = D_l^{max}/3{,}163 \tag{6.93}$$

și modulul coeficientului K

$$|K| = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3|C|} \cdot \left(\frac{D_l^{max}}{3{,}170}\right)^{5/2} = \frac{0{,}0934\,(D_l^{max})^{5/2}}{|C|}. \tag{6.94}$$

Scanned with OKEN Scanner

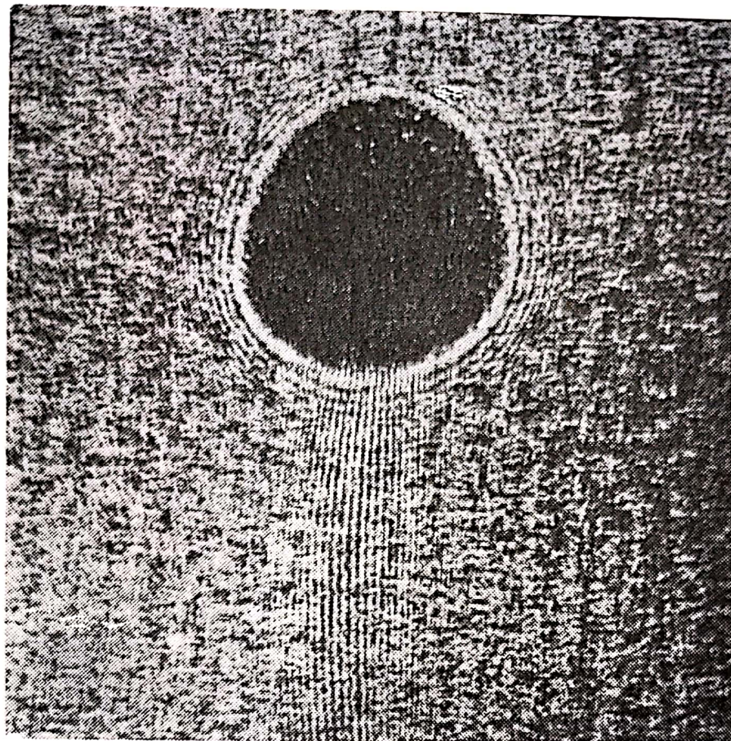


Fig. 6.13.

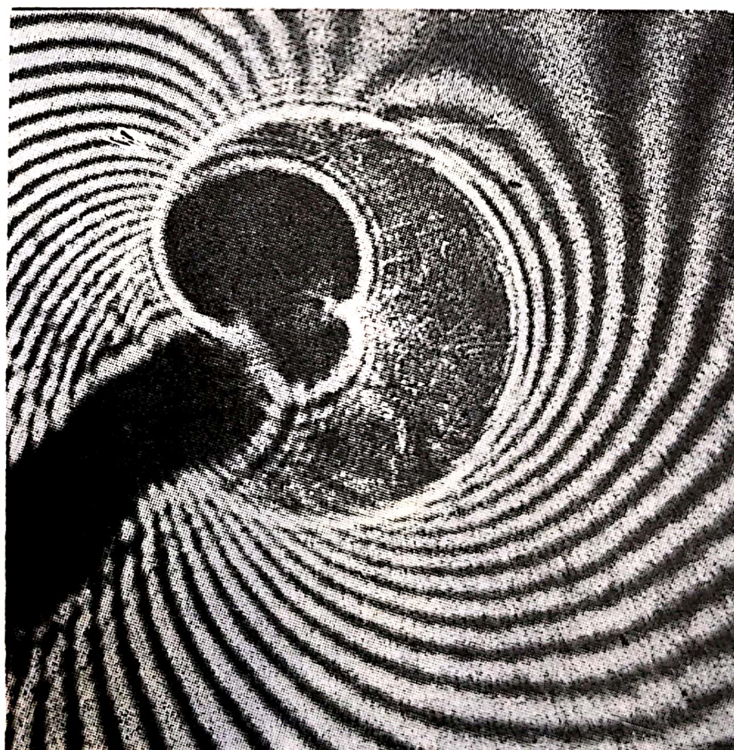


Fig. 6.11.

Cu ajutorul celor două diamete D_l^{max} și D_l^{min} se poate determina pe diagrama din figura 6.10 raportul $K_{II}/K_I = \alpha$ și, mai departe, cu ajutorul relației (6.94), partea reală K_I și imaginară K_{II} a coeficientului de concentrare a tensiunilor. Într-adevăr, deoarece $K = K_I - iK_{II}$ se poate scrie.

$$|K| = [(K_I)^2 + (K_{II})^2]^{1/2} = K_I(1 + \alpha^2)^{1/2} = K_{II}\frac{(1 + \alpha^2)^{1/2}}{\alpha}; \quad (6.95)$$

Înlocuind (6.95) în (6.94) se obține

$$K_I = \frac{0{,}0934\,(D_t^{max})^{5/2}}{|C|\,(1 + \alpha^2)^{1/2}} \quad (6.96)$$

$$K_{II} = \frac{0{,}0934\alpha\,(D_t^{max})^{5/2}}{|C|(1 + \alpha^2)^{1/2}}. \quad (6.97)$$

În felul acesta, cu ajutorul elementelor geometrice ale causticei obținute experimental, se pot determina coeficienții de concentrare K la extremitatea unei fisuri într-o placă oarecare.

6.7. CAUSTICELE ÎN CAZUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI SINGULARE CREATE DE FISURI

În acest capitol sînt prezentate rezultatele cercetărilor experimentale efectuate pentru stabilirea coeficientului de concentrare a tensiunilor la extremitatea fisurilor, folosind metoda causticelor pentru diferite cazuri de plăci fisurate. În acest scop s-a folosit curba causticei formate prin reflexia razelor de către fața posterioară a plăcii. Rezultatele experimentale au fost comparate cu datele teoretice furnizate de alte cercetări, în cazurile în care existau soluții pentru probleme particulare.

6.7.1. PLĂCI CONȚINÎND O FISURĂ CENTRALĂ

Geometria plăcii este prezentată în figura 6.15. Unghiul β al axei fisurii cu direcția forței aplicată plăcii ia următoarele valori: $\beta = 90°$; 75°; 60°; 45°; 30° și 15°. Grosimea plăcii $d = 1{,}81$ m și lățimea $b = 50$ mm. Lungimea fisurii $2a = 10$ mm. Dimensiunile plăcii și ale fisurii au fost alese în așa fel ca raportul b/a să nu aibă influență sensibilă asupra distribuției tensiunilor în jurul vîrfului fisurii. Factorul de mărire λ al sistemului optic a fost $\lambda = 6$. În cazul reprezentat în figura 6.15 coeficientul de concentrare a tensiunilor este complex (relațiile 6.50). Dacă axa OX coincide cu direcția fisurii, partea reală K_I a coeficientului K corespunde primului

Scanned with OKEN Scanner

mod de deplasare a celor două fețe ale fisurii și K_{II} celui de-al doilea mod. Soluția teoretică pentru o placă fisurată de dimensiuni limitate cu un raport dintre lungimea fisurii și lărgimea plăcii egal cu $\frac{2a}{b} = 0{,}2$ dă următoarele valori pentru componentele coeficientului K [25]

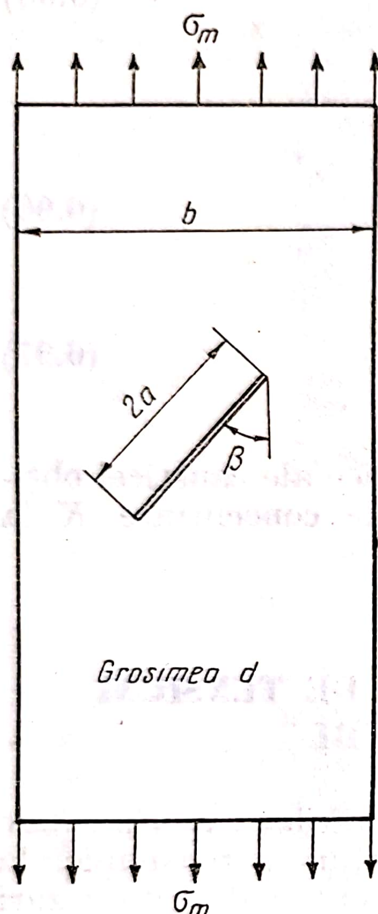


Fig. 6.15.

$$K_I = 1{,}02\,\sigma_m\,(\pi a)^{1/2}\sin^2\beta \qquad (6.98\ a)$$

$$K_{II} = 1{,}02\,\sigma_m\,(\pi a)^{1/2}\sin\beta\cos\beta. \qquad (6.98\ b)$$

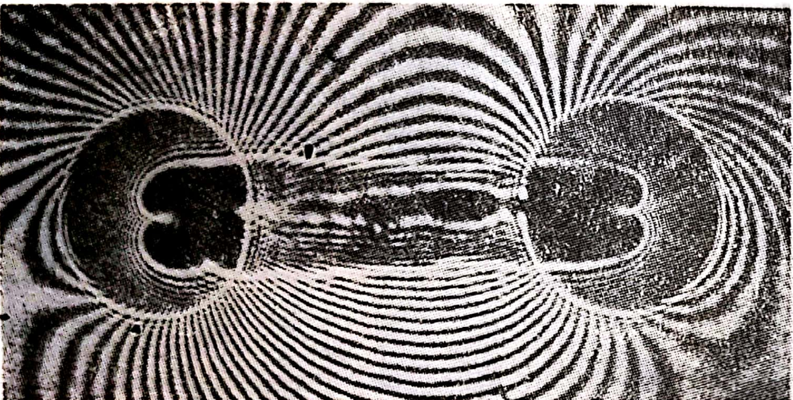
Valorile pentru K_I și K_{II} calculate [12] cu relațiile precedente, ca și valorile obținute măsurînd diametrele causticelor din figura 6.16 sînt reprezentate grafic în diagrama din figura 6.17 pentru diferite valori ale unghiului β (β = 90°, 75°, 60°, 45°, 30° și 15°). Figura 6.16, a arată variația coeficientului K_I, în funcție de σ_m, iar figura 6.16, b variația coeficientului K_{II}.

6.7.2. PLĂCI CONȚINÎND FISURI RAMIFICATE

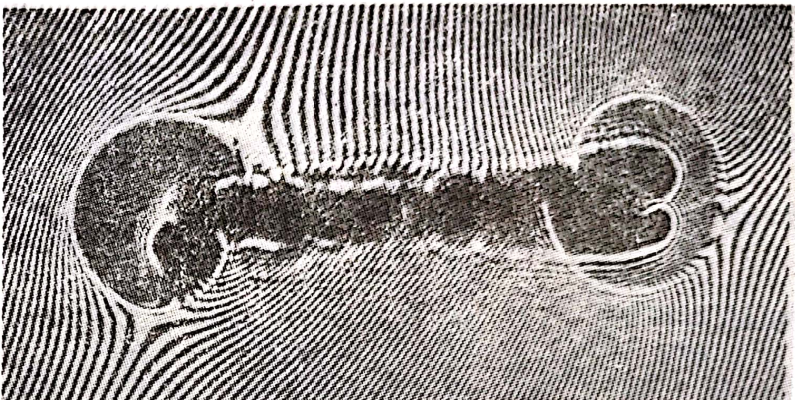
a) *Fisuri cu ramificație asimetrică.* Caracteristicile geometrice ale plăcii fisurate sînt alese în așa fel încît distribuția tensiunilor la extremitatea fiecărei ramuri să nu fie influențată de dimensiunile plăcii (fig. 6.18) [7].

Au fost examinate plăci de plexiglas avînd o grosime $d = 2$ mm și o lățime $w = 160$ mm, ce conțineau o fisură centrală de lungime $c + a = (60 + 80)$ mm, care se bifurca în punctul D, prezentînd o ramură secundară de lungime b variabilă. Unghiul θ între ramura principală a fisurii și ramura secundară a fost variabil. În timpul experiențelor au fost realizate următoarele valori. Pentru rapoartele $\frac{c}{a} = 4 \div 6$; $\frac{b}{a} = 0{,}2 \div 3$ și pentru unghiul θ valori diferite (θ = 15°, fig. 6.18, a; θ = 30°, fig. 6.18, b și θ = 45°, fig. 6.18, c). Lungimea c a fisurii principale este uneori mai mare decît fiecare din cele două ramuri (b și a) și prin urmare caustica punctului C nu este perturbată de causticele punctelor A și B. De aceea coeficientul de concentrare a tensiunilor în jurul vîrfului $C(K_{IC})$ este ales ca valoare de comparație pentru ceilalți doi coeficienți K_A și K_B corespunzători punctelor A și B. Existența ramurii DB produce o redistribuție a tensiunilor în jurul vîrfului A și, de asemenea, forma și dimensiunile causticei în acest punct depind de variația raportului $\frac{b}{a}$ și de unghiul θ.

Scanned with OKEN Scanner



(a)



(b)



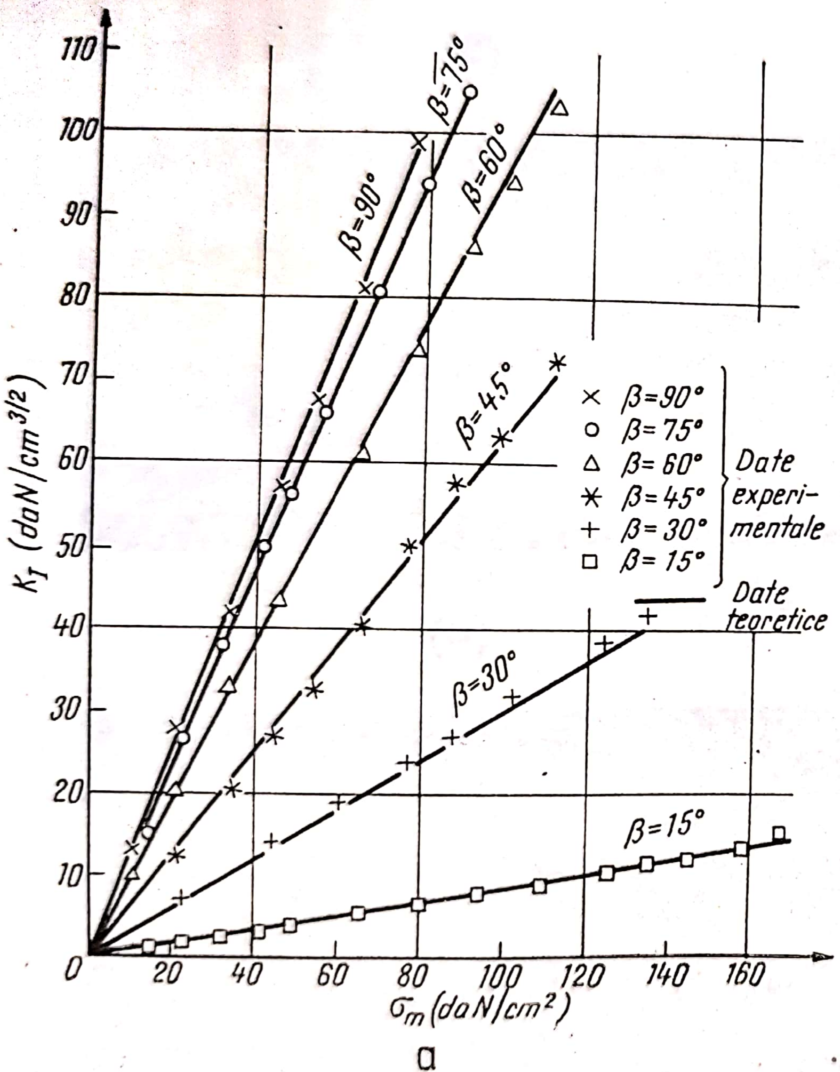
(c)



(d)

Fig. 6.16.

Scanned with OKEN Scanner



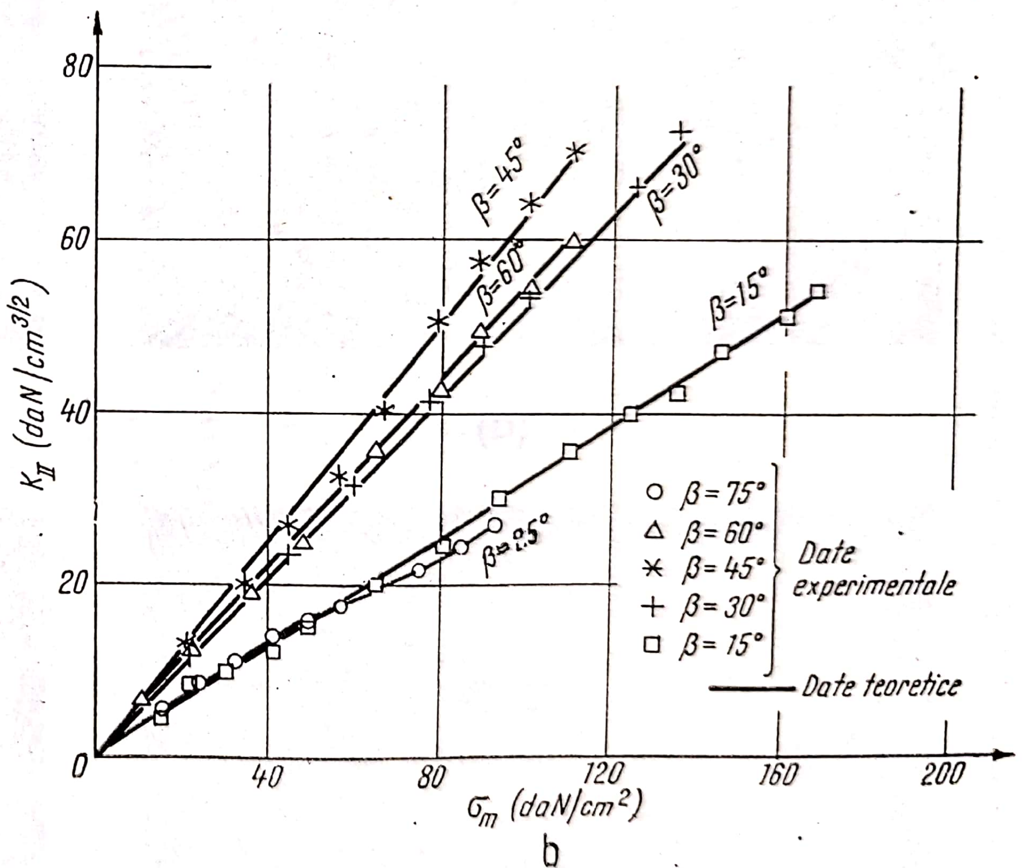


Fig. 6.17.

Scanned with OKEN Scanner

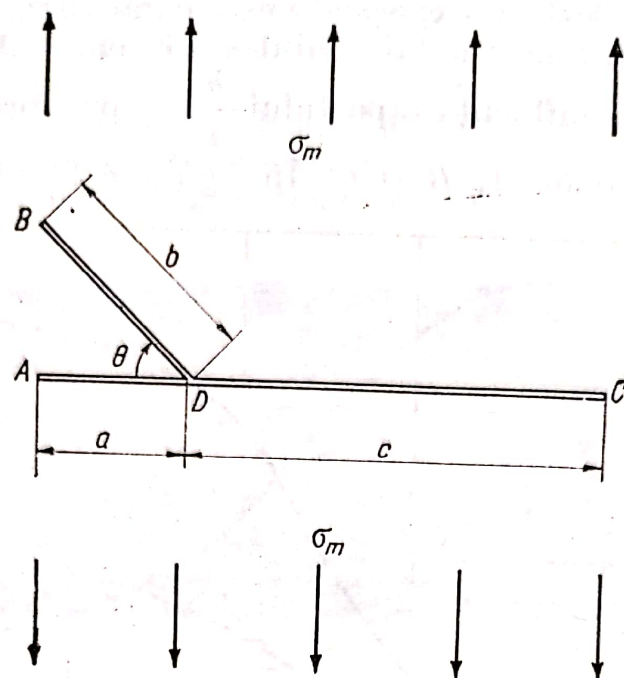
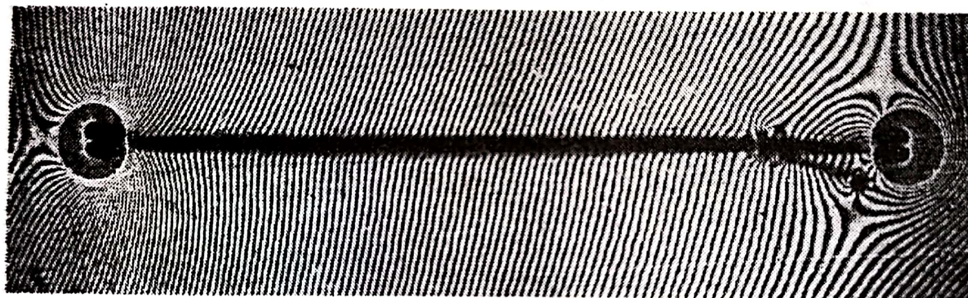
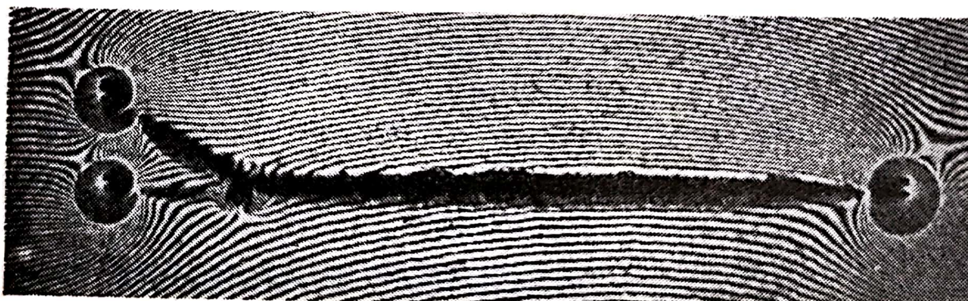


Fig. 6.18.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.19.

Sistemul optic folosit în experiențe este caracterizat de $\lambda = 2{,}7 \div 2{,}9$, care corespunde unei valori a lui z_0 între 130 cm și 180 cm. În figura 6.19 se poate observa influența raportului $\frac{b}{a}$ asupra formei și dimensiunilor causticelor punctelor A, B și C. În figura 6.20 variația rapoartelor

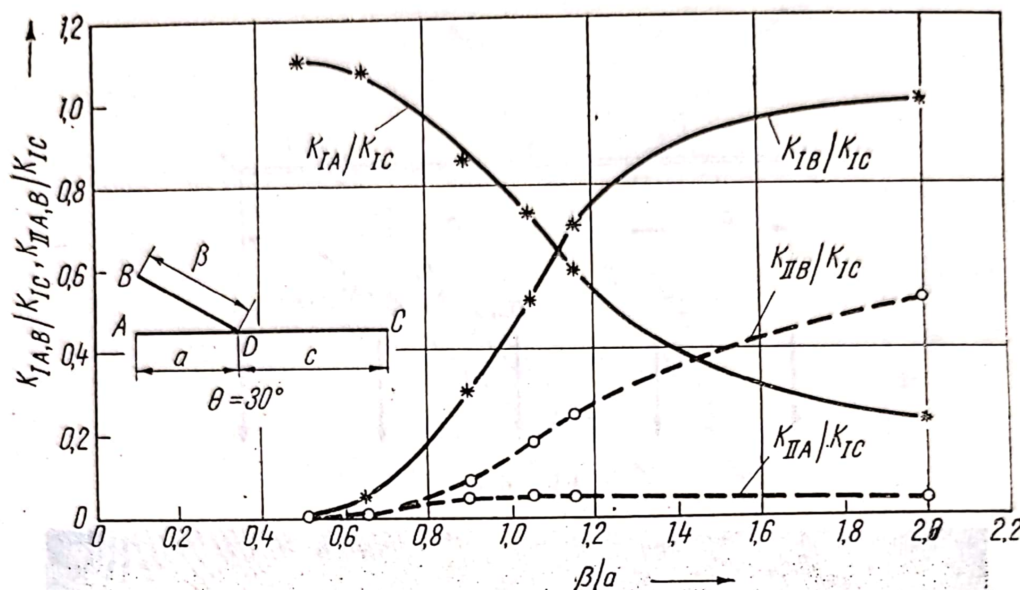


Fig. 6.20.

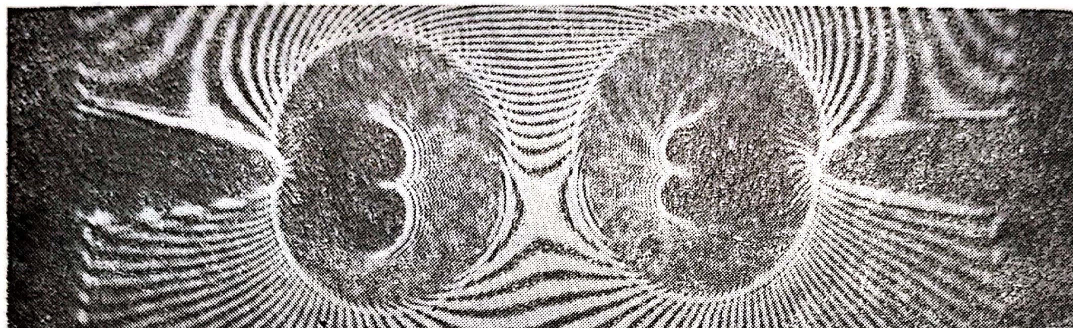
$K_{I,AB}/K_{IC}$ și $K_{IIA,B}/K_{IC}$ este reprezentată în raport cu parametrii $\frac{b}{a}$ și θ, folosind pentru calculul relațiile (6.95) pînă la (6.99). Rapoartele precedente nu sînt influențate de mărimile caracteristice ale experienței deoarece toate trei causticele depind în acelaș fel de aceste mărimi.

b) *Fisuri cu ramificații simetrice*. Într-un mod analog s-a tratat problema unei plăci cu o fisură transversală care se împarte în două ramificații simetrice [17]. Dimensiunile și caracteristicile epruvetelor și dispozitivului optic sînt următoarele: $c = 48$ mm; $d = 1{,}96 - 2{,}06$ mm; $b = 160$ mm; $z_0 = 111$ și 178 cm; $\lambda = 2{,}11$ și $5{,}51$; $\frac{b}{a} = 0{,}1 - 2{,}33$; $\frac{c}{a} = 4$; $\theta = 10°, 15°, 22°30', 30°, 45°, 60°$. În figurile 6 și 7 din lucrarea [17] sînt date interferograma și caustica obținute experimental, iar în figura 8 a aceluiași articol, diagramele variației rapoartelor K_{IA}/K_{IC} și K_{IIA}/K_{IC}, ca funcții de raportul $\frac{b}{a}$ și de unghiul θ.

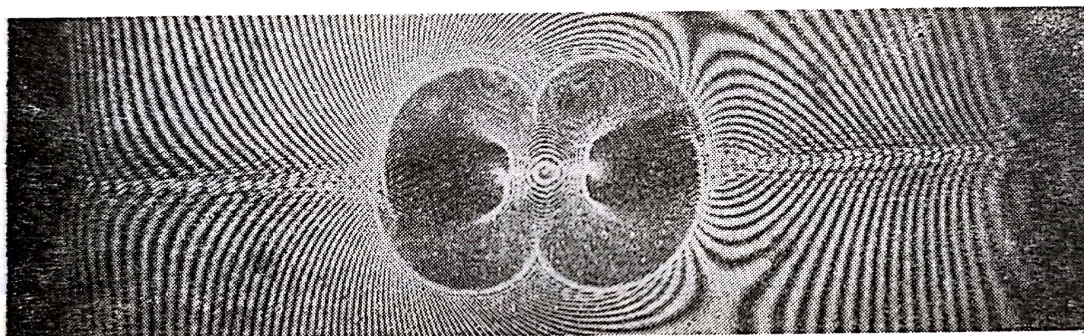
c) *Fisuri laterale*. S-au examinat benzi subțiri de plexiglas conținînd o fisură exterioară începînd de la una din marginile benzii, sau două fisuri exterioare simetrice și coliniare care au fost supuse la un efort de tracțiune aplicat la infinit. Causticele obținute experimental pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{a}$ (1, 1/2, 1/3, 1/4) sînt prezentate în figura 6.21. Figura

Scanned with OKEN Scanner

6 din lucrarea [10] arată variația coeficientului de concentrare K_I ca funcție de valoarea σ_m a tensiunii de tracțiune aplicată plăcii fisurate. În figura 6.22 se prezintă raportul K_I/σ_m în funcție de raportul $a/(a+b)$, așa cum a fost dat de Bowie și Niel [26] și cum a fost dedus de autor cu metoda causticelor. Se poate observa că pentru valori mici ale raportului b/a există o coincidență a rezultatelor celor două metode și că diferența



$\frac{b}{a} = 1$



$\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$

Fig. 6.21.

între cele două grupe de valori crește cu raportul b/a. Această diferență este datorată influenței unei ramuri asupra celeilalte care a fost bine pusă în evidență cu ajutorul metodei causticelor.

În sfîrșit, trebuie menționat că același studiu a fost efectuat pentru două fisuri exterioare asimetrice [16].

6.7.3. CAUSTICE FORMATE LA EXTREMITATEA FISURILOR DISPUSE PERIODIC ÎN SERII PARALELE

O analiză teoretică și experimentală [18] cu ajutorul metodei causticelor a arătat acțiunea reciprocă a fisurilor apropiate în ceea ce privește valoarea instantanee a coeficientului K de concentrare a tensiunilor la extremitățile unei fisuri. În figura 6.23 se arată geometria unei serii de fisuri coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

În acest studiu [18] forma funcţiei complexe $\Phi(z)$ a lui Muskhelishvili a fost dedusă pentru o serie de fisuri, arătate în figura 7.12 din lucrarea menţionată. Folosind expresiile (6.37) şi (6.38) s-au putut obţine ecua-

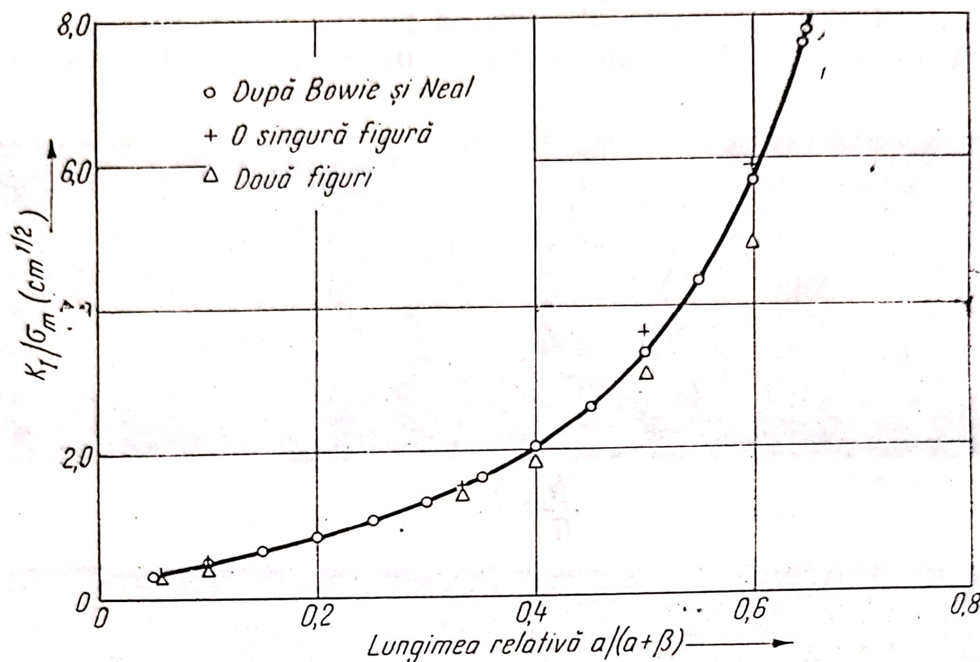


Fig. 6.22.

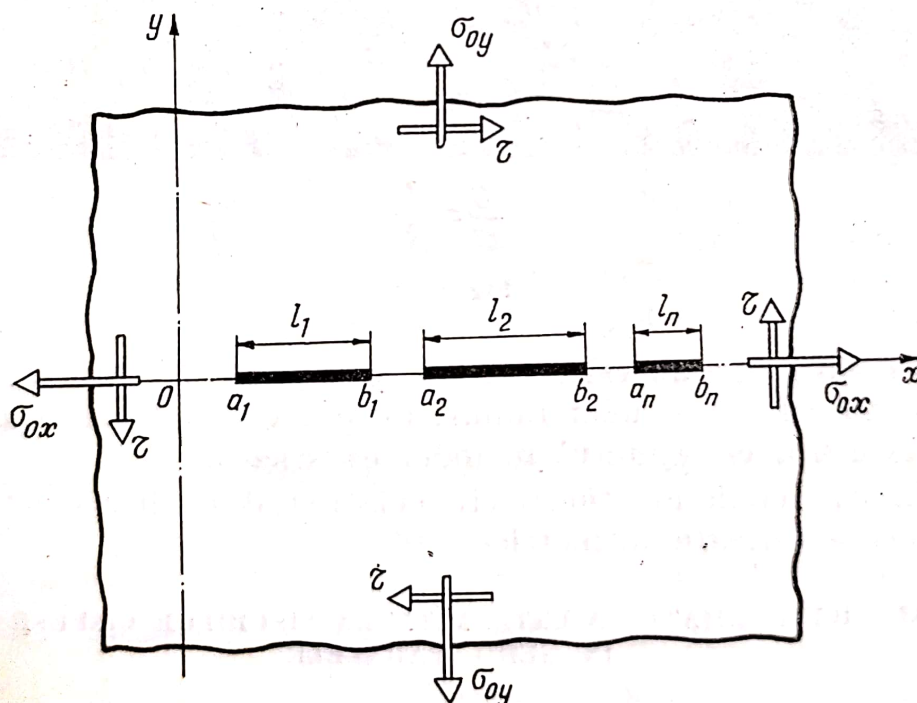
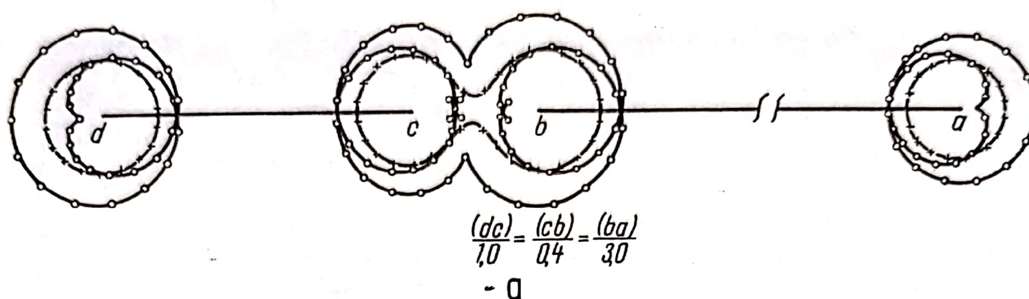


Fig. 6.23.

ţiile curbei iniţiale şi ale causticei pentru două fisuri transversale asimetrice situate în interiorul unei plăci (fig. 6.24, a) pentru diferite valori ale lungimii fisurilor (fig. 6.23). În figura 6.24 b, sînt prezentate interferograma şi causticele pentru cazul teoretic precedent. Se poate observa,

Scanned with OKEN Scanner

după analiza făcută în lucrarea [18], că influența unei fisuri asupra formei și dimensiunilor causticei generată de o fisură vecină, poate fi neglijată. Astfel, coeficientul de concentrare K poate fi determinat cu ajutorul metodei causticelor numai pentru o singură fisură.



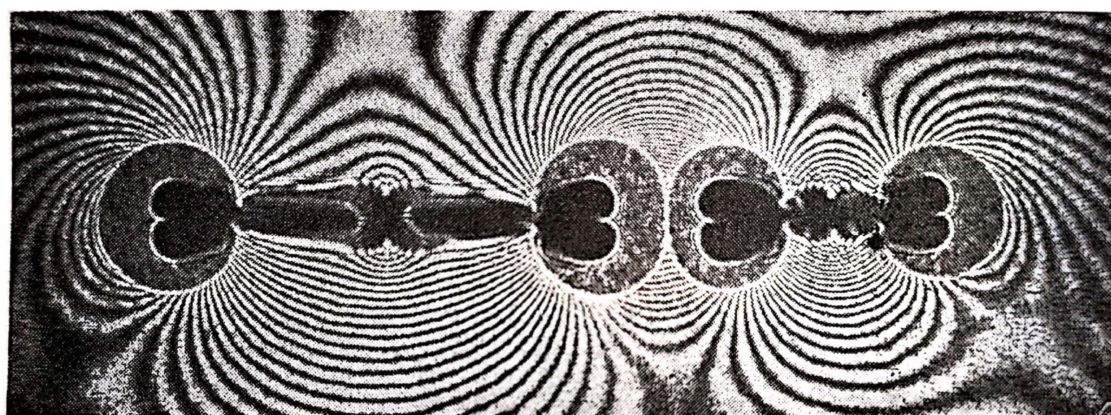


Fig. 6.24.

Metodologia precedentă este aplicată în lucrarea [9] pentru determinarea lui K într-o placă subțire, care conține două fisuri interioare, coliniare și simetrice față de centrul plăcii.

6.8. CAUSTICE CREATE DE SINGULARITĂȚI ALE FORȚELOR

6.8.1. SINGULARITĂȚI CREATE DE FORȚE CONCENTRATE

Singularitatea de ordinul n^{-1} creată în cîmpul tensiunilor sub acțiunea unei forțe concentrate, aplicată la marginea unui semiplan elastic, este transformată prin metoda causticelor într-o singularitate de natură optică. O forță concentrată produce într-un semiplan elastic (fig. 6.25) un cîmp al tensiunilor care este descris în lucrarea [14]

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi z}(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{6.99}$$

Cu ajutorul relaţiilor (6.37) şi (6.38) se obţine *curba iniţială*

$$\left|\frac{C^*P}{\pi}\cdot\frac{1}{z^3}\right| = 1$$

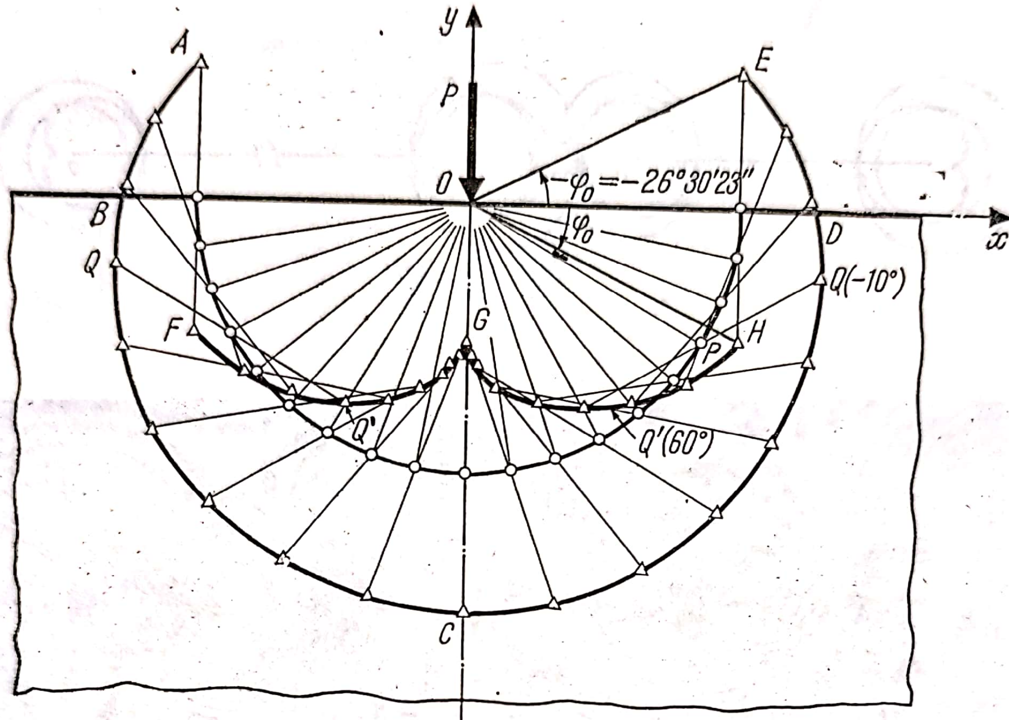


Fig. 6.25.

care, substituind $z = r_0 e^{i\theta}$, devine

$$r_0 = |z| = (C^*P/\pi)^{1/3} \tag{6.100}$$

unde $C^* = 4C/\lambda$. Ecuaţia causticei este

$$W = r_0 e^{-i\theta} - i\frac{C^*P}{2\pi r_0^2}e^{-i(2\theta+\varphi)} \tag{6.101}$$

care, în coordonate carteziene, dă următoarele două ecuaţii parametrice

$$\begin{aligned} x &= r_0\{\cos\theta \pm [\cos(2\theta+\varphi)]/2\} \\ y &= -r_0\{\sin\theta \pm [\sin(2\theta+\varphi)]/2\} \end{aligned} \tag{6.102}$$

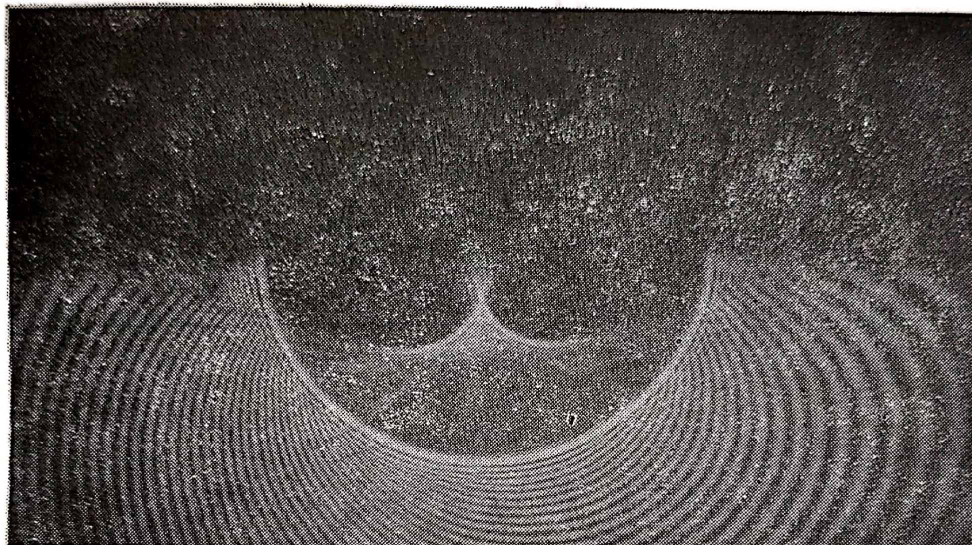
Ecuaţia (6.100) arată că curba iniţială este un cerc care nu depinde de unghiul φ al forţei, faţă de axa Ox. Punînd $\alpha = (\theta + \varphi - \pi/2)$ se obţin coordonatele causticei faţă de sistemul de axe $Ox'y'$ avînd axa Oy' în direcţia forţei

$$\begin{aligned} x' &= r_0\left(\cos\alpha \pm \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) \\ y' &= r_0\left(\sin\alpha \pm \frac{\cos 2\alpha}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.103}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul (6.103) arată că curba causticei este simetrică față de direcția forței (axa Oy'). În figura 6.11 se pot vedea causticele generate de cele două suprafețe ale unei plăci de plexiglas pentru $\varphi = 90°$.

Figura 6.26 prezintă causticele obținute experimental pentru un semiplan de plexiglas solicitat de o forță concentrată normală la margi-



a



b

Fig. 6.26.

nea sa (fig. 6.26, a) și de o forță oblică făcînd un unghi $\varphi = 30°$ cu marginea (fig. 6.26, b). În mod practic caustica este folosită pentru determinarea intensității și direcției forței P măsurînd diametrul causticei și unghiul de rotire a axei sale de simetrie față de axa de aplicație a forței la infinit.

Scanned with OKEN Scanner

6.8.2. SINGULARITĂŢI CREATE DE FORŢE DISTRIBUITE

În starea plană de tensiune care este creată într-un semiplan elastic de o forţă distribuită pe conturul său rectiliniu (fig. 6.27), discontinuităţile distribuţiei forţelor produc puncte singulare care pot fi studiate cu ajutorul metodei causticelor.

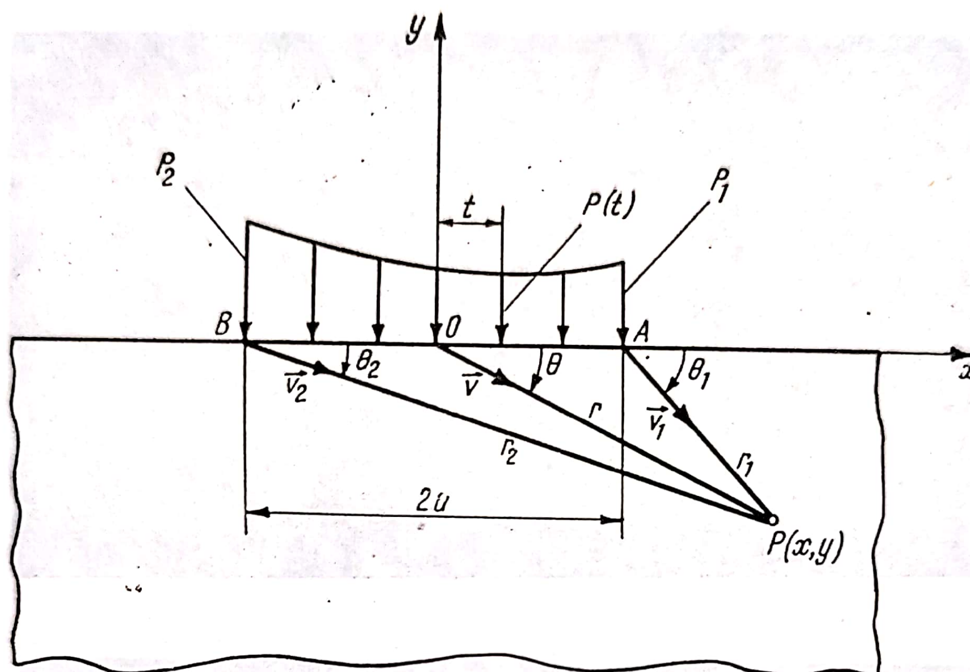


Fig. 6.27.

Starea de tensiuni într-un semiplan încărcat cu o distribuţie oarecare a forţelor normale de-a lungul unei părţi $2a$ din conturul său rectiliniu, este exprimată de funcţia complexă dată de [27]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{P(t)}{t-z}\,dt \qquad (6.104)$$

unde $t \in (-a, a)$ se găseşte pe marginea semiplanului (fig. 6.27).

Exprimînd legea distribuţiei forţei sub forma unei funcţii integrabile în sensul lui Cauchy, printr-un polinom de ordin m, rezultă

$$P(t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2 + \ldots + S_m t^m \qquad (6.105)$$

unde S_m sînt coeficienţi definiţi de forma distribuţiei şi valorile limită ale forţelor la extremităţile regiunii încărcate. În acest caz funcţia complexă $\Phi(z)$ poate fi exprimată după cum urmează

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{m+1} S_{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{z^{i-1}}{n-i}(a^{n-i} - (-a)^{n-i})\right] + z^{n-1}\ln\frac{z-a}{z+a}\right\} \qquad (6.106)$$

Introducînd relaţia (6.106) în sistemul (6.37) şi (6.38), se găsesc ecuaţiile causticelor şi ale curbelor iniţiale care se formează în jurul punctelor singulare A şi B (fig. 6.27).

În cazul simplu al unei distribuţii liniare a forţei (gradul polinomului (6.105) este $m = 1$) curba iniţială este reprezentată de un polinom de gradul 8

$$r_0^8 - 4r_0^6 \cos 2\theta + 2r_0^4(1 + 2\cos^2 2\theta) - r_0^2[4\cos 2\theta + (C^*)^2] + \\ + 2r_0 p(C^*)^2 \cos\theta - (C^*p)^2 + 1 = 0 \qquad (6.107)$$

unde $r_0 = r/a$, $C^* = \dfrac{8CS_0}{\pi\lambda a^2}$ şi $p = \dfrac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}$ (vezi fig. 6.27). (6.108)

Coordonatele carteziene normale $x_0 = x/a$ şi $y_0 = y/a$, ale unui punct al causticei în acelaşi caz al distribuţiei liniare a sarcinii sînt date de

$$x_0 = \lambda\left\{r_0\cos\theta - \frac{C^*}{2}\left[\frac{1}{r_{01}r_{02}}\sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{r_0 p}{r_{01}r_{02}}\sin(\theta - \theta_1 - \theta_2) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{p}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right]\right\}$$

(6.109)

$$y_0 = \lambda\left\{r_0\sin\theta + \frac{C^*}{2}\left[\frac{1}{r_{01}r_{02}}\cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{pr_0}{r_{01}r_{02}}\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{p}{2}\ln\frac{r_{01}}{r_{02}}\right]\right\}$$

unde $r_{01} = r_1/a$, $r_{02} = r_2/a$ şi θ, θ_1, θ_2, se exprimă în funcţie de r_0 şi θ cu ajutorul relaţiilor metrice din triunghiurile OAP şi OBP (fig. 6.27) iar r_0 este definit ca o funcţie de θ prin relaţia (6.106) a curbei iniţiale.

În lucrarea [29] se face o analiză completă a causticelor generate în jurul punctelor singulare A şi B (fig. 6.27) şi a variaţiei formei causticelor pentru cazuri limită cînd forţa distribuită tinde către o forţă concentrată sau către o distribuţie uniformă de-a lungul întregului contur.

Cu ajutorul elementelor causticei [29] se pot determina valorile forţelor P_1 şi P_2 în punctele singulare A şi B cu următoarea relaţie

$$P = \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2C\lambda} \qquad (6.110)$$

unde λ se exprimă prin relaţia (6.28), C prin (6.22) şi x_0, y_0 sînt coordonatele unui punct care aparţine causticei generate în jurul punctului considerat A, respectiv B.

În lucrarea [29] sînt determinate de asemenea limitele aplicațiilor metodei precedente cu ajutorul parametrilor C^* și p (relația 6.108).

S-a arătat că metoda determinării valorilor P_1 și P_2 este aplicabilă pentru $C^* < C^*_{cr}$, unde C^*_{cr} este o funcție de parametrul p, reprezentat grafic în figura 6.28. Pentru $P = 0$ (cazul unei forțe distribuite uniform, $P_1 = P_2$) se regăsesc rezultatele cunoscute din lucrarea [23].

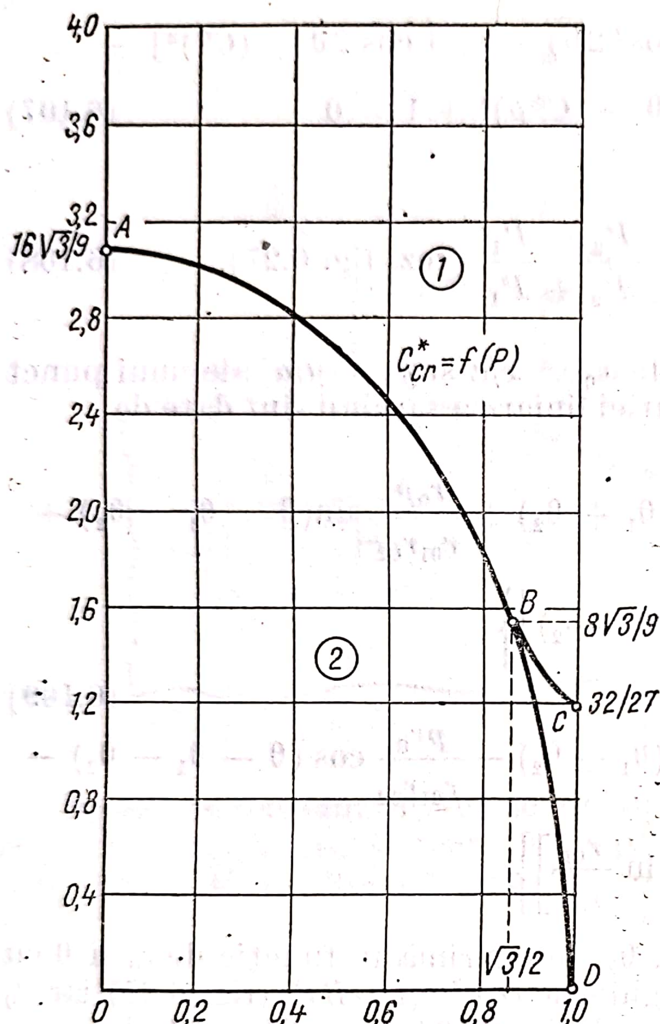


Fig. 6.28.

În figura 6.29,a sînt prezentate curbele inițiale (cu cruci) și causticele (cu cercuri) pentru cele două fețe ale plăcii (indicele r se referă la fața anterioară și f la fața posterioară a plăcii), în cazul unei distribuții uniforme a sarcinii [23] de-a lungul conturului plăcii. Figura 6.29, b reprezintă causticele corespunzătoare aceluiași caz de încărcare, obținute experimental. Se poate vedea că forma și dimensiunile causticelor dau toate informațiile esențiale pentru evaluarea singularităților produse de sarcină.

6.9. PSEUDOCAUSTICELE

Un studiu aprofundat [30] al deformației semiplanului sub acțiunea unei forțe oarecare pe conturul său, a arătat existența unei înfășurători a razelor reflectate de marginea unui semiplan elastic care există în afara causticelor formate în jurul punctelor singulare A și B (fig. 6.27) și care se numește pseudocaustică.

Într-adevăr, legea deviației pe ecran (fig. 6.2 și 6.3) a unei raze incidente într-un punct oarecare $P(x,y)$ al semiplanului (fig. 6.27), care se exprimă prin relația cunoscută (6.37), este dată de

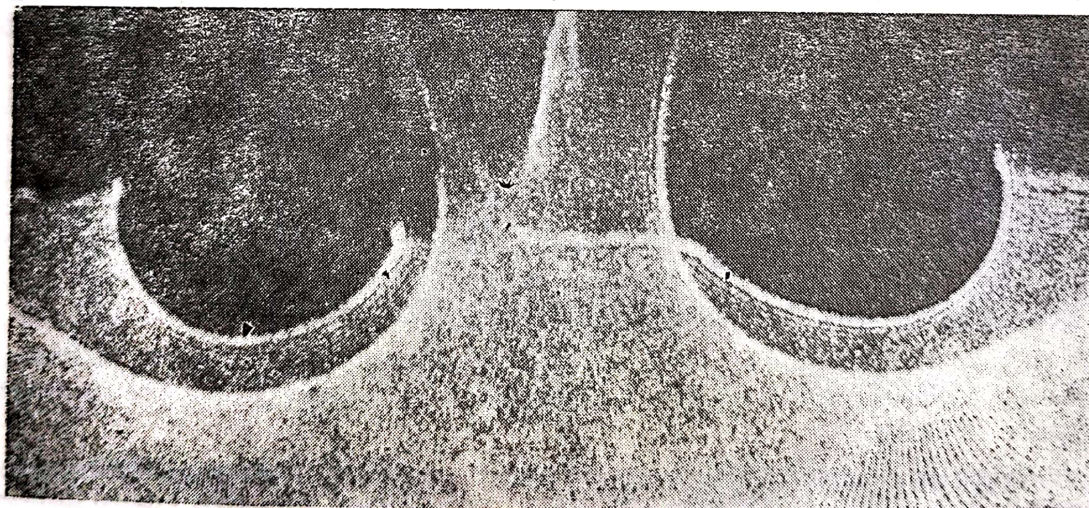
$$W = \lambda z + 4C\overline{\Phi}'(z) \qquad (6.111)$$

Această expresie dă caustica produsă de către marginea deformată, dacă z este înlocuit cu ζ, care reprezintă poziția unui punct de pe marginea deformată. Poziția punctului $P(\zeta)$ este dată de

$$\zeta = (z + u + iv) \qquad (6.112)$$

unde z reprezintă poziția inițială a punctului P pe marginea liberă și $(u + iv)$ sînt componentele deplasării aceluiași punct în timpul deformării conturului încărcat.





b

Fig. 6.29.

Relația $\zeta = \zeta(x, y)$ reprezintă ecuația curbei inițiale a pseudocausticei iar conturul deformat joacă rolul curbei inițiale a causticei generată de ea însăși.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul general al unei distribuţii oarecare (relaţia 6.105) a forţei normale pe un contur rectiliniu ($y = 0$, fig. 6.27), componentele u şi v se exprimă în modul următor [30]

$$u = 0$$

$$v = -\frac{1+k}{4\pi\mu}\sum_{n=1}^{m+1} S_{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{a^{n-i}-(-a)^{n-1}}{i(n-i)}\,x^{i}\right]+\frac{1}{n}\,x^{n}\ln\frac{x-a}{x+a}-\right.$$

$$-\frac{a^{n}}{n}\left[\ln(x-a)+(-1)^{n+1}\ln(x+a)\right]+ \qquad (6.113)$$

$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{n-k+1}a^{k-1}}{(n-k+1)}\left[(1-)^{2k-1}+(-1)^{k+1}\right]\right\}$$

unde k şi μ sînt binecunoscutele constante ale lui Lamé.

Ecuaţia pseudocausticei este dată în cazul menţionat de

$$W = \lambda\tau + 4C\overline{\Phi}'(\tau),$$

$$\zeta = x + iv(x), \qquad (6.114)$$

unde $v(x)$ este dat de relaţia (6.113).

S-a pus în evidenţă [30] că pseudocaustica este tangentă la curba causticei formată în jurul punctelor singulare. Cele două tipuri de curbe prezintă pe ecran o singură curbă continuă, la care punctele de inflexiune sînt chiar punctele de contact între cele două tipuri de curbe.

În figura 6.30, a sînt reprezentate curbele causticei generate în jurul punctelor singulare A şi B, şi ale pseudocausticei, care corespund celor două feţe laterale ale plăcii (indicele f este folosit pentru suprafaţa interioară şi r pentru suprafaţa posterioară a plăcii). În figura 6.30,b sînt prezentate causticele şi pseudocausticele obţinute experimental pentru acelaşi caz de încărcare.

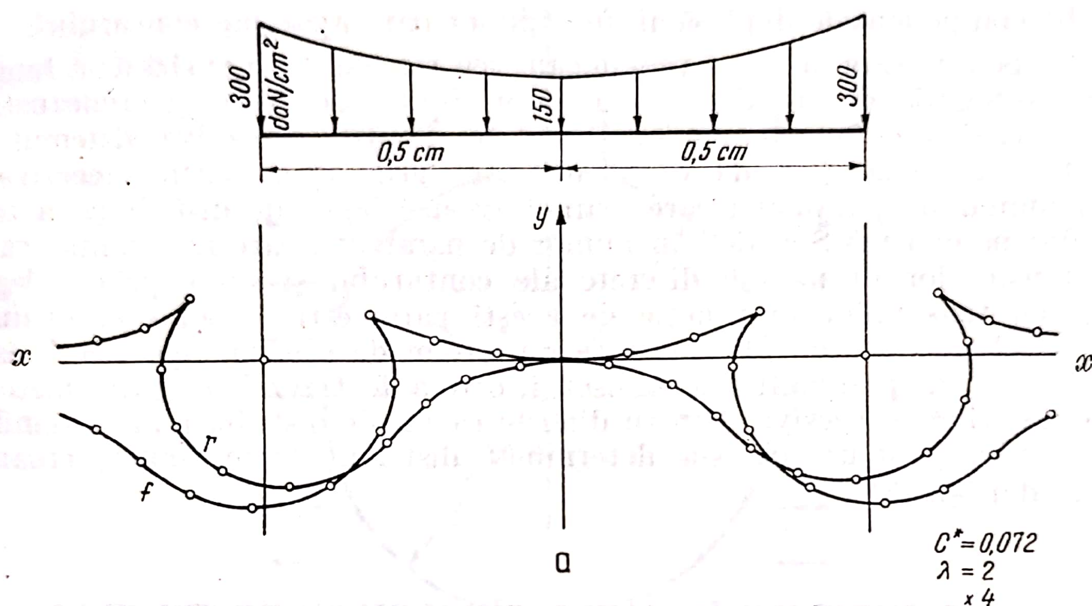
Porţiunea pseudocausticei cuprinsă între cele două caustice, reprezintă pe ecran, punct cu punct, imaginea părţii din marginea deformată a plăcii cuprinsă între regiunile foarte deformate din jurul punctelor singulare A şi B.

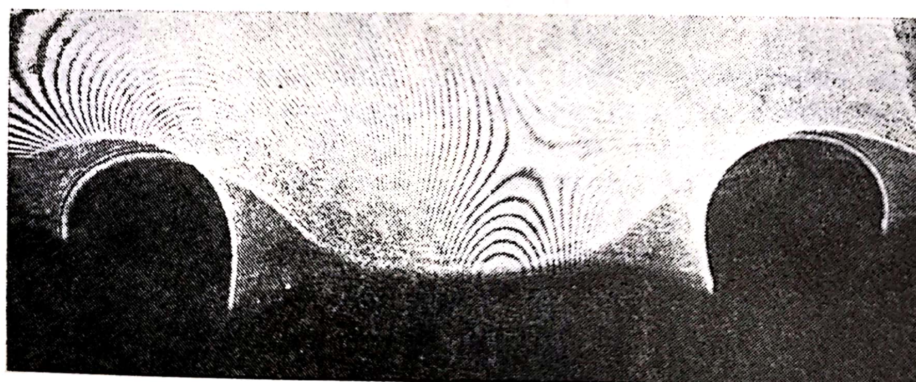
Existenţa pseudocausticei generată pe o suprafaţă oarecare a plăcii, corespunzînd părţii încărcate $A-B$ a conturului epruvetei, este determinată de forma causticelor în jurul punctelor singulare în felul următor: – dacă cele două caustice din jurul punctelor A şi B, generate de suprafaţa considerată, sînt separate în direcţia conturului (axa $x-x$, fig. 6.30) există pseudocaustice care corespund părţii de contur încărcat.

Condiţia separării causticelor pe ecran este exprimată teoretic cu ajutorul a doi parametrii C^* şi p ai diagramei din fig. 6.28 care trebuie să se afle în regiunea (2) a acestei diagrame [29].

Scanned with OKEN Scanner

Aşa cum a fost enunţat mai înainte, fiecare punct care aparţine conturului deformat are un singur punct corespunzător pe pseudo-caustică şi, prin urmare, pseudocaustica dă informaţii preţioase, atît calitative cît şi cantitative pentru deformaţiile conturului. În cazul general al unei distribuţii arbitrare a forţei normale, exprimată prin legea $P = P(t)$,





b

Fig. 6.30.

pe marginea rectilinie a semiplanului elastic, ecuaţiile pseudocausticei au următoarea formă

$$W = \lambda\tau + \frac{2Ci}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{P(t)}{(t-\bar{\tau})^2}\,\mathrm{d}t \tag{6.114}$$

$$\tau = x + \frac{1}{2\mu}\left\{\frac{k+1}{2\pi i}\int_{0}^{x}\left[\int_{-a}^{a}\frac{P(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right\}. \tag{6.115}$$

Bazîndu-se pe ecuaţiile pseudocausticei (6.114) şi (6.115) se poate stabili o metodă de determinare a legii de distribuţie a forţelor pe marginea semiplanului. Ecuaţiile pseudocausticei de mai sus reprezintă un sistem de ecuaţii integrale de tip Cauchy în funcţie de următoarele necunoscute:

a) funcţia care descrie distribuţia tensiunilor pe conturul semiplanului;

b) componentele deplasării unui punct care aparţine conturului.

Se poate arăta la fel că pseudocaustica reprezintă o curbă de-a lungul căreia integrala de tip Cauchy ia valori finite, deoarece pseudocaustica se formează în afara punctelor singulare. Pentru a rezolva sistemul de ecuaţii s-a folosit metoda de identificare prin aproximaţii succesive a unui număr de parametri care caracterizează legea de distribuţie a tensiunilor pe contur. S-a ales un număr de parametri care reprezintă valorile tensiunilor în puncte discrete ale conturului şi s-a exprimat legea variaţiei tensiunilor în funcţie de aceşti parametri. Apoi s-au evaluat integralele sistemului, obţinîndu-se un sistem de ecuaţii algebrice liniare în funcţie de parametrii necunoscuţi, care a fost rezolvat prin metoda aproximaţiilor succesive. Pentru diferite cazuri de distribuţii ale sarcinilor pe contur, pentru care s-a determinat distribuţia tensiunilor, eroarea nu a depăşit 3%.

6.10. CAUSTICELE ÎN CAZUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI NESINGULARE

Metoda causticelor a fost folosită pînă acum la studiul regiunilor puternic deformate în jurul punctelor singulare. În orice caz, se pot, de asemenea, obţine caustice în toate condiţiile existenţei unui cîmp de eforturi plan nesingular. Suprafaţa deformată a plăcii supuse acţiunii unei forţe oarecare prezintă o variaţie a pantei, care produce prin reflexia luminii pe ecran, o caustică, dacă este îndeplinită condiţia (6.30).

Acesta este, de exemplu, cazul unei plăci infinite conţinînd o gaură circulară [13], care este supusă la o stare plană de tensiune cu σ_1 şi σ_2 aplicate la infinit (fig. 6.31).

Dacă raza găurii este R, funcţia variabilei complexe $z = (x + iy)$, care exprimă starea de tensiune în placă este dată de Muskhelishvili [27] sub forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) + R^2(\sigma_1 - \sigma_2)/2z^2. \qquad (6.116)$$

Introducînd primele două derivate ale funcţiei în relaţiile (6.37) şi (6.38), corespunzînd curbei iniţiale şi causticei sale, se obţine ecuaţia curbei iniţiale

$$r = r_0 = (12CR^2|\sigma_1 - \sigma_2|)^{1/4}. \qquad (6.117)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația causticei generate de regiunea deformată în jurul orificiului este

$$W = z + 4CR^2[(\sigma_2 - \sigma_1)/\bar{z}^3] \tag{6.118}$$

unde C ia una dintre valorile date de relațiile (6.22).

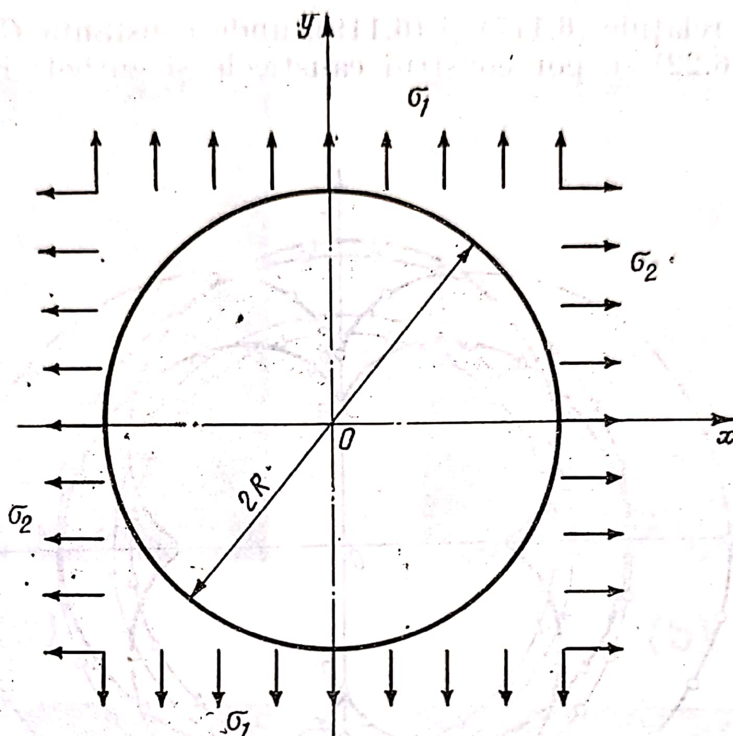


Fig. 6.31.

Coordonatele unui punct al causticei se obțin proiectînd ecuația (6.118) pe axele Ox și Oy (fig. 6.31)

$$x = r_0\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right)$$
$$y = r_0\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta\right). \tag{6.119}$$

Relațiile (6.119) arată că toate ramurile causticelor sînt curbe asemănătoare. O analiză amănunțită [13] arată că față de origine, caustica este simetrică și, în plus, este o curbă continuă și închisă. Curba inițială este un cerc a cărui rază depinde de constanta C, de raza găurii R și de diferența tensiunilor σ_1 și σ_2 considerate aplicate la infinit. Relațiile (6.119) dau

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \rho = \frac{r_0}{3}(10 + 6\cos 2\theta)^{1/2} \tag{6.120}$$

de unde se obține

$$\rho_{max} = 4r_0/3, \text{ pentru } \theta = 0 \text{ sau } \theta = \pi \tag{6.121}$$

$$\rho_{min} = 2r_0/3, \text{ pentru } \theta = \pi/2 \text{ sau } \theta = 3\pi/2. \tag{6.122}$$

Folosind relațiile (6.117) și (6.119), unde constanta C este exprimată prin relația (6.22) se pot construi causticele și curbele inițiale pentru o

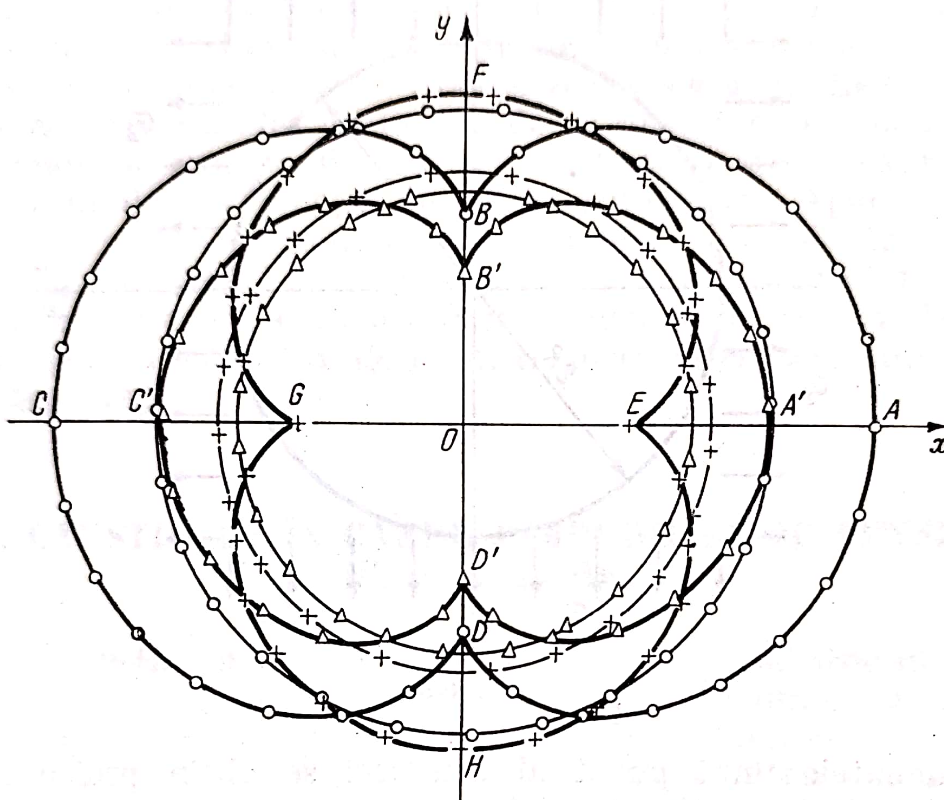


Fig. 6.32.

placă de plexiglas. Cele trei curbe inițiale și causticele corespunzătoare, pentru o placă de plexiglas cu o gaură centrală, sînt prezentate în fig. 6.32.

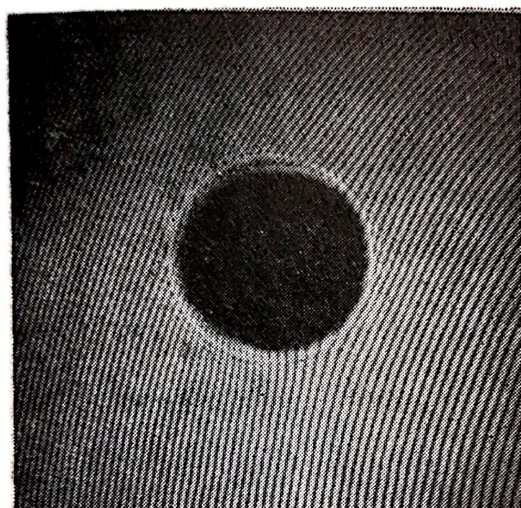
Din ecuația (6.121) se obține diametrul maxim al causticei

$$D_{max} = \frac{8}{3} (12|C|\lambda^3 R^2 |\sigma_1 - \sigma_2|)^{1/4} \tag{6.123}$$

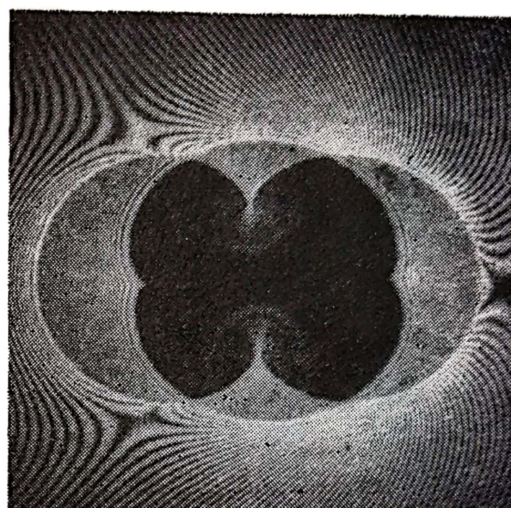
unde λ este factorul de mărire al sistemului optic. În figura 6.33 sînt prezentate interferograma și caustica generată în cazul unei plăci avînd o gaură circulară centrală care este supusă unei perechi de forțe P_1 și P_2 perpendiculare între ele (cazul a, $P_1 = P_2 = 0$; cazul b, $P_1 = 0$; cazul c, $P_1 = P_2$ și cazul d, $P_2 = 0$). Se poate observa că orientarea diametrelor

principale ale causticelor indică direcţiile tensiunilor principale. În plus, diferenţa tensiunilor principale poate fi obţinută prin relaţia (6.123)

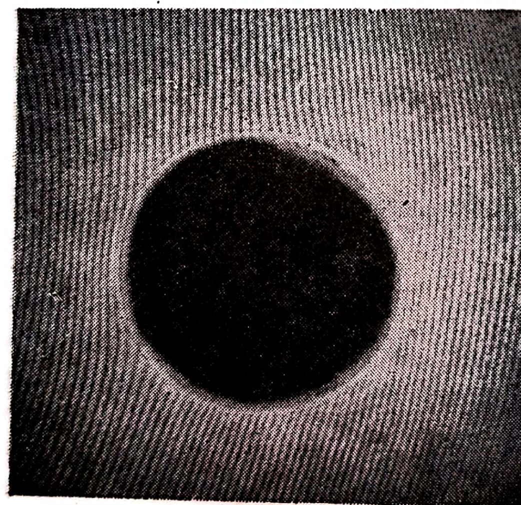
$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \left(\frac{3}{4\lambda}\right)^3 \left(\frac{D_{max}}{4\sqrt{R}}\right)^4 \left(\frac{1}{|C|}\right). \qquad (6.124)$$



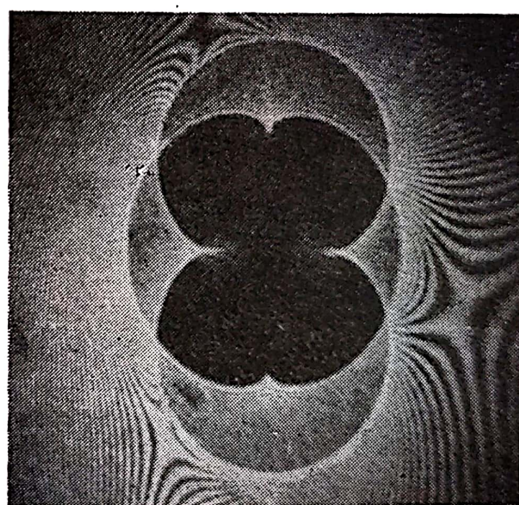
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6.33.

Astfel, se pot folosi, în aplicaţii, proprietăţile causticelor în jurul unui orificiu de un diametru infinitesimal pentru determinarea direcţiilor tensiunilor principale precum şi diferenţa valorilor acestor tensiuni. În figura 6.34 se poate observa orientarea tensiunilor principale cu ajutorul unei serii de mici perforaţii circulare într-o placă avînd un orificiu central,

Scanned with OKEN Scanner

solicitată la tracțiune monoaxială. Micile perforații joacă rolul rozetelor optice bazate pe metoda causticelor care dau direcțiile principale și dife-

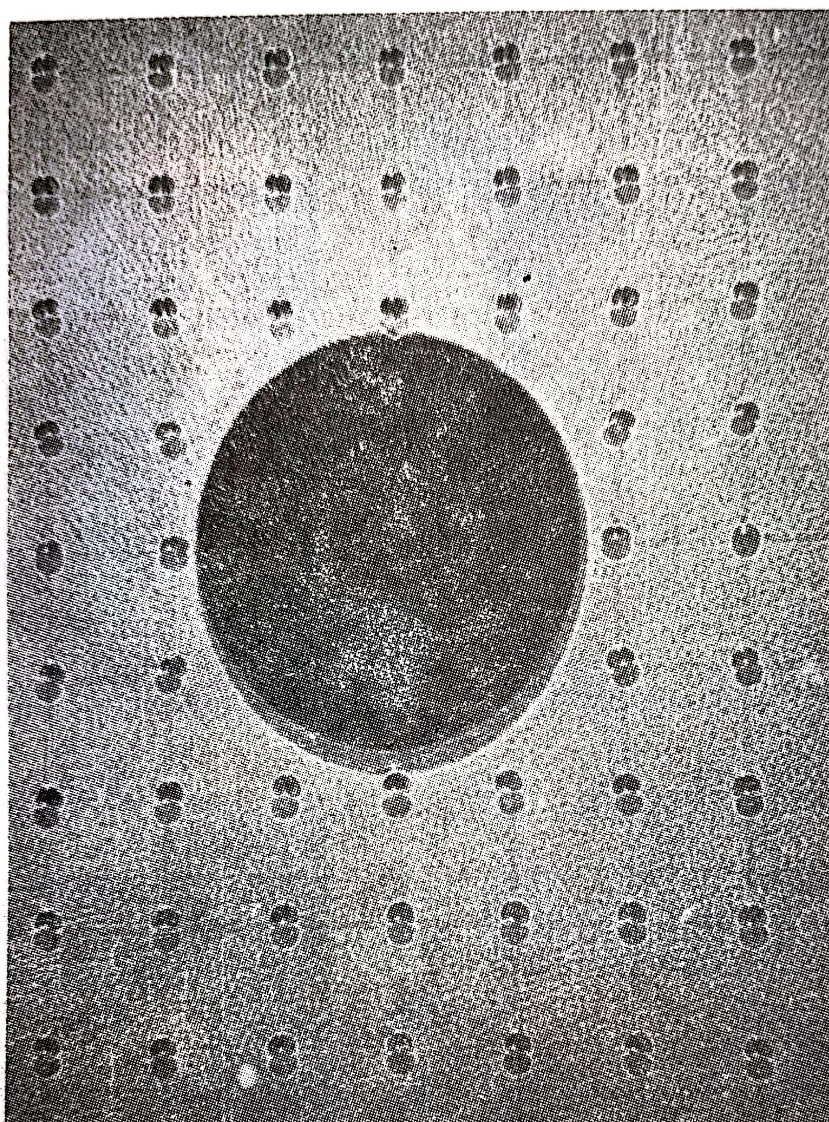


Fig. 6.34.

rența tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ în cîmpul de tensiuni. Această rozetă optică este un mijloc experimental care indică direcțiile principale într-un cîmp de tensiuni în domeniul elastic.

6.11. APLICAȚII ALE CAUSTICELOR ÎN PLASTICITATE

6.11.1. CAUSTICELE PENTRU MODELUL DUGDALE – BARENBLATT

În acest paragraf se extinde teoria dezvoltată pentru cazul solicitărilor elastice, la cazul unui material prezentînd o curgere plastică în vecinătatea extremității fisurii. În cazul în care o zonă plastică se desfășoară în jurul vîrfului fisurii, problema elasto-plastică nu are o soluție riguroasă. În orice caz problema poate fi reprezentată, aproximativ, prin modelul forței

coezive a lui Dugdale — Barenblatt în cazul în care curba caracteristică a materialului seamănă cu aceea a unui material perfect plastic.

Se consideră o placă subţire dintr-un material elasto-plastic perfect, care conţine o fisură trnsversală de lungime $2a$ (fig. 6.35), supusă

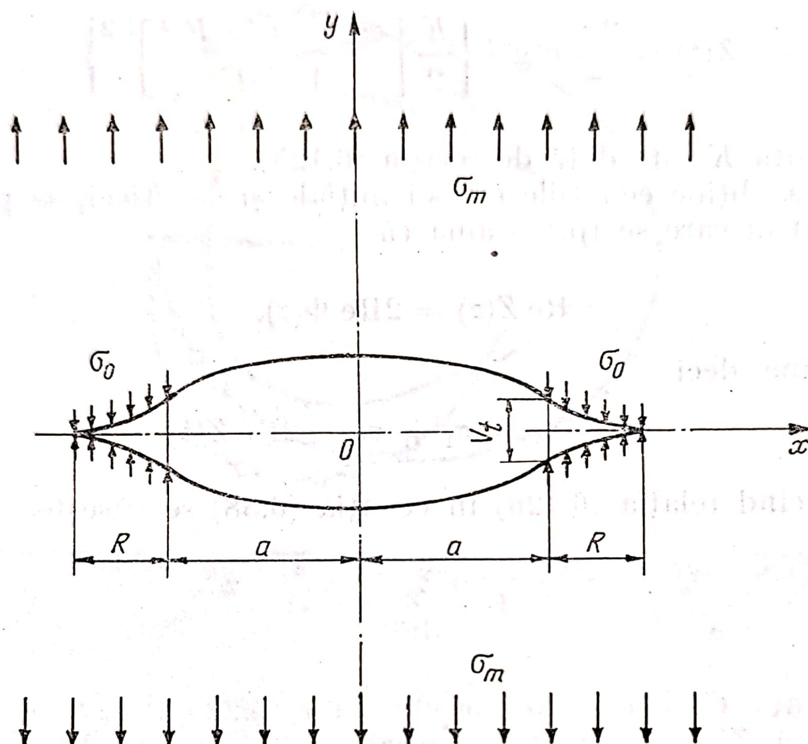


Fig. 6.35.

acţiunii unui cîmp de tensiuni aplicat la infinit, caracterizat de tensiunile σ_{ox} şi σ_{oy}.

Se alege un sistem de axe xOy în aşa fel încît direcţia axei Ox să coincidă cu direcţia fisurii (fig. 6.35). Dacă placa este solicitată pînă la apariţia unei curgeri plastice, aceasta va avea loc într-o zonă situată în jurul vîrfului fisurii. Modelul lui Dugdale-Barenblatt introduce efectul curgerii plastice considerînd o lungime a fisurii mărită cu raza zonei plastice R, care se produce în jurul vîrfului fisurii. De-a lungul fisurii considerate, întinsă pe o lungime $2(a + R)$, acţionează forţe coezive, care se opun extinderii fisurii. Forţa aplicată şi forţa coezivă produc singularităţi de ordin invers proporţional cu rădăcina pătrată a distanţei. Aceste singularităţi sînt de semn contrar şi au tendinţa de a limita valorile tensiunilor în vecinătatea fisurii.

Pentru un material elasto-plastic perfect această limită este limita de curgere la tracţiune simplă σ_c. Punînd condiţia că tensiunile la extremitatea fisurii trebuie să fie finite, rezultă

$$K = \frac{a}{a + R} = \cos \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_c} \qquad (6.125)$$

de unde se poate calcula valoarea razei plastice R, în funcție de lungimea $2a$ a fisurii, de tensiunea σ_m aplicată la infinit și de limita de curgere plastică, la tracțiune simplă, σ_c. Starea de tensiune într-o placă este definită de funcția complexă a lui Westergaard [28]

$$Z(z) = \frac{2\sigma_c}{\pi} \operatorname{ctg}^{-1} \left\{ \frac{K}{2} \left[\frac{z^2 - (a+R)^2}{1 - K^2} \right]^{1/2} \right\} \tag{6.126}$$

unde constanta K este dată de relația (6.125).

Pentru a obține ecuațiile curbei inițiale și causticei, se pleacă de la relația (6.35) în care se ține seama că

$$\operatorname{Re} Z(z) = 2\operatorname{Re} \Phi(z). \tag{6.127}$$

Se obține deci

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\operatorname{Re} Z(z) \tag{6.128}$$

Introducînd relația (6.126) în ecuația (6.38) se găsește

$$2 \left| C \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right| = 1 \tag{6.129}$$

unde constanta C se exprimă prin relația (6.22 c). Calculînd cea de-a doua derivată $Z''(z)$ a funcției complexe $Z(z)$ și introducînd în relația (6.129) se obține ecuația curbei inițiale sub forma

$$\left| \frac{4\sigma_c C}{\pi} \cdot \frac{(1-K^2)^{1/2}}{K} (a+R)^2 z \left[z^2 - (a+R)^2\right]^{-3/2} \left[\left(\frac{z}{K} \right)^2 - (a+R)^2 \right]^{-2} \cdot \left[3 \left(\frac{z}{K} \right)^2 - \left(1 + \frac{2}{K^2} \right) (a+R)^2 \right] \right| = 1 \tag{6.130}$$

Folosind relațiile (6.127) și (6.36) se obține ecuația causticei

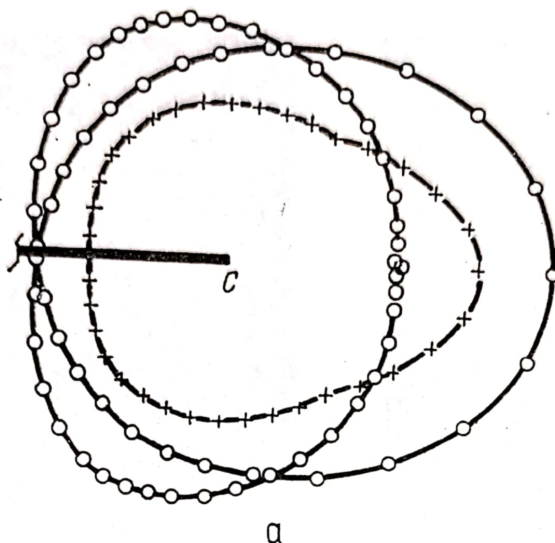
$$W = \left[z - \frac{2 z_0 d \nu}{E} \bar{Z}'(z) \right] \tag{6.131}$$

și în sfîrșit, introducînd în această relație prima derivată $Z'(z)$, se obține

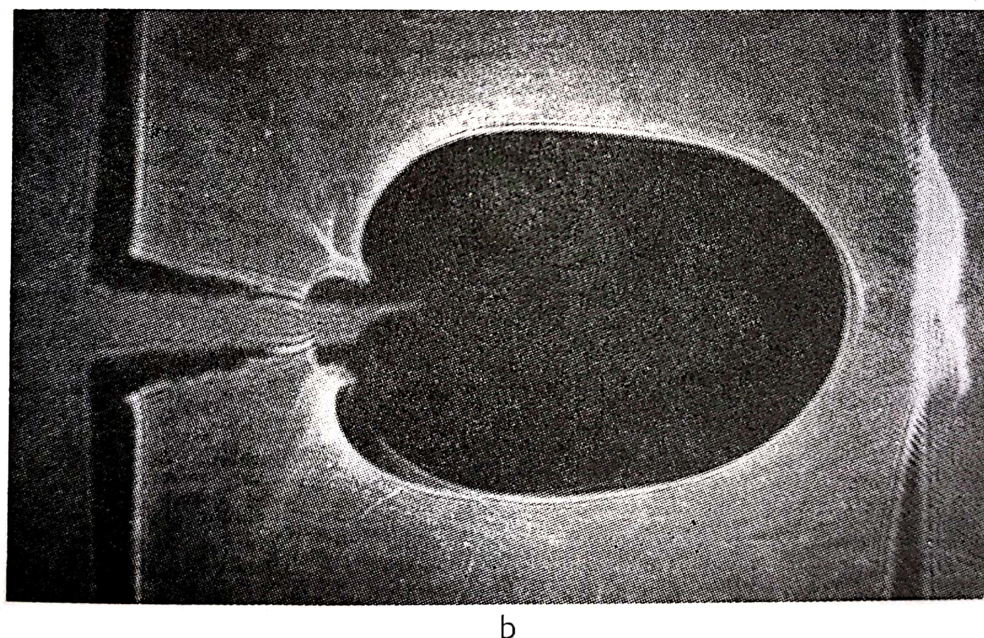
$$W = z + \frac{4\sigma_c C}{\pi} \cdot \frac{(1-K^2)^{1/2}}{K} \cdot \frac{(a+R)^2}{\left(\frac{\bar{z}}{K} \right)^2 - (a+R)^2} \cdot \frac{1}{\left[\bar{z}^2 - (a+R)^2\right]^{1/2}}. \tag{6.132}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile (6.130) și (6.132) determină forma și dimensiunile causticelor la extremitatea fisurii, cu condiția valabilității modelului Dugdale-Barenblatt. Figura 6.36, a prezintă curba inițială teoretică (marcată prin cruci) și caustica (marcată prin cercuri), pentru o fisură exterioară creată într-o



a



b

Fig. 6.36.

placă de plexiglas în cazul în care raportul dintre tensiunea aplicată σ_m și limita de curgere plastică la tracțiune simplă σ_c este $\sigma_m/\sigma_c = 1{,}6$, iar figura 6.36, b reprezintă causticele obținute experimental pentru același caz. În figura 6.36, c se pot vedea în plus, causticele generate într-o placă de oțel fisurată (DIN St 45) [20], solicitată la tracțiunea monoaxială. Cele patru fotografii ale acestei figuri arată clar etapele de dezvoltare ale zonei plastice care corespund modelului simplu al lui Dugdale-Barenblatt.

Scanned with OKEN Scanner

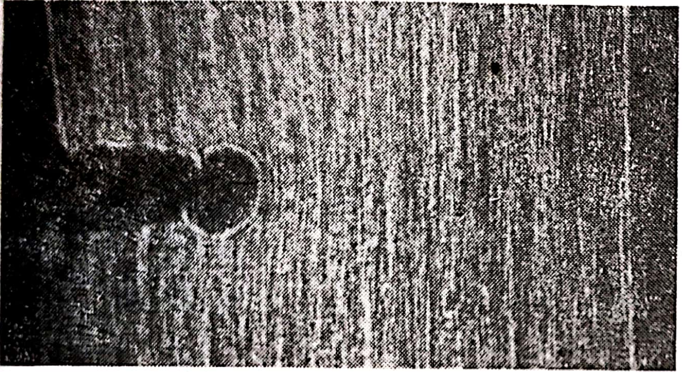
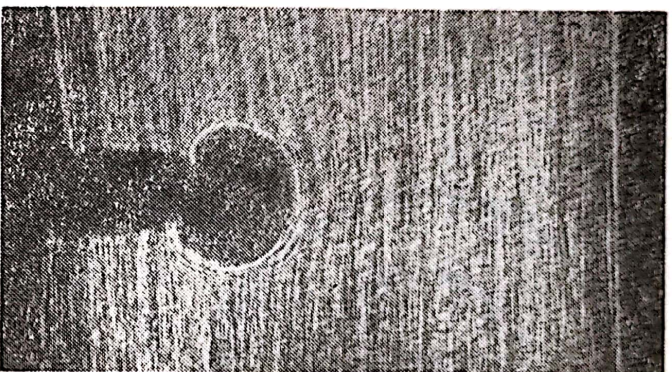
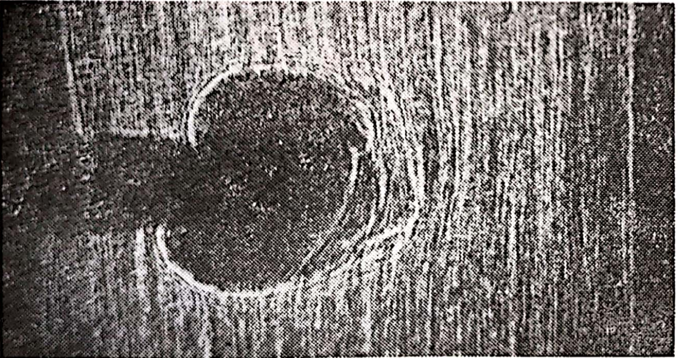
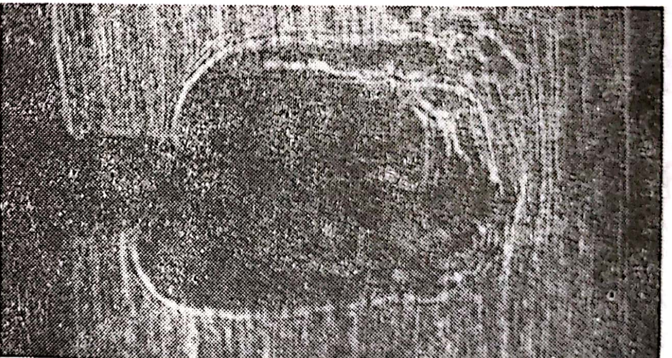





Fig. 6.36 c.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul causticei obţinute experimental se pot determina dimensiunile zonei plastice şi mai ales raza sa notată cu R. Cu ajutorul relaţiei (6.130) notînd $z' = (z - a)$, se obţine

$$\frac{2C\sigma_c}{\lambda_m a^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K}{(1-K^2)^{1/2}} \left| \left(\frac{z}{a}\right)^{-1} \left(\frac{a}{a+R}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \left(\frac{a+R}{a}\right)^2\right]^{3/2} \left[\left(\frac{z}{Ka}\right)^2 - \left(\frac{a+R}{a}\right)^2\right]^2 \times \left\{3\left(\frac{z}{Ka}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{K^2}\right)\left(\frac{a+R}{a}\right)^2\right\}^{-1} \right|. \tag{6.133}$$

Această expresie reprezintă o relaţie între mărimile normate $2C\sigma_c/\sigma_m a^2$, z/a şi $a/(a+R)$ (sau σ/σ_c). Dacă în relaţia (6.132) se consideră $\theta = 0$, $\Phi = 0$, $z' = x' = r$, $y' = 0$, se obţine

$$\frac{\delta}{\lambda_m \alpha} = \frac{r}{a} + \frac{2C\sigma_c}{\lambda_m a^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1-K^2)^{1/2}}{K} \left(\frac{a+R}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{Ka}\right)^2 - \left(\frac{a+R}{a}\right)^2\right] \left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \left(\frac{a+R}{a}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{6.134}$$

unde δ reprezintă lungimea causticei de-a lungul direcţiei axei Ox.

În figura 6.37 sînt trasate diagramele care arată variaţia mărimii $2C\sigma_c/\lambda_m a^2$ în funcţie de $\delta/\lambda_m a$ pentru diferite valori ale raportului $a/(a+R)$ (linii continue) şi pentru diferite valori ale lui z/a (linii întrerupte), pentru valorile particulare $a = \pi/4$, $C = 1$, $\sigma = 0{,}5$. Măsurînd pe figură lungimea δ a causticei după direcţia axei Ox şi cunoscînd proprietăţile materialului, se poate deduce valoarea razei R din figura 6.37.

În lucrarea [21] s-a dezvoltat o analiză amănunţită a valabilităţii modelului lui Dugdale-Barenblatt cu ajutorul metode icausticelor pentru a rezolva problemele elasto-plastice în plăci fisurate din oţel. S-a tras concluzia în acest studiu că aplicarea modelului simplu depinde de limita superioară şi inferioară de curgere a materialului ca şi de existenţa fenomenului de ecruisare în timpul curgerii. În studiul [22] s-a extins modelul simplu al lui Dugdale-Barenblatt cu scopul de a se include influenţa ecruisajului asupra dezvoltării locaşurilor plastice la extremităţile fisurii într-o placă solicitată la tracţiune la infinit. În timp ce în modelul simplu al lui Dugdale-Barenblatt, distribuţia tensiunilor în zona plastică, în amonte de fisură, este considerată ca fiind constantă şi egală cu limita de curgere, în versiunea sa modificată s-a considerat că această distribuţie este variabilă între o valoare minimă egală cu limita de curgere σ_c şi o valoare maximă σ_{max}, care depinde de nivelul sarcinii exterioare şi de gradul de ecruisare al materialului.

Scanned with OKEN Scanner

S-au considerat în acest studiu şase configuraţii diferite pentru distribuţia tensiunilor în zona plastică, cu diferite valori ale raportului σ_{max}/σ_c. Pentru fiecare dintre aceste configuraţii şi pentru diferite nivele de încărcare exterioară, forma causticei corespunzînd singularităţii în vecinătatea vîrfului fisurii a fost calculată adaptînd, într-un fel apropriat teoria lui Dugdale-Barenblatt la fiecare dintre aceste şase configuraţii. De altfel

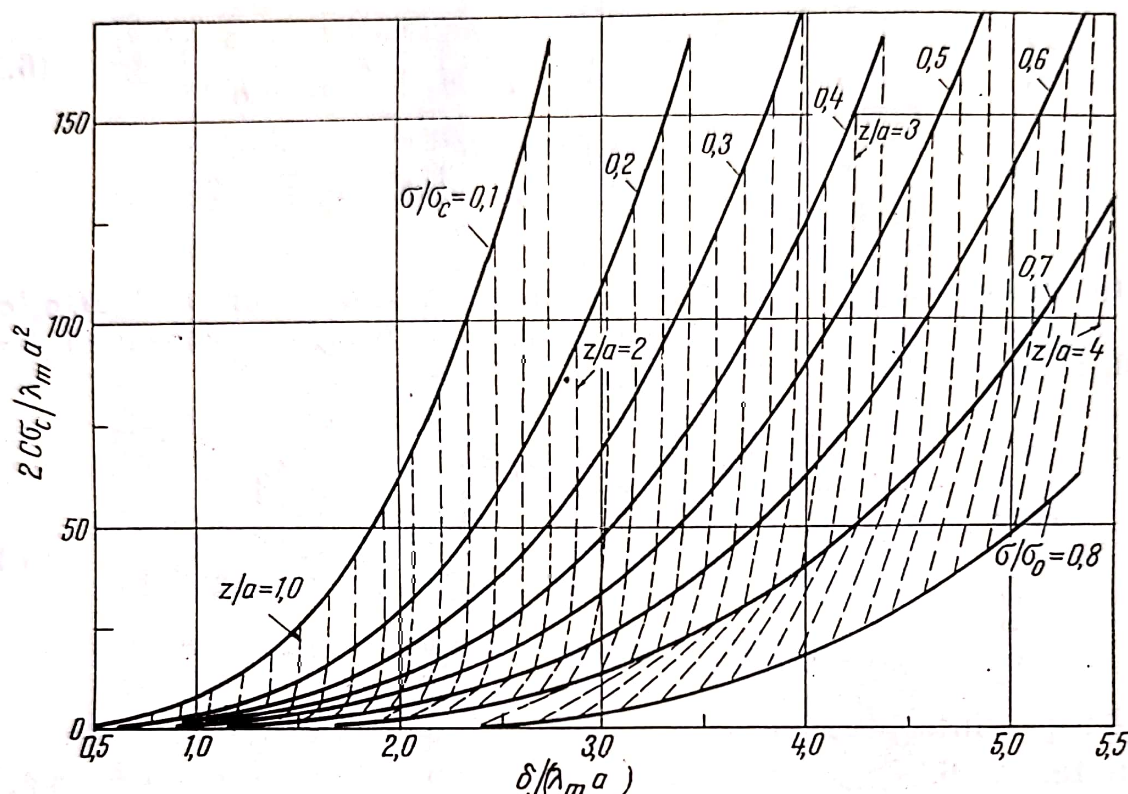


Fig. 6.37.

causticele pentru diferitele cazuri studiate au fost stabilite experimental prin reflexii ale razelor unui fascicul luminos paralel şi coerent în vecinătatea vîrfului fisurii. Au fost examinate trei tipuri diferite de oţeluri avînd diferite sarcini de tracţiune simplă, ca şi la diferite grade de ecruisare. Comparînd formele causticelor obţinute pe cale teoretică cu acelea obţinute pe cale experimentală pentru aceleaşi nivele de sarcină exterioară s-a putut adapta modelul Dugdale-Barenblatt pentru fiecare caz din materialele considerate, în vederea sublinierii influenţei ecruisajului asupra modului de rupere a fiecăruia dintre acestea şi pentru a indica legea de distribuţie a tensiunilor în zona plastică, în timp ce sarcina exterioară creşte şi deformaţiile plastice suplimentare din epruvetă se dezvoltă.

6.11.2. DEFORMAŢIILE PLASTICE ÎN VECINĂTATEA CRESTĂTURILOR ASCUŢITE ÎN PLĂCI SUBŢIRI STUDIATE CU AJUTORUL CAUSTICELOR

Se presupune că în regiunea din jurul vîrfului crestăturii (fig. 6.38) se află o distribuţie liniară a tensiunilor, care depinde de ordinul singularităţii în vîrf şi care nu depinde de unghiul crestăturii. Dacă unghiul cresta-

Scanned with OKEN Scanner

turii este mai mic de 90° se pot folosi relaţiile date de Sneddon [24], care exprimă distribuţia tensiunilor în vîrful unei fisuri sub forma ecuaţiilor (6.39). Folosind aceste relaţii şi cu aceeaşi metodă utilizată în cazurile

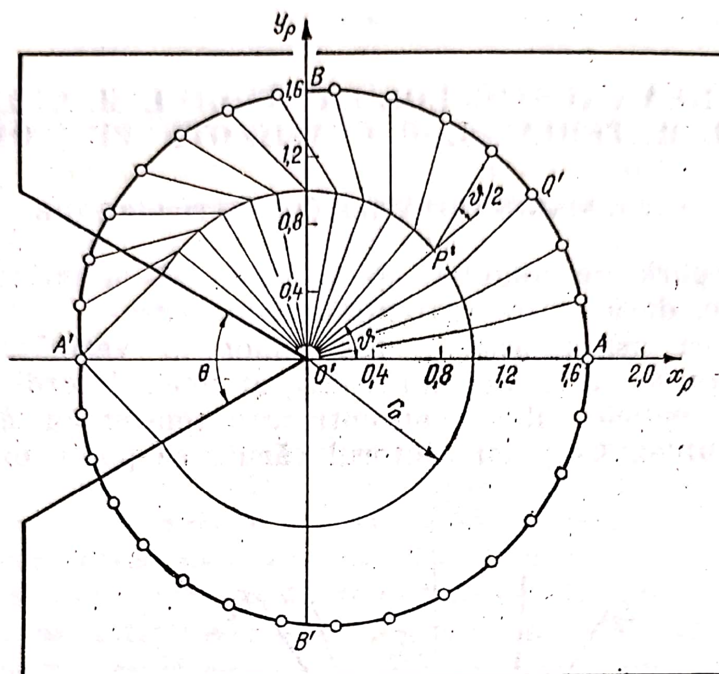


Fig. 6.38.

fisurilor, s-a stabilit [6] că curba iniţială în vîrful crestăturii este un cerc de rază

$$r_0 = (3C/2)^{1/5} \tag{6.135}$$

unde

$$C = z_0 dc \Delta \sigma_m (a/2)^{1/2} \tag{6.136}$$

iar c ia una din valorile următoare : c_r, c_t, c_f. Caustica este înfăşurătoarea cercului precedent. Amîndouă sînt prezentate în figura 6.38 pentru o valoare a razei curbei iniţiale $r_0 = 1$ şi pentru un unghi al crestăturii de 60°. Celelalte caracteristici ale epruvetei confecţionată din plexiglas şi ale sistemului optic experimental (fig. 6.3) sînt : $a = 5$ mm, $z_f = 15{,}5$ cm, $z_0 = 116{,}5$ cm, $\lambda = 8{,}5$. Coeficientul de concentrare a tensiunilor, exprimat prin relaţia $K = \sigma_m(a)^{1/2}$, poate fi calculat cu ajutorul diametrului transversal al causticei cu relaţiile (6.135) şi (6.136). Curbele $K = f(\sigma_m)$, pentru diferite valori ale unghiului crestăturii φ, au aceeaşi alură cu curba $K = f(\sigma_m)$ pentru fisuri.

Concluziile trase, în baza acestui studiu, arată că pentru materiale fragile zona puternic deformată din jurul vîrfului crestăturii are o formă circulară avînd centrul în vîrful crestăturii. În plus, influenţa unghiului crestăturii este neglijabilă pentru valori ale unghiului cuprinse între

Scanned with OKEN Scanner

0° şi 90°. De altfel, curbura vîrfului crestăturii şi raportul dintre adîncimea crestăturii şi lăţimea plăcii au o influenţă deosebită asupra valorii diametrului causticei. Cîmpul tensiunilor în jurul crestăturii depinde numai de valoarea tensiunii σ_m aplicată la infinit şi de geometria plăcii.

6.12. UTILIZAREA CAUSTICELOR LA STUDIUL SINGULARITĂŢILOR ÎN CAZUL MATERIALELOR CVASIIZOTROPE (COMPOSITE)

6.12.1. SINGULARITĂŢILE CU MULTISECTOARE

O altă categorie de singularităţi se formează la interfeţele materialelor composite, dacă există extremităţi colţuroase.

Comportarea asimptotică a tensiunilor în vecinătatea punctelor singulare este prescrisă de doi parametri, anume: de ordinul de singularitate p şi de coeficientul de concentrare a tensiunilor K_i. Rezultă că potenţialul complex $\Phi(z)$, cu ajutorul căruia se poate exprima cîmpul

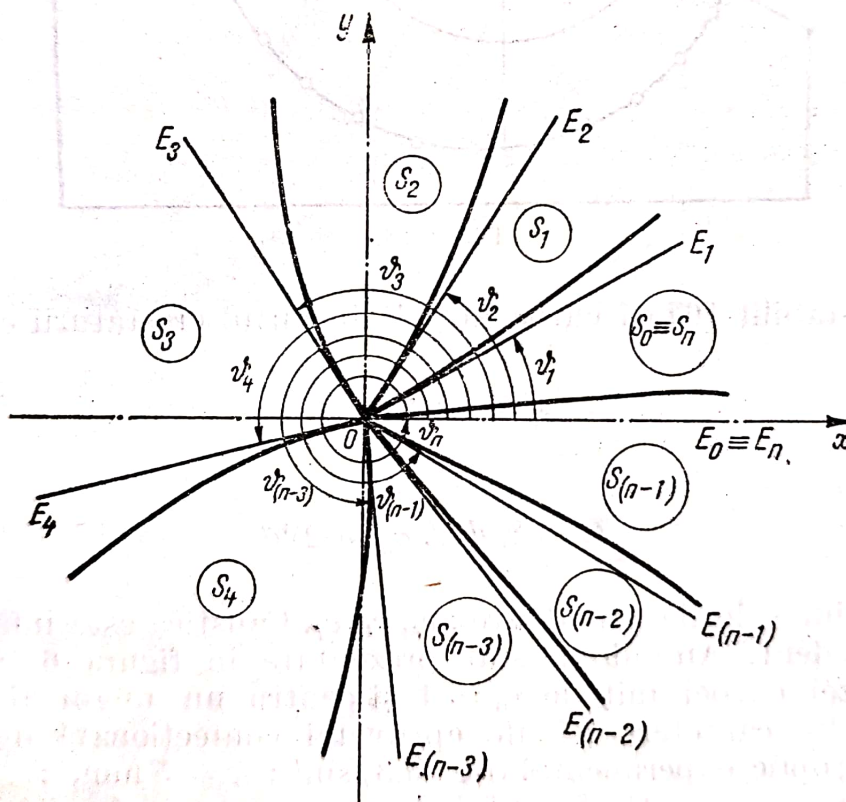


Fig. 6.39.

tensiunilor, folosind formulele bine cunoscute ale lui Kolosov-Muskhelishvili [27], are forma următoare

$$\Phi(z) = K_i z^{-p}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.137}$$

unde K_i este coeficientul de concentrare a tensiunilor pentru materialul i (fig. 6.39) şi p ordinul de singularitate.

Scanned with OKEN Scanner

După dezvoltarea teoretică a acestei probleme [31], ordinul de singularitate p nu depinde de sistemul de încărcare, ci numai de geometria din jurul muchiei cu multe faze şi de caracteristicile elasto-mecanice ale sistemului cvasiizotrop. Este posibil ca pentru diferite combinaţii ale materialelor, ordinul de singularitate p să fie un număr real şi negativ şi în consecinţă cîmpul tensiunilor nu are puncte singulare. Din contră, coeficientul K_i, de concentrare a tensiunilor este o funcţie de geometrie, de constantele elasto-mecanice şi de forţa aplicată sistemului cvasiizotrop.

Folosind potenţialul complex pentru starea plană de tensiuni, autorul [32] a putut să determine ordinul de singularitate şi coeficientul de concentrare K_i, într-o placă formată dintr-un număr oarecare N de sectoare din diferite materiale cimentate între ele (fig. 6.39). O placă avînd aceeaşi geometrie, dar pentru un contact de natură coulombiană (cu frecare) între sectoarele sale, a fost studiată în lucrarea [33]. În acest studiu au fost evaluaţi coeficientul K_i de concentrare a tensiunilor şi ordinul de singularitate p. Exemple numerice sînt date, de asemenea, în lucrarea [34] pentru două sectoare cimentate între ele, iar în lucrările [35], [36] şi [37], K_i şi p au fost evaluaţi pentru două sectoare în contact coulombian. Din aceste studii se poate deduce că ordinul de singularitate este un număr complex, avînd partea sa reală cuprinsă între 0 şi 1. Variaţia celor doi parametri p şi K_i în funcţie de geometria şi de constantele elastice ale materialului cvasiizotrop este dată în figurile 6.40 şi 6.41, unde sînt reprezentate atît partea reală cît şi partea imaginară a singularităţii complexe p. Figurile 6.40 şi 6.41, a, b, şi c arată diagramele variaţiei ordinului şi singularităţii complexe p, în raport cu geometria materialului cvasiizotrop, pentru materialul composite cu frecare la suprafaţă.

Metoda causticelor poate fi folosită nu numai pentru determinarea parametrilor K_i şi p în materiale cvasiizotrope, dar şi pentru determinarea dependenţei celor doi parametri. Într-adevăr, din expresia potenţialului complex (6.135) se poate obţine raza r_i a curbei iniţiale, sub următoarea formă

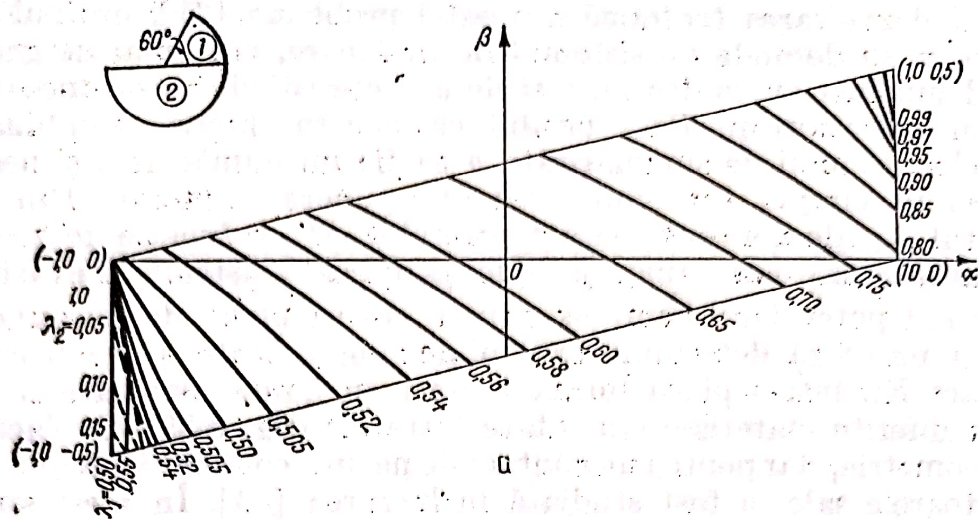
$$r_i = [4C_i K_i p(p + 1)e^{p2\vartheta_i}]^{1/(p_1+2)} \tag{6.138}$$

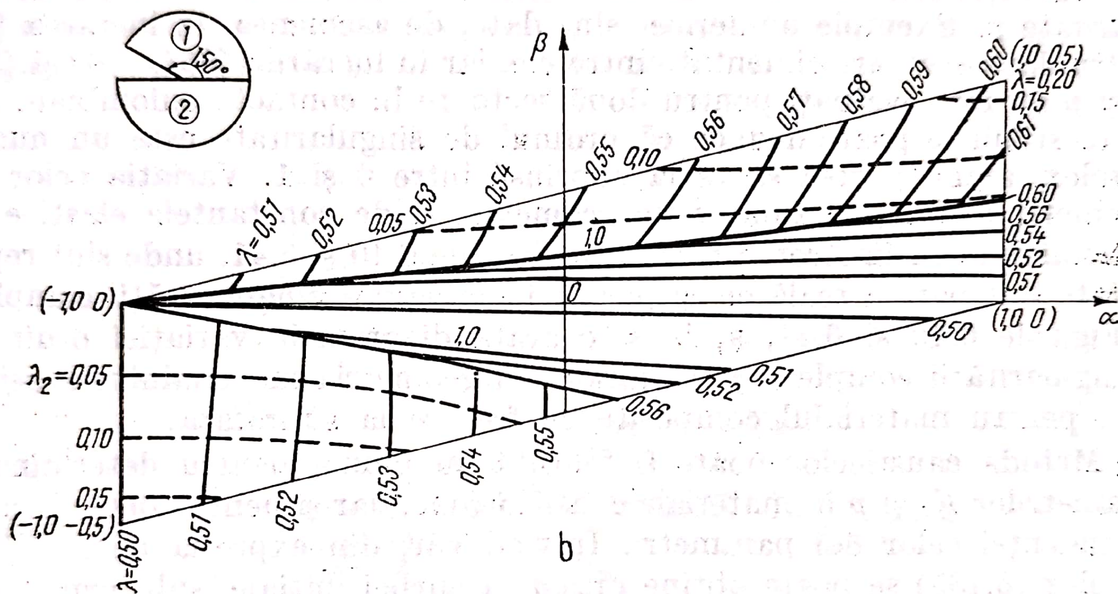
unde C_i se exprimă printr-una din relaţiile (6.22) pentru materialul considerat i, ϑ_i reprezintă unghiul sectorului i (fig. 6.39) şi este ordinul complex al singularităţii, dat de relaţia

$$p = p_1 + ip_2. \tag{6.139}$$

Ecuaţia corespunzătoare curbei causticei este dată de relaţia (6.37), în care trebuie ţinut seamă de relaţia (6.135). Astfel se obţine

$$W_i = r_i\,[e^{i\vartheta_i} \pm 4\,C_i \bar{K}_i\,\bar{p}\,r_i^{-(p+2)}\;e^{i(\bar{p}+1)\vartheta_i}]. \tag{6.140}$$





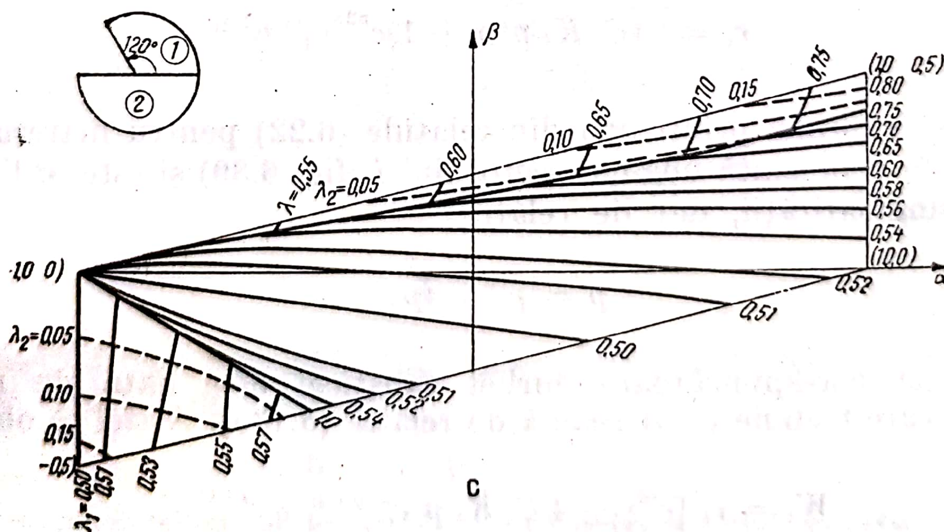
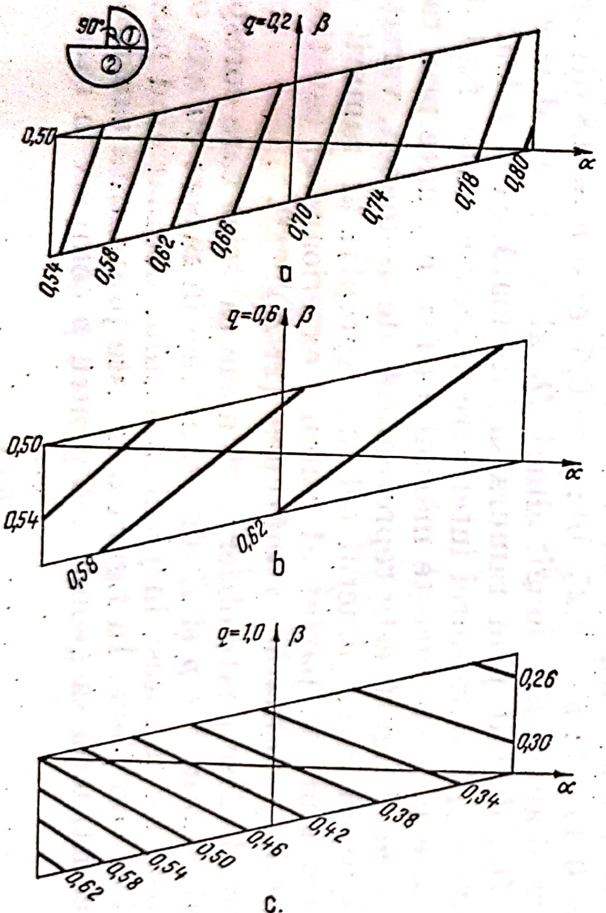
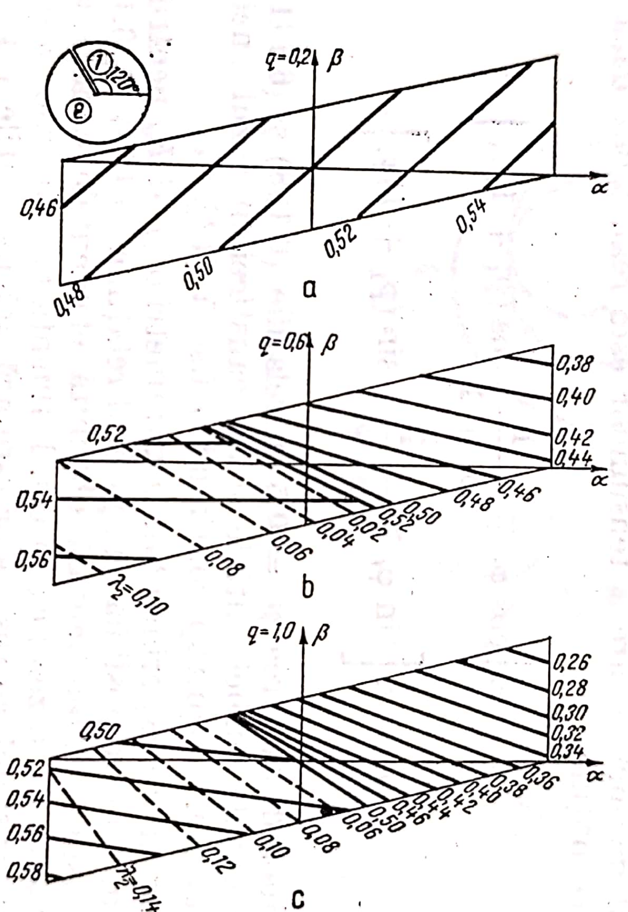


Fig. 6.40.

Scanned with OKEN Scanner


90°
q=0,2 β
0,50
0,54 0,58 0,62 0,66 0,70 0,74 0,78 0,80
α
a
q=0,6 β
0,50
0,54
0,58 0,62
b
q=1,0 β
0,26
0,30
0,62 0,58 0,54 0,50 0,46 0,42 0,38 0,34
c.


120°
q=0,2 β
0,46
0,48 0,50 0,52 0,54
a
q=0,6 β
0,38
0,40
0,42
0,44
0,52
0,54
0,56
λ=0,10
0,08 0,06 0,04 0,02 0,52 0,50 0,48 0,46
b
q=1,0 β
0,26
0,28
0,30
0,32
0,34
0,50
0,52
0,54
0,56
0,58
λ=0,14
0,12 0,10 0,08 0,06 0,50 0,46 0,44 0,42 0,40 0,38 0,36
c

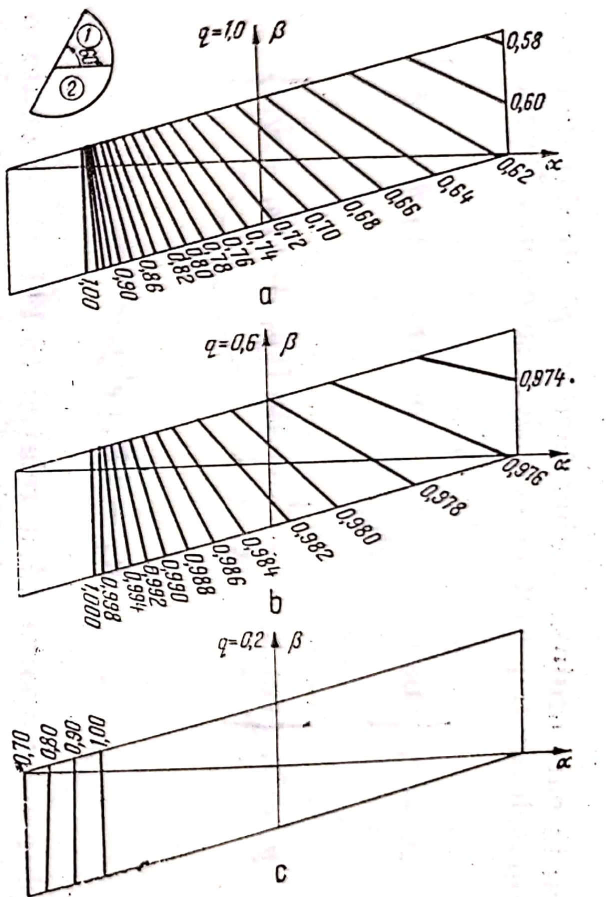

q=1,0 β
0,58
0,60
0,62
1,00 0,90 0,86 0,82 0,80 0,78 0,76 0,74 0,72 0,70 0,68 0,66 0,64
a
q=0,6 β
0,974
0,976
1,000 0,998 0,994 0,992 0,990 0,988 0,986 0,984 0,982 0,980 0,978
b
q=0,2 β
0,70 0,80 0,90 1,00
c

Fig. 6.41.

În cazul în care ordinul de singularitate p este dat de către un număr real, coordonatele unui punct al causticei se exprimă prin

$$x_i = r_i \left\{\cos \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \cos [(p_1 + 1) \varphi_i - \gamma_i]\right\} \quad (6.141a)$$

$$y_i = r_i \left\{\sin \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \sin [(p_1 + 1)\varphi_i - \gamma_i]\right\} \quad (6.141.b)$$

unde

$$K_i = |K_i| e^{i\gamma_i}.$$

O simplificare importantă a relației (6.141 a) se poate obține dacă coeficientul de concentrare a tensiunilor este real, adică dacă $\gamma = 0$. În acest caz se obține

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \left[\cos \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \cos (p_1 + 1)\varphi_i\right] \\ y_i &= r_i \left[\sin \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \sin (p_1 + 1)\varphi_i\right]. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Introducînd valoarea $p_i = 0{,}5$ în relațiile (6.138) și (6.141 b) pot fi obținute ecuațiile curbei inițiale și ale causticei în cazul unei plăci din material omogen și izotrop conținînd o fisură [12].

O determinare experimentală a parametrilor p și K_i pentru un material cvasiizotrop este posibilă cu ajutorul relațiilor (6.138) și (6.141) măsurînd pe caustica experimentală obținută elementele caracteristice (diametrele, unghiurile, razele) causticei. Influența parametrilor p și K_i asupra formei și dimensiunilor causticelor este arătată în figurile 6.42 și 6.43. În figura 6.42 se arată variația causticelor față de valoarea singularității pentru : $p = 0{,}05$ (a) ; $p = 0{,}25$ (b) ; $p = 0{,}5$ (c) și $p = 0{,}8$ (d) iar în figura 6.43 variația diametrului longitudinal D_l al causticei, diametrului său transversal D_{ti}, definit prin ramura sa interioară, ca și valoarea minimă a razei polare (r_{min}) a ramurei interioare a acestei curbe, față de ordinul de singularitate p. Toate aceste mărimi au fost normate prin raza curbei inițiale. În aceeași figură este reprezentată, de asemenea, variația distanței D_{min} măsurată între punctul cel mai apropiat al ramurii interioare și punctul cel mai îndepărtat al ramurii exterioare al causticei față de punctul singular, normată cu mărimea $(2CK)^{1/(p+2)}$.

În figura 6.42 se poate observa că acele caustice care corespund valorilor reale ale mărimilor p și K sînt simetrice în raport cu axa orizontală. În plus, causticele se rotesc în jurul punctului singular cînd parametrii K și p iau valori complexe. În figura 6.44 este prezentată caustica obținută teoretic și construcția sa geometrică pentru p complex în cazul în care p

Scanned with OKEN Scanner

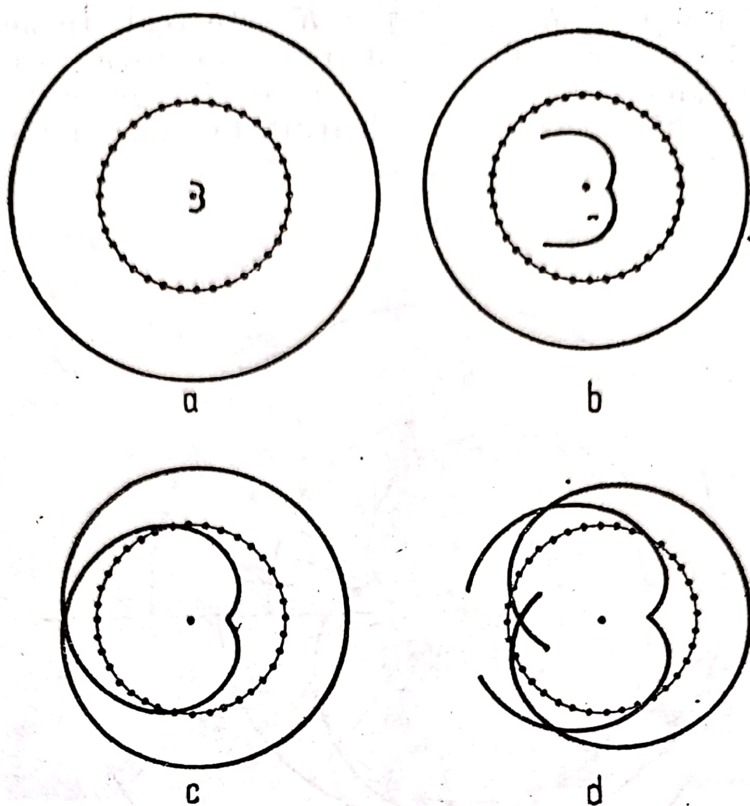


Fig. 6.42.

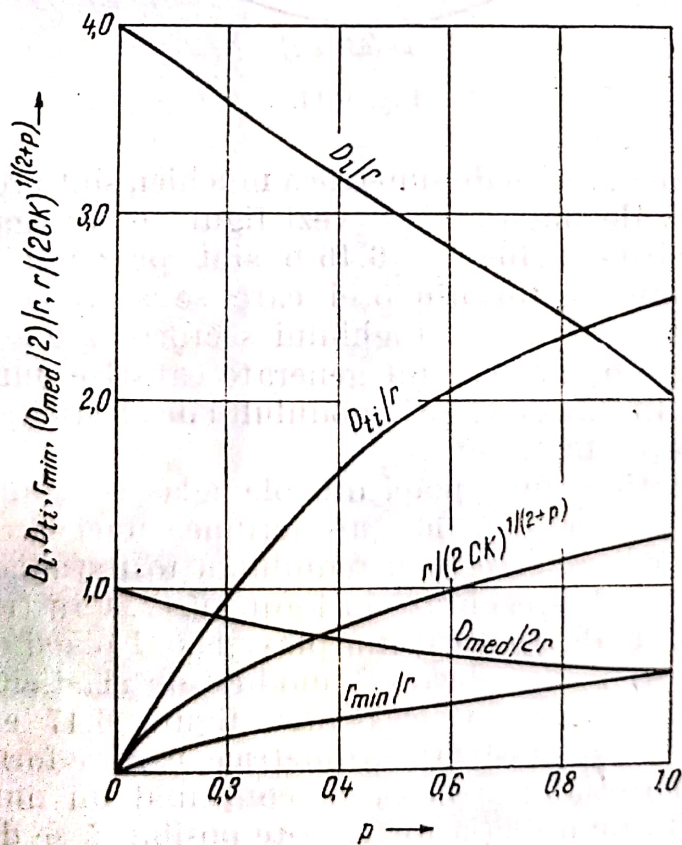


Fig. 6.43.

este dat de relaţia $p = (0,5 + 0,1i)$ şi K este real. În aceeaşi figură se poate observa că atît curba iniţială cît şi curba causticei sînt curbe discontinue. Interferogramele ca şi curbele causticelor generate în vîrful unei muchii într-un material cvasiizotrop alcătuit din două materiale, solicitat la

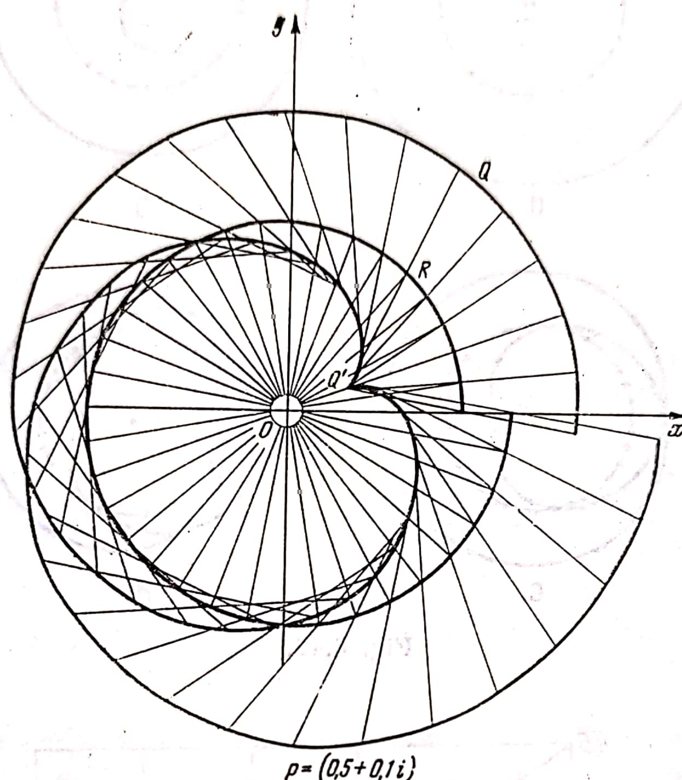
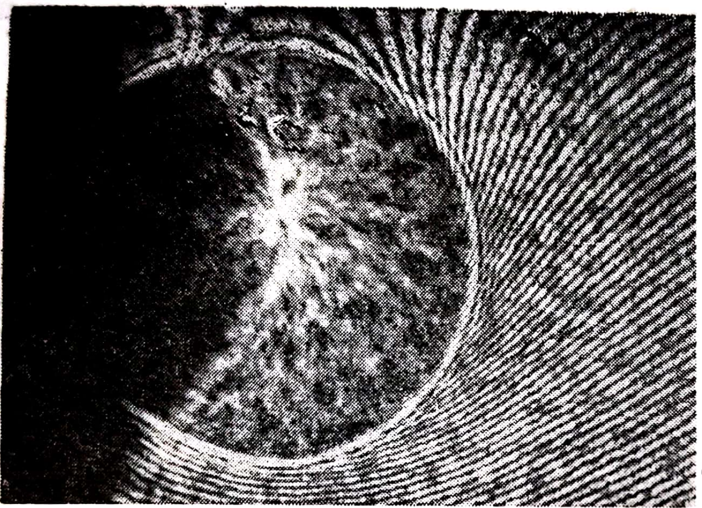


Fig. 6.44.

tracţiune, după direcţia axei de simetrie a muchiei, sînt prezentate în figura 6.45, pentru valori ale unghiului θ (vezi figura 6.39) egale cu 260° (a) şi (210°) (b). În figurile 6.46 a şi 6.46 b sînt prezentate curbele causticelor în vîrful unui sector din oţel care se sprijină pe un semiplan din plexiglas pentru valori ale unghiului sectorului $\theta = 120°$ (a) şi $\theta = 90°$ (b). Se poate observa că sînt generate caustice numai de către sectorul din plexiglas din cauza valorii modulului de elasticitate care este mult mai mic decît al oţelului.

O altă combinaţie a unei plăci din plexiglas conţinînd un sector din oţel avînd un unghi la vîrf $\theta = 60°$ sub acţiunea unei sarcini de tracţiune, după direcţia axei de simetrie a sistemului, a fost studiată experimental. Causticele rezultate sînt prezentate în figura 6.47. Caustica este generată, ca în cazul precedent, de sectorul din plexiglas al plăcii cvasiizotrope din cauza diferenţei mari între cele două module de elasticitate ale materialelor. Curba teoretică a causticei pentru figura 6.47 este reprezentată în figura 6.48. În cazul unei caustice, simetrice, care se formează în punctul singular al unui material cvasiizotrop, conţinînd un număr de sectoare dispuse simetric faţă de direcţia forţei, este posibil să se determine ordinul de singularitate p, care este un număr real, măsurînd caracteristicile


a)

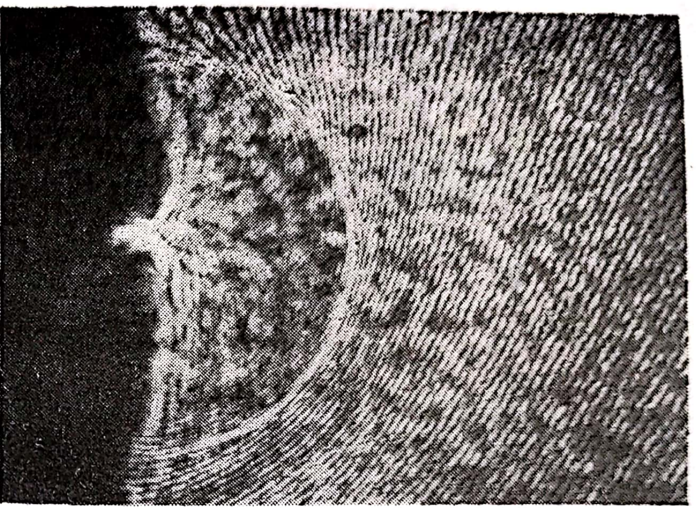
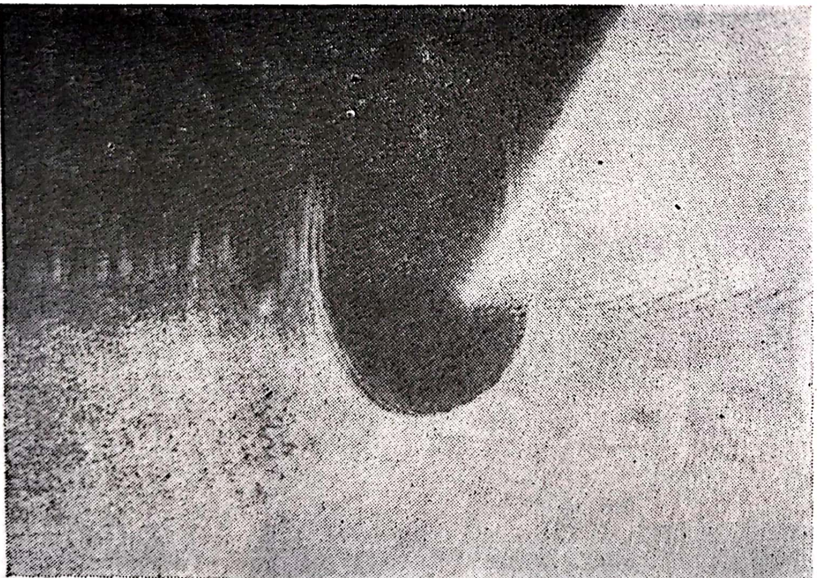

b)

Fig. 6.45.


a)

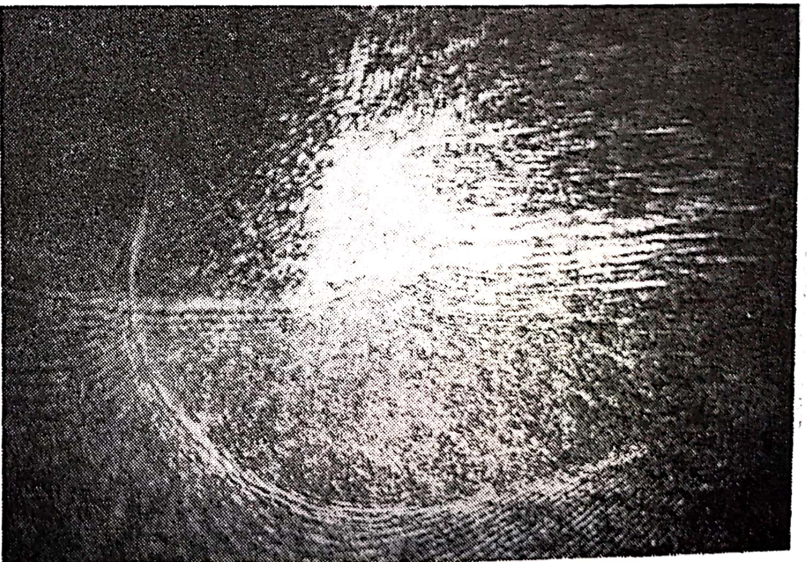

b)

Fig. 6.46.

Scanned with OKEN Scanner

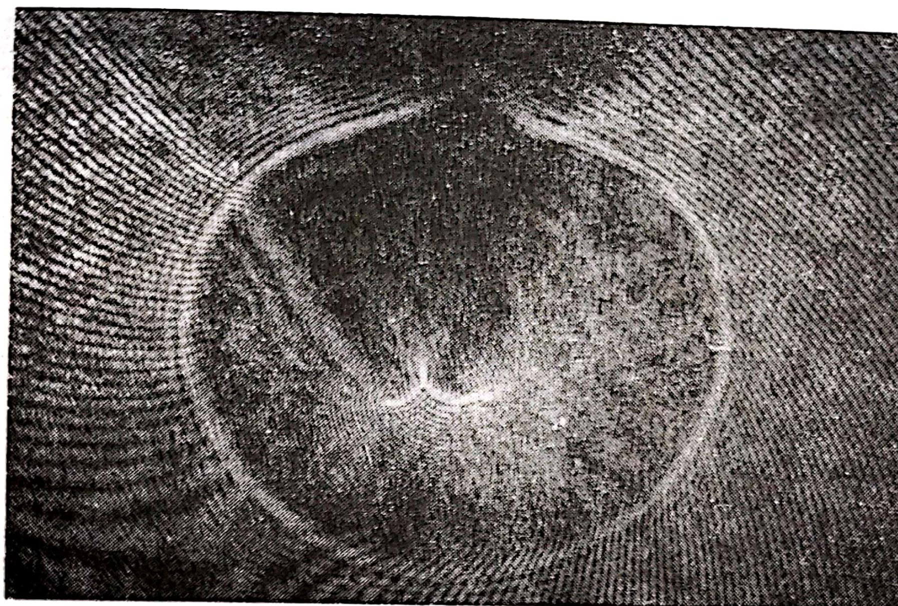


Fig. 6.47.

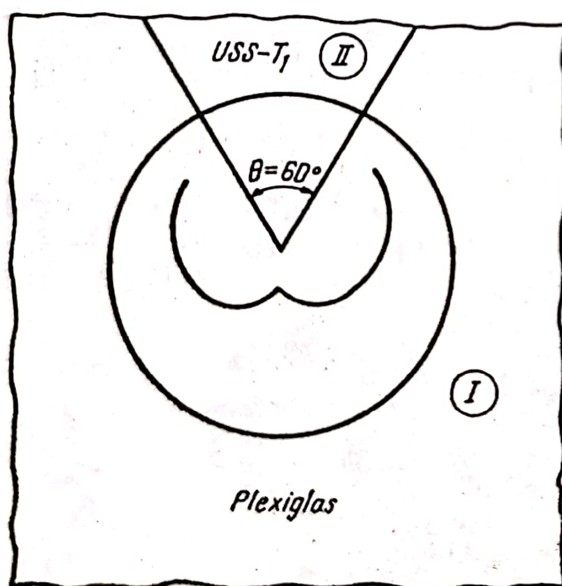


Fig. 6.48.

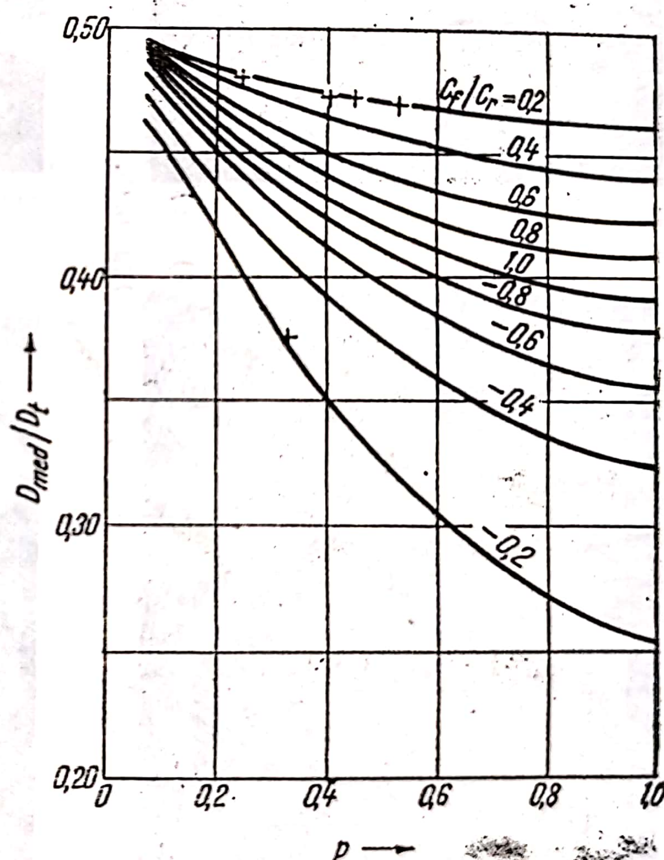


Fig. 6.49.

geometrice ale causticei, care sînt reprezentate în figura 6.49. Aceste caracteristici ale causticelor sînt: distanța D_{med} și diametrul transversal D_t al causticei exterioare. În plus, este necesar să se cunoască raportul c_f/c_r (vezi § 6.2) a două constante optice ale materialului pentru razele reflectate de fața anterioară și respectiv posterioară a plăcii. Evaluarea coefi-

cientului de concentrare $K_i = K_i^I + K_i^{II}$ a tensiunilor şi a ordinului de singularitate $p = p_1 + p_2 i$, în cazul general al unui material cvasiizotrop conţinînd un număr oarecare de sectoare poate fi realizată folosind forma generală a ecuaţiilor curbei iniţiale (6.34) şi a causticei (6.36) presupunînd că sînt determinate experimental caracteristicile geometrice ale causticei.

6.12.2. UTILIZAREA CAUSTICELOR ÎN CAZUL MATERIALELOR CVASIIZOTROPE CU FISURI

Problema unui material cvasiizotrop conţinînd sectoare fisurate este de mare importanţă practică. Ordinul de singularitate a cîmpului de tensiuni la extremitatea unei fisuri terminîndu-se la interfaţa sectoarelor materialului cvasiizotrop este o funcţie de constantele elastice ale materialelor cvasiizotrope. Metoda causticelor sub forma dezvoltată în paragraful precedent poate fi folosită pentru determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor şi a ordinului de singularitate la extremitatea unei fisuri într-un material cvasiizotrop. Fisura poate fi considerată ca un sector avînd un unghi la vîrf $\theta = 0$ şi modulul de elasticitate $E = 0$. Figura 6.50, a prezintă forma teoretică a causticei la extremitatea unei fisuri într-un material cvasiizotrop avînd caracteristicile date pe aceeaşi figură, iar figura 6.50, b prezintă forma corespunzătoare a causticei obţinută pe cale experimentală. Se poate observa pe cele două figuri, coincidenţa celor două caustice teoretică şi experimentală.

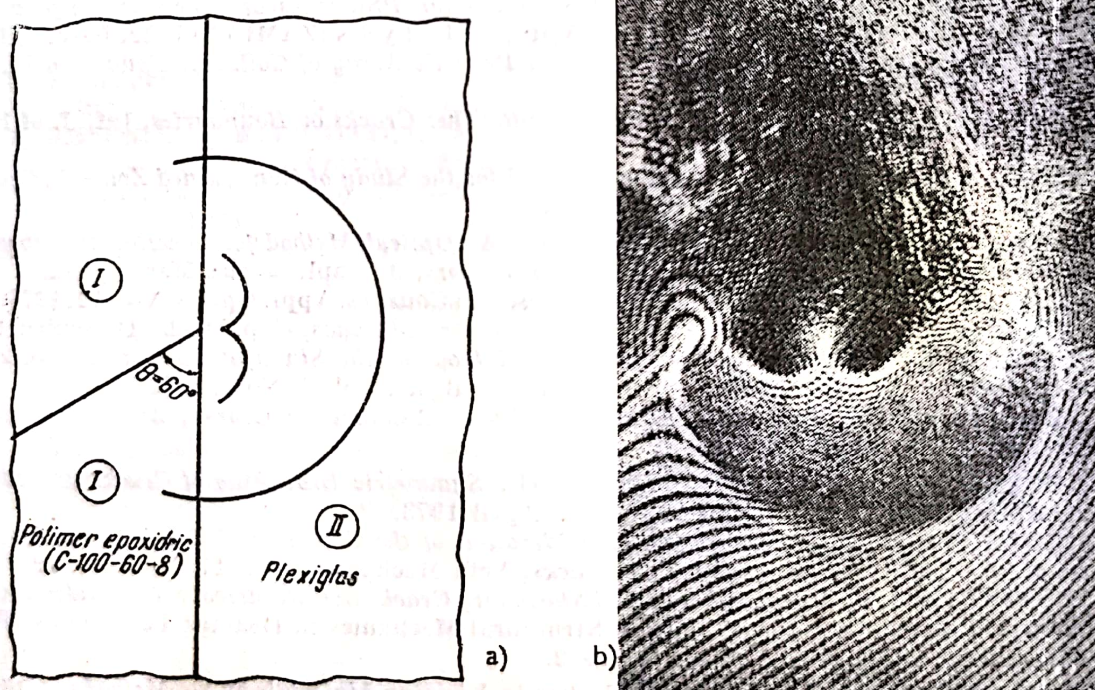


Fig. 6.50.

Cu ajutorul relaţiilor (6.136) şi (6.134) şi al caracteristicilor geometrice ale causticei, se poate determina valoarea coeficientului de concentrare K a tensiunilor şi ordinul de singularitate p la extremitatea fisurii.

BIBLIOGRAFIE

1. FAVRE, H., *Sur une nouvelle méthode d'optique de détermination des tensions intérieures*, Revue d'Optique Théorique et Instrumentale, Vol. 8, 1929.
2. BORN, M. and WOLF, E., *Principles of optics.*
3. THEOCARIS, P. S., *Local Yielding Around a Crack Tip in Plexiglas*, Journal of Applied Mechanics, June 1970.
4. THEOCARIS, P. S., *The Spread of Plastic Zones Between Symmetric Edge Cracks*, Israel Journal of Technology, Vol. 8, No. 4, 1970.
5. THEOCARIS, P. S., *The Reflected-Shadow Method for the Study of the Constrained Zones in Cracked Birefringent Media*, Journal of Strain Analysis, Vol. 7, 1972.
6. THEOCARIS, P. S., *Plastic Strains at the Roots of Sharp Notches in Perspex*, Proc. 4th Int. Conf. Exp. Stress Analysis, Cambridge, England, 1970.
7. THEOCARIS, P. S., *Complex Stress-Intensity Factors at Bifurcated Cracks*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20, 1972.
8. THEOCARIS, P. S. and JOAKIMIDES, N., *Some Properties of Generalized Epicycloids Applied to Fracture Mechanics*, J. Appl. Math. and Physics (ZAMP) Vol. 22, Fasc, 5, 1971.
9. THEOCARIS, P. S., *Constrained Zones in a Periodic Array of Collinear Equal Cracks*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, 1972.
10. THEOCARIS, P. S., *Interaction of Cracks with Other Cracks or Boundaries*, Int. J. of Fracture Mech., Vol. 8, No. 1, March 1972.
11. THEOCARIS, P. S., *Reflected Shadow Nethod for the Study of Constrained Zones in Cracked Plates*, Applied Optics, Vol. 10, Oct. 1971.
12. THEOCARIS, P. S., and GDOUTOS, E. E., *An Optical Method for Determining Opening-Mode and Edge Sliding-Mode Sress-Intensity Factors*, J. Appl. Mech., March 1972.
13. THEOCARIS, P. S., *Optical Stress Rosette Based on Caustics*, Appl. Optics, Vol. 12, 1973.
14. THEOCARIS, P. S., *Stress Singularities at Concentrated Loads*, Exp. Mech., December 1973.
15. THEOCARIS, P. S., *The Reflected-Shadow Method for the Study of the Constrained Zones in Cracked Birefringent Media*, Jur. of Strain Analysis, Vol. 7, No 2, 1972.
16. THEOCARIS, P. S., *Intercation Between Collinear Asymmetric Cracks*, J. Strains Analysis, Vol. 7, No 3, 1972.
17. THEOCARIS, P. S., and BLONTZOU, C. H., *Symmetric Branching of Cracks in PMMA*, Materialprüfung 15, No 4, pp. 123—130, April 1973.
18. THEOCARIS, P. S., *A Theoretical Consideration of the Constrained Zones in an Array of Interacting Collinear and Asymmetric Cracks*, Acta Mechanica, Vol. 17, No 3—4, 1973.
19. THEOCARIS, P. S., *Intensity Factors of Stationary Cracks in Cylindrical Shells under Internal Pressure*, Proc. First Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (Paper G6/7, Berlin, 1972), Vol. 4, Part. G., 1972.
20. THEOCARIS, P. S., *Stress Intensity Factors in Yielding Materials by the Method of Caustics*, Int. Jur. Fract. Mech., Vol. 9, No 2, 1973.
21. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E. E., *Verification of the Validity of the Dugdale-Barenblatt Model by the Method of Caustics*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 6, No 3, 1974.
22. THEOCARIS, P. S. and G DOUTOS, E. E., *The Modified Dugdale-Barenblatt Model Adapted to Various Fracture Con figuration in Metals*, Int. Jur. Fract. Mech., Vol. 10, No 4, 1974.
23. THEOCARIS, P. S., *Stress-Singularities due to Uniformly Distributed Loads Along Straight Boundaries*, Int. J. Solids Structure, Vol. 9, No 5, 1973.

24. SNEDDON, J. N., *The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid*, Proceedings of the Physical Society, London, Vol. 187, 1946.
25. SIH, G., PARIS, P. and ERDOGAN, F., *Crack-tip Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems*, J. of Appl. Mech., Vol. 29, Trans. ASME, Vol. 84, Serie E, 1962.
26. BOWIE, O. L. and NEAL, D. M., *Single-Edge Ceack in Rectangular Tensile Sheet*, J. Apl. Mech., Vol. 32, Trans. ASME, Vol. 87, Series E, 1965.
27. MUSKHELISHVILI, N., *Some Basics Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, 1953.
28. WESTERGAARD, H. M., *Bearing Pressures and Cracks*, J. Appl. Mech., Vol. 6, Trans. ASME, Vol. 31, 1939.
29. THEOCARIS, P. S. and RAZEM, C. I., *Load Distribution at Singularities Determined by Caustics*, to be published (in curs de publicare).
30. THEOCARIS, P. S. and RAZEM, C, I., *Deformed Boundaries Determined by the Method of Caustics*, to be published (in curs de publicare)
31. THEOCARIS, P. S., *Stress and Displacement Singularities Near Corners*, J. of Appl. Math. Ph. (ZAMP), Vol. 26, No 1, 1975.
32. THEOCARIS, P. S., *The Order of Singularities at a Multi-Wedge Corner, of a Composite Plate*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 12, 1974.
33. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *Stress Concentration on the Apex of a Plane Indenter Acting on an Elastic Half-plane*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 42, No 3, 1975.
34. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *Stress Singularities at Equal Angle Bi-wedges and Two-Material Composite Half-Planes with Rough Interfaces*, J. Appl. Mech., Trans. ASME 1976.
35. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E. E., *Stress Singularities at Vertices of Composite Plate with Smooth or Rough Interfaces*, Archives of Mechanics (Poland), 1976.
36. THEOCARIS, P. S., *Stress Singularities in a Bi-wedge*, Revue Roumaine des Sciences Techniques — Mechaniques Appliquée, 1976.
37. BOGY, D. B., *Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angels Under Surface Tractions*, J. Appl. Mech. 38, 1971.
38. BOGY, D. B., *On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface*, J. Appl. Mech. 38, 1971.
39. SMITH, D. G. and SMITH, C. W., *Photoelastic Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors*, Engrg. Fracture Mech. 10, 1970.
40. SMITH, C. W., *Use of Three-Dimensional Photoelasticity in Fracture Mechanics*, Exp. Mech. 13, 1973.
41. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *A Photoelastic Determination of K_1 Stress Intensity Factors*, Engrg. Fracture Mech., Vol. 7, No 2, 1975.
42. THEOCARIS P. S., *The Determination of Mode I Stress-Intensity Factors by Holographic Interferometry*. Furter comments on a discussion by Fourney, Exp. Mech., Vol. 14, 1974, on a paper by Dudderar and O'Regan, Exp. Mech., Vol. 13, No 4, 1973, Exp. Mech., Vol. 15, No 4, 1975.
43. KOBAYASHI, A. S., ENGSTROM, W. L., SIMON, B. B., *Crack Opening Displacements and Normal Strains in Centrally Notched Plates*, Exp. Mech., Vol. 9, No 4, April 1969.
44. PARIS, C. P., and SIH, C. G., *Stress Analysis of Cracks. Fracture toughness testing and its applications*, 1965 (A.S.T.M. Special Technical Publication, Nr. 381, Philadephia, Pa).

7

METODA LACURILOR CASANTE

Prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU,
Ing. L. NĂILESCU

7.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Metoda se bazează pe aderarea perfectă a unui strat de lac cu caracteristici casante, la proba, respectiv structura ce urmează să fie studiată. Cînd proba este solicitată, deformațiile ce apar sînt transmise la stratul de lac, producînd tensiuni de suprafață care în cele din urmă provoacă fisurarea lacului. Deoarece lacul casant este conceput să fisureze la un nivel scăzut al tensiunii, proba nu este suprasolicitată, iar metoda este considerată nedistructivă.

Primele lacuri casante folosite în tensometrie au fost acelea ce se formau în mod natural pe suprafața unor elemente ca țunderul ce se formează la laminarea la cald a oțelului și oxizii de pe suprafețele încălzite. Aceste învelișuri casante se distrug prin exfoliere sau crăpare cînd materialul de bază cedează sub sarcină producîndu-se deformații excesive. Pentru a îmbunătăți vizibilitatea cîmpului de fisuri piesele erau adesea acoperite cu lapte de var. Fisurarea și exfolierea învelișului produce linii negre ușor vizibile în contrast cu fondul alb. Primul înveliș casant realizat în mod artificial a fost un amestec de șelac și alcool, pe care Sauerwald și Wieland [18] l-au folosit în anul 1925 pentru a pune în evidență zonele de deformație plastică. Această tehnică a amestecului de șelac cu alcool a constituit un progres față de cea a laptelui de var; totuși deformațiile necesare fisurării învelișului fiind încă în domeniul de curgere al materialului de bază, metoda nu a putut fi considerată nedistructivă. Pentru a mări sensibilitatea la deformație, Dietrich și Lehr [4] în Germania (1932), Portevin și Cymboliste [1] în Franța (1934) și Ellis [9] în Statele Unite (1937) au dezvoltat și introdus procedee noi folosind alte învelișuri cu proprietăți casante.

Ellis, lucrînd pentru firma Magnaflux a realizat un lac pe bază de rășini [9], lac comercializat în anul 1941. Formula acestui lac este relativ simplă, cu trei constituenți de bază: rezinat pe bază de zinc, sulfură de carbon ca solvent și ftalat de dibutil (dibutilftalat) ca plastifiant, pentru a varia gradul de fragilitate al lacului. Acest lac pe bază de rășini cunoscut sub denumirea de Stresscoat, este larg răspîndit în S.U.A., Europa și Japonia,

fiind indicat, în special, acolo unde precizia nu este factorul hotărîtor al analizei.

În ultimii ani s-a pus un accent deosebit pe dezvoltarea lacurilor casante pe bază de ceramică. F. Singdale [19] a realizat un lac din email şi porţelan care, aplicat pe metale şi încălzit în mod corect, fisurează la nivele prestabilite ale tensiunii. Un înveliş pe bază de ceramică a fost comercializat de către firma Magnaflux sub denumirea All-Temp [14]. Acest lac a fost folosit, pînă în prezent, pe scară redusă, fapt pentru care datele referitoare la performanţele sale sînt foarte sumare.

Utilizarea lacurilor casante în tensometrie prezintă următoarele avantaje:

1. Oferă pentru întreaga zonă studiată date privind direcţia tensiunilor principale şi nu necesită o analiză punct cu punct ca în cazul altor metode tensometrice.

2. Nu necesită construirea unui model, aplicîndu-se, de regulă, pe piesa sau structura ce face obiectul cercetării.

3. Din datele furnizate se poate obţine valoarea tensiunilor, fără calcule laborioase.

Ca principal dezavantaj al metodei se menţionează faptul că precizia măsurătorilor este sensibil dependentă de variaţiile de temperatură şi umiditate din timpul încercării şi aplicării sarcinilor. Aceasta mai depinde într-o măsură mai mică de grosimea stratului de lac şi de starea de tensiuni în zona cercetată. Pentru a reduce erorile, cercetătorul trebuie să cunoască în mod cît mai complet posibil comportarea lacului casant. Dacă în timpul pregătirilor şi al încercării sînt luate măsuri de precauţie corespunzătoare, precizia determinărilor, prin metoda lacului casant, este de obicei suficientă pentru analiza tensiunilor în majoritatea cazurilor întîlnite în pratica inginerească.

7.2. LACURI CASANTE ŞI TEHNICA UTILIZĂRII LOR

7.2.1. TIPURI DE LACURI CASANTE ŞI CARACTERISTICILE LOR

Generalităţi. În funcţie de scopul urmărit în analiza experimentală a tensiunilor cu ajutorul lacurilor casante, se impune alegerea tipului de lac cel mai potrivit pentru aplicarea cu uşurinţă pe piesa de cercetat şi pentru o valorificare cît mai bună a rezultatelor. Se va avea în vedere în primul rînd sensibilitatea lacului, precum şi comportarea sa în diferite condiţii.

Lacul, care se aplică pe suprafaţa piesei sau structurii ce face obiectul cercetării, este fie în formă lichidă şi se întăreşte pe piesă prin evaporarea solventului, fie în formă solidă şi este topit prin încălzire. Unele lacuri se usucă la temperaturi ridicate în timp ce altele se pot întări la temperatura camerei.

Deformaţiile produse în piesă sau structură sînt transmise stratului de lac datorită adeziunii dintre lac şi piesă, respectiv structură. Aceste deformaţii dezvoltă o stare de tensiuni în stratul de lac.

Totuşi, pentru că valorile constantelor elastice (modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson) ale lacului sînt diferite de cele ale materialului piesei, pentru determinarea stării de tensiuni în stratul de lac, ca o funcţie de starea de tensiuni din piesă şi reciproc, sînt necesare calcule matematice care să permită interpretarea corectă a informaţiilor obţinute din fisurarea lacului. În cele mai multe lacuri casante se produc tensiuni remanente cînd se întăresc, deoarece, în general, ele se contractă cînd ajung în stare solidă. Aceste tensiuni joacă un rol foarte important în comportarea lacului; dacă tensiunile sînt de întindere, cu cît sînt mai mari cu atît mai mică va fi tensiunea suplimentară necesară fisurării stratului de lac.

Lacurile casante au, în general, un coeficient de dilatare termică mai mare decît al metalelor la care aderă, din care cauză apar, în stratul de lac, tensiuni termice care trebuie analizate cu atenţie [5].

Cu ajutorul lacurilor casante, aşa cum s-a arătat ,se poate obţine o imagine generală a distribuţiei tensiunilor pe toată suprafaţa structurii de cercetat şi, dacă este necesar, se poate continua măsurarea deformaţiilor în anumite puncte utilizînd traductoare rezistive. (v. cap. 3).

Deoarece direcţia de fisurare a lacului coincide cu direcţia uneia din tensiunile principale, starea de tensiuni într-un punct poate fi determinată folosind numai două traductoare în loc de trei. Lacurile casante avînd o lungime activă de măsurare foarte mică, sînt ideale pentru măsurarea deformaţiei în punctele cu concentratori.

Clasificarea lacurilor casante. Clasificarea lacurilor casante se face pe baza umătoarelor criterii:

— starea fizică;
— elementele componente;
— scopul urmărit în cercetare.

a) După starea fizică în care se găseşte lacul casant se disting:
— lacuri solide;
— lacuri sub formă de pulbere;
— lacuri email şi
— lacuri lichide.

Starea fizică a lacului determină şi procedeul de aplicare pe structura de încercat (v. § 7.2.1.3.)

b) În funcţie de principalul element component al lacului se cunosc:
— lacuri pe bază de răşini, utilizate pentru încercări la temperaturi cuprinse între 0—40°C şi
— lacuri pe bază de ceramică, ce pot fi utilizate pînă la temperaturi de 380°C.

c) În funcţie de scopul urmărit în cercetare se disting:
— *lacuri calitative*, a căror scop este determinarea traseului liniilor izostatice (direcţiile tensiunilor principale) şi zonelor de solicitare maximă, oferind o imagine generală privind distribuţia tensiunilor în structura ce face obiectul cercetării. Determinările calitative pot fi făcute cu oricare din tipurile de lacuri casante cunoscute
— *lacuri cantitative*, cu ajutorul cărora, în afară de determinările calitative, se pot face şi determinări cantitative, adică pot fi determinate

valorile tensiunilor. În acest scop este necesar să se determine *pragul de deformație* al lacului (v. § 7.3). Prin prag de deformație al lacului casant se înțelege deformația specifică minimă, necesară fisurării stratului de lac; lacul casant este cu atît mai sensibil cu cît pragul său de deformație este mai scăzut.

Tipuri de lacuri casante. Dintre lacurile cunoscute cele mai folosite, în prezent, sînt tipurile Maybach, ONERA, SNECMA, Brafa, Stresscoat, Tens-Lac și All-Temp, lacuri foarte sensibile, capabile să fisureze sub limita de elasticitate a oțelurilor de construcții. La fiecare tip de lac corespunde un anumit procedeu de utilizare.

a) *Lacul Maybach.* Acest lac, elaborat de Otto Dietrich, este un lac în stare solidă, fuzibil, preparat din 7 părți colofoniu și 3 părți rășină dammar [15].

Amestecul este topit la 150°C și turnat în bare de 150 g. Fragilitatea (sensibilitatea) lacului poate fi modificată prin alegerea unui alt raport între cei doi componenți, cunoscînd că rășina dammar este mai fragilă. Sensibilitatea la fisurare a acestui lac este foarte mare, *pragul de deformație* ajungînd pînă la alungiri de $1\ldots2 \times 10^{-4}$.

Înainte de aplicarea lacului piesa trebuie încălzită la cca. 140°C după care se întinde lacul prin tușare peste regiunea încălzită. Se continuă încălzirea piesei pînă cînd stratul de lac are o gosime uniformă, evitîndu-se arderea sau vaporizarea lacului datorită încălzirii excesive.

Sensibilitatea maximă se obține imediat după răcire. Avantajul acestui lac constă în mînuirea lui simplă și în rapiditatea cu care se poate aplica. Ca principal dezavantaj se citează imposibilitatea obținerii unui strat de lac de grosime absolut uniformă, fapt pentru care lacul nu fisurează totdeauna, întîi, în regiunea cea mai solicitată a piesei. Pentru acest motiv, acest lac se utilizează numai pentru a stabili direcțiile celor două tensiuni principale și felul solicitării la care este supusă piesa examinată, mărimea tensiunilor urmînd să fie deteminată cu ajutorul traductoarelor rezistive. Datorită tratamentului termic ce trebuie aplicat piesei pentru a putea întinde lacul, folosirea lui este limitată numai la piese din oțel, fontă și unele metale neferoase.

b) *Lacul ONERA.* Preparat în mai multe variante, se prezintă sub formă lichidă, pudră sau email [10]. Lacul lichid este o soluție de 30% colofoniu în sulfură de carbon, preparat în trei grupe de sensibilitate. Datorită sensibilității ridicate a colofoniului, în stratul de lac pot apare fisuri premature în timpul răcirii.

Aplicarea lacului se face cu pensula în trei straturi succesive după ce, în prealabil, suprafața structurii a fost curățată cu sulfură de carbon. Uscarea se face la temperatura ambiantă timp de 12—24 ore.

Pentru reducerea timpului de uscare și mărirea sensibilității, se adaugă 6% rezinat de cobalt.

În cel de-al doilea caz trebuie mai întîi adusă pudra la o granulație foarte fină, după care aceasta este pulverizată în cantitățile necesare peste zonele de studiat. Acest procedeu solicită din partea operatorului o îndemînare deosebită atît pentru aplicarea pudrei în mod uniform cît

şi pentru a evita arderea lacului în timpul încălzirii piesei, necesară topirii şi întinderii lacului.

Pentru a elimina dificultăţile întîmpinate la procedeul precedent, în varianta cu pudră email, pudra este mai întîi dizolvată în acetonă şi apoi pulverizată peste suprafaţa structurii după care se topeşte stratul de lac cu ajutorul unui arzător cu flacără. Se obţine astfel mult mai uşor un strat de lac uniform.

c) *Lacul SNECMA*. Societatea Naţională pentru Studiul şi Construcţia Motoarelor de Aviaţie (SNECMA) din Franţa a pus la punct acest procedeu folosind pentru încercări calitative o răşină sub formă de pulbere, iar pentru încercări cantitative, un lac lichid. Ceea ce caracterizează acest procedeu este că se aplică un singur lac de aceeaşi compoziţie, lac, a cărui prag de deformaţie (sensibilitate) este variat prin diferite tratamente termice [15].

Se aplică răşina sub formă de pulbere pe proba încălzită cu raze infraroşii. Praful presărat pe piese se topeşte şi curge. Stratul de lac este foarte sensibil şi dă o imagine foarte clară a fisurilor. Valorificarea cantitativă a cîmpului de fisuri nu este posibilă, deoarece încălzirea suprafeţei piesei nu poate fi făcută uniform, deci grosimea lacului nu este constantă, ca urmare, pragul de deformaţie a lacului diferă de la un punct la altul.

Cu ajutorul acestui procedeu se poate determina numai cîmpul tensiunilor maxime şi direcţia tensiunilor principale în această regiune.

Lacul folosit pentru analiza cantitativă a tensiunilor este fabricat din răşini sintetice dizolvate în solvenţi organici (benzol, alcool, tricloretilenă) [10].

Răşinile şi solvenţii se amestecă la rece în cantităţi egale. Aplicarea lacului se poate face cu pulverizatorul sau cu pensula. Grosimea stratului de lac trebuie să fie de cca. 0,1 mm. Uscarea lacului se face la temperaturi cuprinse între 40 şi 100°C, timp de 1—24 ore, în funcţie de dimensiunile piesei [10]. Temperatura cuptorului de uscare trebuie menţinută constantă iar răcirea să se facă încet. În funcţie de temperatura şi durata uscării pragul de deformaţie a lacului poate varia între 3,5 şi 13×10^{-4}.

d) *Lacul Brafa*. Preparat de firma Braunschweiger Z. Müller GmbH &CoKG (R.F.G.) în trei grupe de sensibilitate (grupele A, B, şi C) în funcţie de temperatura la care se face încercarea, lacul Brafa se prezintă sub formă de batoane lungi de 15 cm cu secţiunea de 2,5 × 2,5 cm. În vederea aplicării lui pe suprafaţa piesei de cercetat este indicat, ca batoanele să fie preîncălzite la 30°C, pentru a nu se rupe la aplicare. Piesa ce urmează a fi cercetată se preîncălzeşte cu ajutorul unei lămpi de lipit sau a unui arzător, la cca. 140°C (temperatura de topire a lacului) [22]. Temperatura adecvată se verifică prin tamponarea batonului de lac de suprafaţa piesei încălzită în prealabil. Acesta se topeşte şi aderă într-un strat destul de gros (200—300 microni) pe suprafaţa piesei. Dacă batonul se lipeşte, temperatura este prea mică. Dacă prin topire devine fluid şi se degajă un fum puternic, temperatura este prea mare; în acest caz există pericolul degradării lacului.

Aplicarea lacului se face prin mişcări rotative ale batonului. După aceea se uniformizează stratul de lac cu ajutorul unei flăcări, pînă ce acesta prezintă o suprafaţă netedă.

Importantă este temperatura de încercare, care trebuie să fie de cca. 30°C pentru lacul Brafa de tip A, cca. 20°C pentru tipul B şi de cca. 10°C pentru lacul de tip C [22].

Datorită modului de aplicare a lacului, gosimea acestuia nu este suficient de uniformă, fapt pentru care acest lac se utilizează numai pentru determinări calitative.

Dacă în timpul răcirii lacului se aud uşoare pocnituri, este un semn că au apărut primele fisuri întîmplătoare (datorate contracţiei lacului). În acest caz trebuie începută imediat experimentarea pentru a se împiedica extinderea acestora. Pentru punerea în evidenţă a fisurilor se foloseşte o vopsea albă Brafa. Dacă fotografierea cîmpului de fisuri este stînjenită de aspectul lucios al suprafeţei lacului, aceasta se va acoperi cu o dispersie de ceară Brafa pentru evitarea efectului de reflexie a luminii.

e) *Lacul Stresscoat.* Elaborat de către firma Magnaflux, lacul Stresscoat este unul dintre cele mai utilizate lacuri casante. Are compoziţia arătată în tabelul 7.1.

Prin combinarea în diferite proporţii a elementelor componente se obţin lacuri cu pragul de deformaţie dorit pentru anumite condiţii de încercare. Aceste lacuri sînt furnizate cu echipament complet cuprinzînd : aparat de pulverizat, dispozitiv de etalonare, butelii cu lacuri de fragilitate diferită, solvenţi pentru curăţirea suprafeţelor sau eventuala diluare a lacului, pecum şi soluţii pentru punerea mai uşoară în evidenţă a cîmpului de fisuri din stratul de lac.

Alegerea lacului se face, în funcţie de temperatura de încercare şi pragul de deformaţie, cu ajutorul unei diagrame de selecţie (care însoţeşte echipamentul) în modul arătat la § 7.2.2 a.

Pragul de deformaţie al acestor lacuri este de $2..30 \times 10^{-4}$ [14] şi corespunde domeniului elastic al celor mai utilizate metale. Aplicarea lacului pe piesă se face prin pulverizare, ceea ce permite obţinerea unui strat de grosime uniformă şi, deci, posibilitatea valorificării mai bune a cîmpului de fisuri.

În urma încercărilor făcute, în ultimii ani, s-a stabilit că lacurile Stresscoat pot fi folosite şi în cazul solicitărilor dinamice deoarece sensibilitatea la fisurare (pragul de deformaţie) a acestor lacuri nu se schimbă cînd alungirea corespunzătoare a piesei este atinsă în 2×10^{-3} secunde. Folosind o tehnică de sensibilizare, descrisă la § 7.6.4, pragul de deformaţie al acestui lac poate fi coborît pînă la 50 μcm/cm [14]. Lacurile din familia Stresscoat cu un prag de deformaţie cuprins între 200—600 μcm/cm, pot fi folosite şi pentru determinarea tensiunilor remanente [14].

f) *Lacul TENS—LAC.* Fabricat de firma Photolastic (S.U.A.) în unsprezece grupe de sensibilitate corespunzător condiţiilor atmosferice de încercare, se prezintă sub formă lichidă [21]. Alegerea lacului potrivit pentru o anumită încercare, se face pe baza diagramei de selecţie ce însoţeşte

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.1.

Reţete de lacuri casante date în literatura de specialitate

Nr. crt.	Autorul	Compoziţia			Pragul de deformaţie x10^{-3}	Observaţii
		Răşină	Solvent	Plastifiant		
0	1	2	3	4	5	6
1	Dietrich [4]	Lac special	—	—	0,2—0,9	—
2	Cymboliste și Portevin [1]	Copal (Manilla, Zanzibar' Congo, Madagascar, Sandarac) Fenoli (bachelită, colofoniu etc.) trataţi.	Alcool (etil, metil, butil, amil). Eter (acetat de amil, acetat de butil, etilglicol) Hidrocarburi (toluen, xilen).	—	—	—
3	Gonciarov [11]	Colofoniu 50 %	alcool metalic 50 %	se adaugă 1—5 % parafină	1,0—2,0	Se aplică cu pensula
4	Salmon [17]	Colofoniu 4 părţi Răşină dammar 1 parte. Răşină sintetică	— Benzen, alcool, tricloretilenă	— —	0,01 0,5	Formă solidă pulverizat
5	Guyot [12]	Colofoniu 300 g Colofoniu 300 g	Acetonă 1 l Acetonă 1 l	Tricrezilfosfat 10 cc. Trirezilfosfat 3 cc.	0,05	pulverizat
6	Taira [20]	Răşină fenolică, alb de titan şi nitroceluloză	Benzen, toulen, xilen	—	0,27—2,5	Pulverizat
7	Nakahara şi Murota [16]	Colofoniu calcinat, alb de titan şi răşină fenolică	Benzen, toluen, xilen	Ftalat de dibutil	5,0—30,0	Pulverizat
8	Stresscoat [9]	Colofoniu şi 6 % oxid de zinc	Sulfură de carbon	Ftalat de dibutil	0,2—3,0	Pulverizat

Scanned with OKEN Scanner

trusa de lacuri; temperatura şi umiditatea în timpul experimentării sînt hotărîtoare.

Înainte de aplicarea lacului pe suprafaţa piesei sau structurii, se acoperă suprafaţa acesteia cu un strat de grund de aluminiu reflectorizant, care se usucă în aproximativ 30 minute. Aplicarea lacului se face prin pulverizare în straturi foarte subţiri, la intervale de cel puţin 2 minute între straturi; ultimul strat se aplică la iterval de 15 minute de penultimul. Cele mai bune rezultate se obţin cînd grosimea finală a stratului de lac este cuprinsă între 0,04 şi 0,1 mm. Aprecierea grosimii stratului se face după culoare cu ajutorul unor etaloane. Uscarea lacului se face în timp de 24 ore la o temperatură cu cca. 5°C peste temperatura la care se va face încercarea.

Pragul de deformaţie normal al lacului este de 500 μcm/cm fiind afectat de variaţiile de temperatură şi umiditate. Pentru fiecare procent de creştere a umidităţii pragul de deformaţie creşte cu 5 μcm/cm, iar pentru fiecare grad de creştere a temperaturii pragul de deformaţie creşte cu cca. 60 μcm/cm [21]. De aici necesitatea de a alege lacul potrivit condiţiilor de încercare şi păstrarea acestor condiţii pe tot timpul încercărilor.

O caracteristică importantă a acestui lac este posibilitatea de a fi reutilizat [21]. Dacă cu o piesă acoperită cu lac trebuie făcute mai multe încercări de acelaşi tip, lacul poate fi utilizat cel puţin la două încercări procedîndu-se astfel: se acoperă piesa cu lac, se usucă şi se foloseşte lacul care are o grosime de cca. 0,05 mm în zona de studiat. Se face încercarea şi se obţine cîmpul de fisuri. Pentru încercarea următoare nu se înlătură lacul ci se aplică unul sau două straturi suplimentare din acelaşi lac (care închide fisurile existente), pînă la o grosime totală de 0,07—0,1 mm. După uscarea care durează cca. 24 ore, se poate face a doua încercare. Barele de etalonare trebuie tratate în acelaşi mod.

La Institutul de cercetări şi proiectări tehnologice în transporturi (I.C.P.T.T.) a fost folosit acest tip de lac pentru încercări a căror rezultate au fost comparate cu cele obţinute utilizînd tensometria electrică, la încercările pe stand efectuate la carcasa autoportantă a locomotivei diesel hidraulică de 2400 CP construită de Uzinele,, 23 August'' Bucureşti pentru R.D.G. Valorile deformaţiilor măsurate cu lacul casant, au fost sensibil apropiate de cele obţinute cu ajutorul traductoarelor rezistive. Fotografia din fig. 7.1 prezintă un aspect din timpul efectuării măsurărilor amintite mai sus (lac casant + traductoare electrice rezistive). Cu ocazia acestor încercări a fost verificată şi proprietatea de reutilizare a lacului, obţinîndu-se rezultate bune.

g) *Lacul All-Temp.* Acest lac este elaborat tot de firma Magnaflux şi constă din particule de praf ceramic în suspensie într-un solvent. În această formă poate fi pulverizat, cu ajutorul tehnicilor cunoscute, pe piesa sau structura ce face obiectul cercetării. După uscarea la temperatura camerei, lacul are aspectul de cretă şi nu poate fi folosit. Pentru a-l face utilizabil trebuie încălzit la temperatura de 550°C pînă cînd particulele ceramice se topesc şi fuzionează.

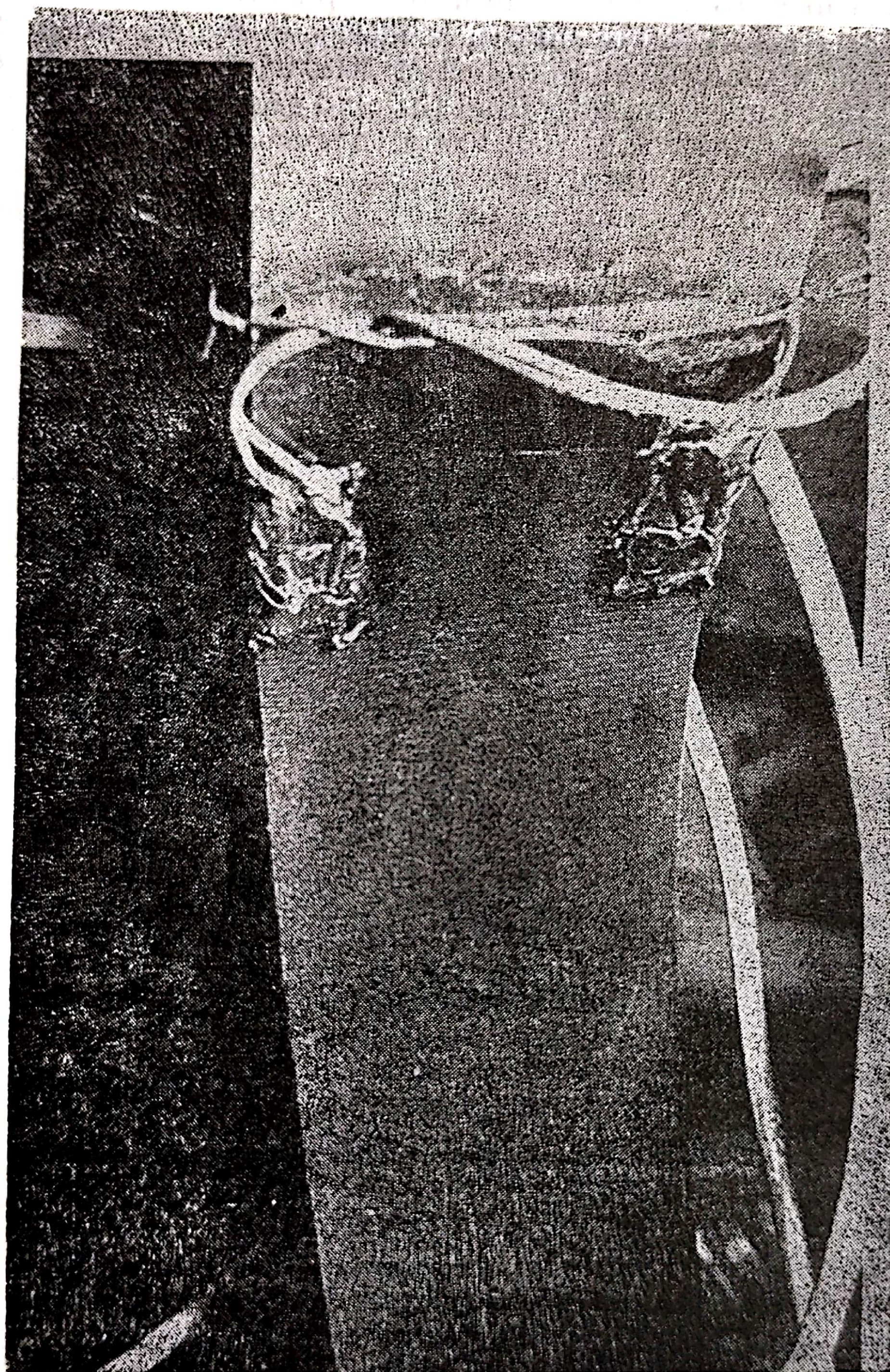


Fig. 7.1.

Scanned with OKEN Scanner

Lacul poate fi încălzit rapid pentru că topirea și fuziunea se produc aproape instantaneu la temperatura de încălzire; controlul temperaturii de încălzire este însă dificil. Cînd este astfel încălzit, lacul are un aspect lucios și culoare cafenie. Lacurile sînt furnizate în mai multe sorturi, alegerea unui anumit sort făcîndu-se în funcție de pragul de deformație necesar și de materialul piesei de cercetat cu ajutorul unei diagrame de selecție livrată împreună cu trusa de lacuri [14].

Acest lac ceramic prezintă numeroase avantaje față de lacurile pe bază de rășini. În primul rînd, spre deosebire de lacurile pe bază de rășini, este, practic, insensibil la schimbările mici de temperatură în timp ce lacurile pe bază de rășini sînt foarte sensibile chiar la variații foarte mici de temperatură.

Lacul All-Temp poate fi folosit pînă la temperaturi de 375°C ceea ce depășește cu mult limita de 40°C ce poate fi atinsă la lacurile pe bază de rășini.

În fine, lacurile pe bază de ceramică nu sînt influențate de prezența uleiului sau apei în mediul în care se face încercarea.

Dezavantajele constau în temperatura ridicată (550°) necesară încălzirii lacului, ceea ce este greu de realizat fără producerea unor efecte nedorite asupra piesei de studiat. Piesele fabricate din aluminiu, magneziu, materiale plastice și oțeluri tratate termic se degradează prin procesul de încălzire. Dacă piesa este de mari dimensiuni un cuptor capabil să asigure o temperatură constantă de 550°C nu este oricînd la îndemînă. O supraîncălzire de 15°C va produce o fierbere care distruge lacul, în timp ce o subîncălzire de 15°C va produce numai o uscare parțială a lacului. Un alt dezavantaj al lacului All-Temp constă în faptul că observarea vizuală a cîmpului de fisuri nu este posibilă; pentru vizualizarea acestuia fiind necesară folosirea metodei Statiflux descrisă la § 7.4.

h) *Rețete de lacuri casante.* Deși este cunoscut că cele mai multe lacuri casante sînt preparate pe bază de rășini naturale sau sintetice, combinate în anumite proporții, cu un solvent și un plastifiant, firmele producătoare mențin o discreție totală în privința compoziției exacte a lacurilor prezentîndu-le sub diferite denumiri comerciale. În tabelul 7.1 sînt extrase din literatura de specialitate rețetele pentru cele mai utilizate lacuri casante.

7.2.2. TEHNOLOGIA APLICĂRII LACURILOR CASANTE

Utilizarea cu succes a lacurilor casante la analiza experimentală a tensiunilor depinde, în mare măsură, de folosirea unei tehnologii corecte atît la efectuarea lucrărilor pregătitoare cît și la efectuarea încercărilor propriu zise.

Măsuri pregătitoare. a) *Pregătirea suprafeței.*

În general lacurile casante sînt folosite cu succes pe toate tipurile de suprafețe de metal, sticlă, lemn și materiale plastice.

Țunderul și grăsimile existente pe aceste suprafețe trebuie curățate. De asemenea, orice vopsea care este afectată de diferiți solvenți, folosiți în lacurile casante, trebuie înlăturată. Curățirea suprafeței poate fi reali-

zată folosind o perie rotativă din sîrmă, un polizor sau prin sablare cu nisip. Înlăturarea grăsimilor se face, de regulă, cu un solvent. După efectuarea tuturor operaţiilor de curăţire se va şterge din nou suprafaţa cu o cîrpă curată, fără scame, înmuiată într-un solvent. Lacul aplicat anterior poate fi curăţat mecanic prin răzuire, cu peria rotativă din sîrmă sau prin sablare cu nisip.

b) *Aplicarea grundului de aluminiu.* Aplicarea pe suprafaţa curăţată a unui strat de grund de aluminiu pigmentat asigură un fond uniform al tuturor zonelor piesei, indiferent dacă suprafaţa este mată sau lucioasă.

Această uniformitate ajută la aprecierea mai corectă a grosimii stratului de lac în timpul aplicării acestuia. În acelaşi timp, sînt reduse zgîrieturile şi neregularităţile, care ar putea semăna cu cîmpul de fisuri.

Stratul de aluminiu se aplică cu ajutorul unui pistol de pulverizare, de cele mai multe ori, livrat împreună cu trusa de lacuri. După aplicarea stratului de grund care trebuie să fie foarte subţire, asigurînd un film uniform şi neted, se va aştepta aproximativ 30 de minute pentru uscare.

O atenţie deosebită se va acorda filetelor şi altor zone dificile unde pot rezulta straturi mai groase ce se usucă mai lent. Dacă se consideră necesar, se poate prelungi timpul de uscare cu încă 15 minute.

Alegerea şi aplicarea lacurilor. Modul de aplicare al lacurilor casante pe suprafaţa pieselor ce urmează a fi cercetate depinde de starea fizică a lacului.

În § 7.2.1. au fost menţionate cîteva procedee. În cele ce urmează va fi expusă tehnologia de aplicare a unui lac lichid, care de regulă este livrat în recipiente sau în butelii de tip „Spray"; aplicarea pe suprafaţa piesei de încercat făcîndu-se în ambele cazuri pe principiul pulverizatorului cu aer comprimat.

a) *Alegerea lacului.* Alegerea lacului casant depinde de temperatura la care se face încercarea şi de pragul de deformaţie necesar. În cazul lacului Stresscoat, cînd stratul de lac este uscat la temperatura de încercare, pragul de deformaţie este de aproximativ 500 μcm/cm [14]. Prin creşterea, de exemplu, cu 24 ore a timpului de uscare peste timpul normal de 18 ore, acest prag poate fi coborît pînă la 150 μcm/cm.

Firma Magnaflux, pentru lacurile ce le produce, prezintă o diagramă cu ajutorul căreia se pot selecta lacurile în funcţie de temperatura de încercare şi de sensibilitatea dorită (fig. 7.2.). Această diagramă arată că pentru valori mai scăzute ale pragului de deformaţie se va folosi un lac cu un număr mai ridicat. Lacurile cu număr mai scăzut pot fi utilizate pentru valori mai ridicate ale pragului de deformaţie.

Variaţia sensibilităţii la deformaţie este de aproximativ 175 μcm/cm pentru fiecare 5 unităţi din numărul lacului, la o valoare a pragului de deformaţie de 500 μcm/cm. La valori mai mici ale pragului de deformaţie variaţia sensibilităţii este mai mare, în timp ce la valori mai mari ale pragului de deformaţie această variaţie este mai mică pe număr de lac.

Pentru lacurile din familia Stresscoat, la o temperatură a mediului ambiant de 21°C, lacul ST–50 începe să formeze cîmpuri de fisuri la aproximativ 1100 μcm/cm. În aceleaşi condiţii de temperatură lacul ST–75

va începe formarea cîmpului de fisuri la 350 μcm/cm. Totuşi, sensibilitatea de 500 μcm/cm este considerată o sensibilitate optimă; lacurile cu număr mai mare decît numărul optim pentru o anumită temperatură pot forma cîmpuri de fisuri întîmplătoare, în timp ce lacurile cu număr mai

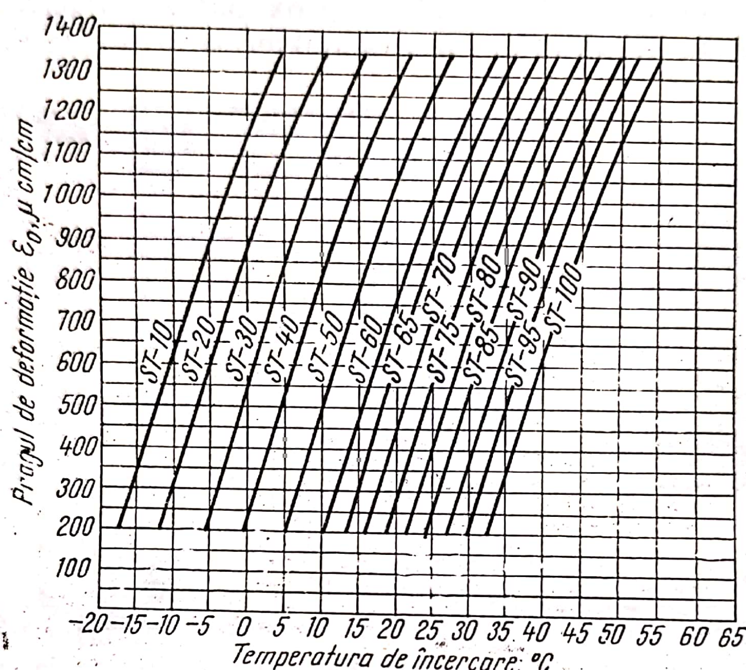


Fig. 7.2.

scăzut vor forma cîmpuri de fisuri care se vor închide după înlăturarea sarcinii.

Schimbarea temperaturii lacului afectează sensibilitatea acestuia; o creştere a temperaturii va înmuia lacul făcîndu-l mai puţin sensibil, descreşterea temperaturii face lacul mai casant deci mai sensibil. Variaţia sensibilităţii lacului cu schimbarea temperaturii în cazul lacurilor Stresscoat este de aproximativ 55 μcm/cm pentru 1°C.

Prin amestecarea a două lacuri cu numere diferite, în funcţie de proporţii, se pot obţine lacuri intermediare.

Toate numerele consecutive de lacuri diferă printr-o creştere egală a fragilităţii. De exemplu, amestecînd părţi egale din lacurile ST−50 şi ST−60 se obţine lacul echivalent ST−55. Două părţi din lacul ST−70 plus trei părţi din lacul ST−75 va produce un lac echivalent cu numărul ST−73.

b) *Aplicarea lacului.* Aplicarea pe suprafaţa piesei a lacului casant lichid, prin pulverizare (fig. 7.3.), este cea mai larg răspîndită avînd avantajul că se realizează o grosime uniformă a stratului de lac. În acelaşi timp o mulţime de bule mici de aer sînt introduse în stratul de lac, bule ce ajută la formarea unor cîmpuri de fisuri mai regulate [14].

Aerul de alimentare a pulverizatorului nu trebuie să conţină ulei sau apă. Vaporii de ulei şi picăturile de apă reduc fragilitatea lacurilor. Dacă

se utilizează o sursă normală de aer, înainte de pulverizare, se va face o purjare. Pentru înlăturarea vaporilor de ulei şi a picăturilor de apă, unele firme, producătoare de lacuri casante, livrează şi compresoare de aer de tip diafragmă.

Presiunea aerului trebuie să fie aproximativ 2,5 daN/cm². Duza se ţine cam la 10 cm de piesă în timp ce pulverizatorul este deplasat paralel



Fig. 7.3.

cu piesa. Se începe pulverizarea puţin înainte de capătul piesei şi se continuă puţin dincolo de celălalt capăt. Pulverizatorul este totdeauna în mişcare cît timp duza este deschisă.

Pentru obţinerea grosimii corecte a stratului de lac sînt necesare între 10 şi 20 de treceri ale pulverizatorului peste zona ce se studiază [5], [14].

Primele treceri se caracterizează prin formarea unor pete punctiforme care devin tot mai numeroase după fiecare trecere. În trecerile următoare punctele fuzionează formînd o suprafaţă la început aspră iar în final netedă.

În acelaşi timp culoarea lacului se schimbă căpătînd o tentă gălbuie care arată că grosimea stratului este suficientă. Grosimea stratului uscat trebuie să fie între 0,10 şi 0,15 mm [14]. Se recomandă ca primele treceri să se facă peste suprafaţa întregii piese, după care se va continua cu zonele ce urmează a fi cercetate.

În cele din urmă se vor acoperi părţile filetate şi alte zone cu neregularităţi. La acoperirea suprafeţelor mai complicate se va evita excesul de material pulverizat, care se manifestă prin formarea unui praf deasupra acestor zone. Dacă nu este abundent, acest praf poate fi lăsat pînă după uscarea lacului şi va fi înlăturat prin ştergerea cu o cîrpă moale înainte de începerea încercării. În zonele de o formă complexă formarea prafului mai poate fi evitată prin adăugarea la lacul obişnuit a unei cantităţi de

10—25% diluant înainte de pulverizare. Adăugarea diluantului nu afectează în mod simţitor valoarea pragului de deformaţie al lacului uscat. Bara de etalonare (v. § 7.3.1.) trebuie tratată în mod similar cu piesa.

Cavităţile mici ori adînci, pot fi acoperite prin reducerea presiunii aerului de alimentare, pînă la 1—1,75 daN/cm², la care lacul iese cu o forţă foarte mică aşezîndu-se uşor în cavităţile adînci.

Este de dorit ca pulverizarea să se facă la o temperatură egală sau superioară celei la care se va face încercarea. Dacă se lucrează în atmosferă umedă, vaporii de apă se pot uneori, condensa în lacul pulverizat, producînd o decolorare ce crează dificultăţi în detectarea cîmpului de fisuri. Încălzirea piesei la aproximativ 50°C înainte de acoperire elimină acest inconvenient. Dacă aplicarea lacului se face la o temperatură inferioară celei de încercare piesa va fi încălzită, la temperatura de încercare, înainte de pulverizarea lacului şi se va reîncălzi, dacă este cazul, pentru menţinerea acestei temperaturi.

c) *Uscarea lacului*. Lacul casant trebuie uscat la o temperatură mai ridicată decît cea de încercare, în funcţie de care a fost ales. În cazul lacului Stresscoat, cînd încercarea se face în interior, la o temperatură de 22—24°C, se recomandă uscarea lacului la temperaturi între 30—40°C, timpul de uscare fiind de aproximativ 18—20 ore.

Acoperirea cu lac în cursul după-amiezii şi încercarea piesei în dimineaţa următoare este o practică obişnuită. Acest ciclu de uscare reduce la minimum variaţia sensibilităţii lacului în funcţie de grosimea stratului depus. În cazuri excepţionale uscarea se poate face şi în 6—8 ore, cu condiţia ca grosimea stratului de lac să fie de 0,075—0,125 mm. Straturile mai groase nu se pot usca suficient dacă temperatura de uscare este sub 40°C. Temperatura maximă de uscare a lacului nu trebuie să depăşească 60°C. Peste această temperatură suprafaţa lacului devine prea uscată ceea ce produce o modificare a pragului de deformaţie.

Cînd se impune o accelerare a procesului de uscare se recomandă următoarele etape de uscare [14]: 4 ore la 40°C, 2 ore la 50°C şi 1 oră la 60°C. Înainte de fiecare treaptă de încălzire se va menţine piesa la temperatura camerei timp de 30 minute. După uscare sînt necesare 1—3 ore pentru a aduce piesa la temperatura de echilibru cu atmosfera de încercare. Piesele mai grele necesită un timp de uscare mai lung decît cele uşoare.

7.2.3. UTILIZAREA LACURILOR CASANTE ÎN CAZUL PIESELOR DE GROSIME MICĂ (MICROTEHNICA)

Tehnicile de utilizare a lacurilor casante aplicate în cazul pieselor (structurilor) de dimensiuni obişnuite denumite şi macrotehnici, nu sînt recomandate în cazul pieselor foarte subţiri sau miniaturale pentru că în aceste cazuri grosimea uzuală de 0,1—0,125 mm a stratului de lac, poate uneori să fie mai mare decît grosimea elementului de cercetat. Traductoarele rezistive deşi astăzi au ajuns la dimensiuni foarte reduse, nu sînt încă suficient de mici pentru o serie de elemente ca: membrane, elemente de mecanică fină etc. În ceea ce priveşte acoperirile fotoelastice, acestea îşi pierd din sensibilitate cînd sînt foarte subţiri.

La Battelle Memorial Institute (S.U.A.) a fost pus la punct o așa zisă *microtehnică* [23] de folosire a lacului casant de tip Stresscoat obișnuit, la piese minuscule, prin realizarea uni strat de lac foarte subțire și miniaturizarea întregului echipament auxiliar.

Miniaturizarea constă în reducerea la o anumită scară a întregului echipament folosit atît pentru aplicarea lacului cît și pentru etalonarea acestuia. Dispozitivul de etalonare este astfel construit încît poate fi plasat în cîmpul vizual al unui microscop. Bara de etalonare este încorporată în dispozitivul de încărcare astfel că bara nu trebuie scoasă pentru a verifica sensibilitatea la deformație a lacului. Pentru obținerea unui strat de lac cu grosimea finală cuprinsă între 0,0125 și 0,0250 mm, se folosește un pulverizator mic cu posibilitate de reglare fină atît a debitului de aer cît și a debitului de lac.

Alegerea lacului. La alegerea lacului ce urmează să fie folosit cu această tehnică, se are în vedere faptul că lacurile în straturi foarte subțiri sînt mai puțin sensibile decît cele cu o grosime recomandată în mod uzual. De aceea se alege un lac mai sensibil decît cel utilizat pentru încercări obișnuite.

Operațiile cele mai critice sînt aplicarea lacului (prin pulverizare) și obținerea grosimii corespunzătoare a stratului de lac.

Lacurile aplicate prin această tehnică nu formează bule de aer, și sînt complet transparente, fapt pentru care regularizarea grosimii stratului devine destul de dificilă.

Uscarea lacului se face la temperaturi cu 5—8°C peste temperatura camerei, ceea ce reduce sau elimină complet apariția fisurilor întîmplătoare. Barele de etalonare trebuie tratate în același mod cu proba ce face obiectul cercetării.

Pentru creșterea sensibilității lacurilor utilizate în *microtehnică* se folosește metoda de sensibilizare prin răcire descrisă la § 7.6.4.

7.2.4. COMPORTAREA LACURILOR CASANTE

Valoarea tensiunilor din materialul de bază, în zona unde s-a aplicat stratul de lac, poate fi aproximată prin observarea fisurilor ce se formează în lac. Există două căi ce pot fi urmate în interpretarea cîmpului de fisuri. Prima constă în determinarea deformației minime necesară fisurării lacului într-o stare de tensiune monoaxială și folosirea acestei valori pentru calcularea tensiunilor în piesă. A doua metodă constă în stabilirea unei relații între densitatea fisurilor (numărul de fisuri pe unitatea de lungime) în stratul de lac, și mărimea tensiunii în piesă [5]. Știind că densitatea fisurilor este proporțională cu mărimea tensiunii [15], regiunile mai puternic solicitate au o densitate mai mare a cîmpului de fisuri. Prima metodă este cea mai frecvent utilizată.

Există mulți factori care influențează comportarea lacului casant. Durelli, Phillips și Tsao enumeră 40 de asemenea factori [5] dintre care următorii 6 sînt considerați a fi cei mai importanți.

— compoziţia lacului, dată de către fabricant prin numărul de lac (ex. Stresscoat 1207);
— temperatura de uscare;
— grosimea stratului de lac;
— condiţiile atmosferice în timpul încercării;
— relaţia sarcină — timp şi
— cîmpul de tensiune.

În continuare se va arăta în ce fel factorii de mai sus influenţează comportarea lacului şi ce căi trebuie urmate în programul de încercări pentru a ţine semă de influenţa acestora.

a) *Influenţa compoziţiei lacului.* După cum s-a mai arătat majoritatea lacurilor casante au ca principale elemente componente răşini, solvenţi şi un plastifiant.

Creşterea cantităţii de plastifiant în compoziţia lacului măreşte deformaţia necesară fisurării stratului de lac (deci pragul de deformaţie creşte, iar sensibilitatea lacului scade).

În cazul lacului Stresscoat, aşa cum s-a menţionat la § 7.2.2, fabricantul evidenţiază cantitatea de plastifiant din lac prin numerele de lac, care încep de la lacul cel mai puţin sensibil ST—1160 pînă la lacul cel mai sensibil ST—1215. Pentru cercetările cu ajutorul lacurilor casante efectuate în laborator la temperaturi variind de la 15°C la 30°C sînt recomandate lacurile de la 1202 la 1210. Pentru încercări în aer liber în perioada lunilor de iarnă, lacurile din seria 1100 sînt cele mai indicate. Influenţa compoziţiei lacului, potrivit numărului de lac, asupra pragului de deformaţie ε_0 este arătat în fig. 7.4., pentru un lac Stresscoat cu următoarele caracteristici [2]: grosimea stratului de lac 0,15 mm, temperatura de uscare 24°C, timpul de uscare 18 h, umiditatea la uscare 40%, temperatura de încercare 24°C şi umiditatea la încercare 40%.

Diagrama prezentată în fig. 7.4 poate fi utilizată pentru alegerea numărului corect al lacului pentru un prag de deformaţie dat. Cele două

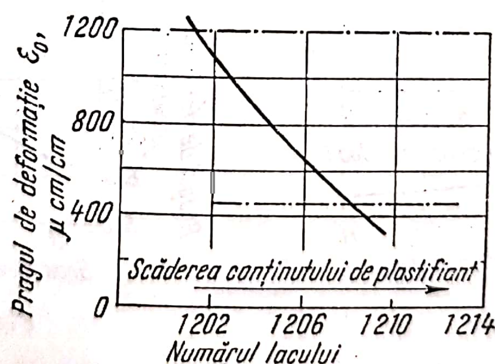


Fig. 7.4.

linii orizontale corespunzătoare lui ε_0 egal cu 450, respectiv 1200 μcm/cm, arată limitele inferioară şi superioară ale pragului de deformaţie. La praguri de deformaţie peste 1200 μcm/cm tensiunile remanente în lac sînt atît de scăzute încît fisurile nu vor rămîne deschise după înlăturarea

sarcinii. Pentru pragurile de deformaţie mai jos de 400 sau 450 μcm/cm, lacul, adesea, formează microfisuri în etapele finale de uscare. Aceste microfisuri sau fisuri întîmplătoare ale lacului casant se datoresc tensiunilor remanente din stratul de lac, tensiuni ce depăşesc limita de rezistenţă a lacului (pragul de deformaţie).

Modificarea conţinutului de plastifiant poate afecta valoarea pragului de deformaţie [9], modificînd mărimea tensiunilor remanente, produse în lacul casant, cînd acesta se contractă în timpul procesului de uscare, precum şi modulul de elasticitate al lacului, influenţînd în felul acesta valoarea tensiunilor în stratul de lac.

b) *Influenţa uscării şi grosimii stratului de lac.* Nu se poate vorbi de uscarea lacului şi de grosimea stratului de lac în mod separat, ambele fiind corelate în influenţa pe care o au asupra comportării lacului. Timpul necesar uscării lacului depinde de temperatura şi umiditatea în camera de uscare şi de grosimea stratului de lac [3].

În curba din fig. 7.5. este arătată pierderea în greutate a solventului CS_2 în funcţie de timpul după pulverizare pentru un lac Stresscoat 1206, cu grosimea stratului de 0,23 mm, uscat la temperatura de 24°C, cu umiditatea atmosferei de 40% [2].

După aproximativ 20 ore, cea mai mare parte din CS_2 s-a evaporat şi lacul este suficient de sensibil pentru a reacţiona la deformaţie; totuşi lacul mai reţine încă ceva din solvent, chiar după patru zile de uscare.

Micile cantităţi de CS_2 rămase în lac după timpul normal de uscare de 20 ore înmoaie lacul şi tinde să-i reducă sensibilitatea. Dacă grosimea stratului de lac variază, cantitatea de CS_2 ce rămîne în lac variază proporţional cu grosimea; prin urmare, cu creşterea grosimii şi creşterea cantităţii de CS_2 rămasă în stratul de lac, pragul de deformaţie creşte, cum este arătat de curba din fig. 7.6, curbă trasată pentru un lac Stresscoat 1205,

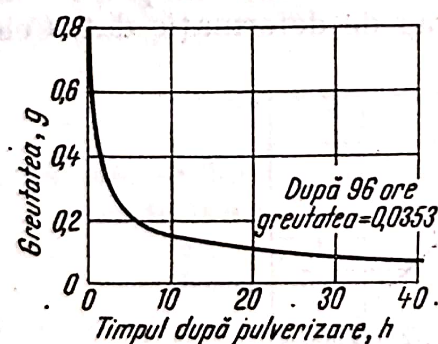


Fig. 7.5.

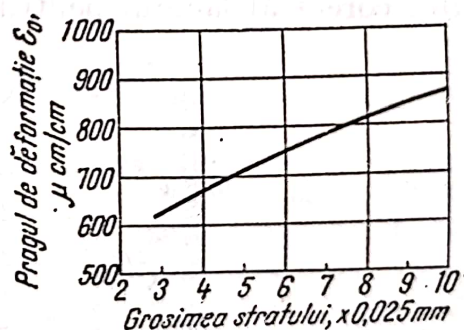


Fig. 7.6.

uscat timp de 22 ore la temperatura de 24°C şi umiditate de 40% şi încercat în aceleaşi condiţii de temperatură şi umiditate [2].

Influenţa grosimii stratului de lac asupra pragului de deformaţie este destul de importantă dacă ţinem seama că în aplicaţiile practice variaţii de ± 0,025 pînă la ± 0,05 mm a grosimii lacului sînt obişnuite. Variaţiile de ± 0,025 mm pentru un lac cu o grosime medie de 0,15 mm ar da o

variaţie a pragului de deformaţie cuprinsă între 725 şi 775 μcm/cm în comparaţie cu valoarea medie de 750 μcm/cm.

În scopul de a reduce perioadele lungi de uscare, lacurile casante sînt adesea uscate în cuptoare la temperaturi mai ridicate, în jur de 50°C, cu umiditate de aproximativ 5%. Prin acest mod de uscare, conţinutul de CS_2 este eliminat în cca. 2 ore. Cînd piesa acoperită este scoasă din cuptor, lacul absoarbe umezeala din aer. Curba din fig. 7.7 reprezintă umezeala absorbită în funcţie de timp pentru un lac Stresscoat 1204, cu grosimea stratului de 0,23 mm, uscat timp de 15 ore, la temperatura de 52°C, umiditate de 5% şi încercat la temperatura de 24°C şi umiditatea de 40% [2].

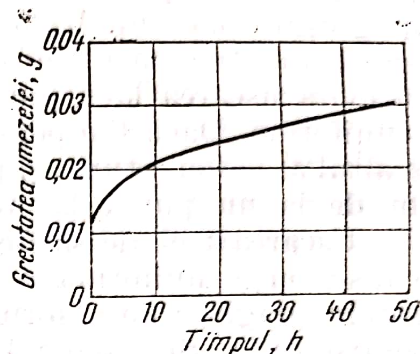
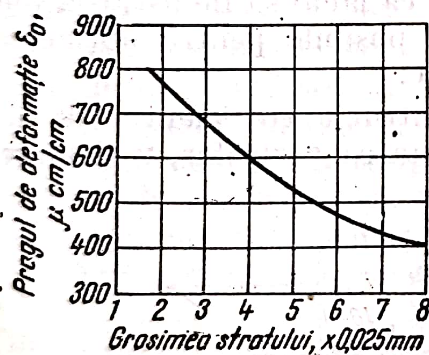


Fig. 7.7.

Pragul de deformaţie ε_0 a lacului tratat termic este influenţat de umezeala absorbită din aer. Straturile mai subţiri se înmoaie, datorită umezelii, înaintea straturilor mai groase; de aceea ele sînt mai puţin sensibile.

Influenţa grosimii stratului asupra pragului de deformaţie la un lac uscat la temperatură ridicată este arătată de curba din fig. 7.8, a, curbă trasată pentru un lac Stresscoat 1205 uscat timp de 17 ore la temperatura de 46°C şi răcit timp de 5 ore pînă la temperatura de încercare de 24°C şi umiditate de 40% [2].



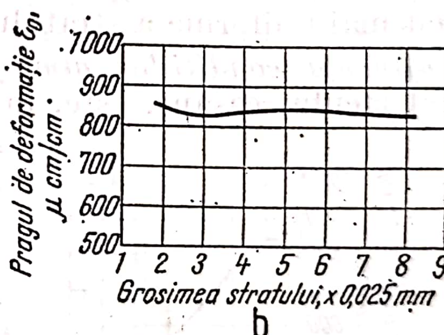


Fig. 7.8.

Avînd în vedere dificultăţile întîmpinate în menţinerea unei grosimi uniforme a stratului de lac, din motivele arătate mai sus, uscarea lacurilor casante la temperaturi ridicate nu este recomandată.

S-a arătat că uscarea la temperatura camerei produce un lac a cărui sensibilitate descreşte cu creşterea grosimii (v. fig. 7.6), în timp ce uscarea la temperaturi ridicate produce un lac a cărui sensibilitate creşte cu creşterea grosimii (v. fig. 7.8, a). Uscînd lacul la o temperatură moderată de 25°C pînă la 30°C timp de cca. 20 ore, se poate găsi o soluţie intermediară celor precedente pentru obţinerea unui lac care să fie relativ insensibil la variaţiile grosimii stratului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele procesului de uscare moderată sînt arătate în fig. 7.8, b, unde pragul de deformaţie este trasat ca o funcţie de grosimea lacului Stresscoat 1205 [2], uscat timp de 17 ore la o temperatură de 28°C apoi răcit timp de 5 ore pînă la temperatura de încercare de cca. 24°C şi umiditate de 40%.

Ori de cîte ori este posibil, se recomandă ca operatorul să usuce lacul între 25 şi 30°C pentru a elimina erorile introduse de inevitabilele variaţii ale grosimii lacului. La uscarea moderată este necesară luarea de măsuri pentru menţinerea piesei la o temperatură uniformă pe timpul uscării. Se va evita uscarea lacurilor cu lămpi de încălzire care produc temperaturi neuniforme. Dacă temperatura de uscare a lacului variază de la un punct la altul al piesei, atunci şi proprietăţile lacului vor varia în mod corespunzător de la un punct la altul.

Uscarea trebuie să fie realizată într-un cuptor sau o cameră care are o distribuţie uniformă a temperaturii. Influenţa temperaturii de uscare asupra pragului de deformaţie este arătată în fig. 7.9. Curba este trasată pentru un lac Stresscoat 1205 cu grosimea stratului de 0,127 mm, încercat la temperatura de 24°C şi umiditate de 40% [2].

În anumite cazuri lacul trebuie tratat termic pentru a-l face foarte sensibil, necesar încercării materialelor cu limită de elasticitate scăzută.

Cînd conţinutul de plastifiant este redus excesiv, lacul fisurează în timpul uscării cînd ε_0 este aproximativ 400 μcm/cm. Prin tratarea termică a lacurilor la temperaturi ridicate (55—60°C) şi răcire foarte lentă la temperatura de încercare, în jur de 24°C, se pot obţine praguri de deformaţie de 200 μcm/cm. Cînd este absolut necesar ca lacul să fie uscat la temperatură ridicată, se vor lua toate măsurile posibile pentru obţinerea unei grosimi cît mai uniforme a stratului de lac.

c) *Influenţa condiţiilor atmosferice.* Întrucît coeficientul de dilatare termică al lacului casant, este, în majoritatea cazurilor, mai mare decît

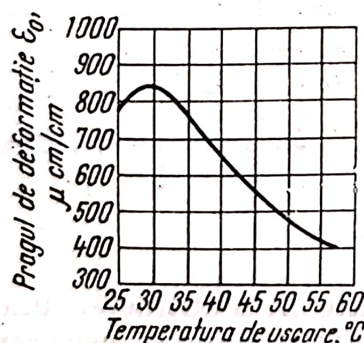


Fig. 7.9.

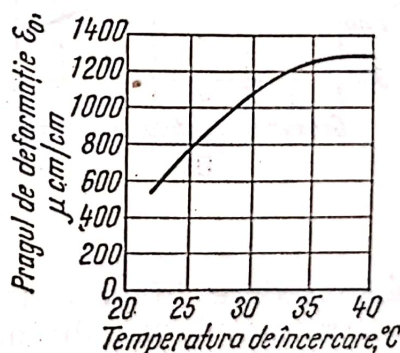


Fig. 7.10.

coeficientul de dilatare al pieselor pe care se aplică, lacul este foarte sensibil la schimbări de temperatură.

Curba din fig. 7.10 ilustrează influenţa temperaturii de încercare asupra pragului de deformaţie la un lac Stresscoat 1205, cu grosimea stratului de 0,15 mm, uscat la temperatura de 28°C [2].

Scanned with OKEN Scanner

La o schimbare de 1°C, a temperaturii de încercare, se produce o modificare de aproximativ 60 μcm/cm a pragului de deformație.

Ca urmare, pentru a obține rezultate concludente laboratorul în care se fac încercările trebuie să aibă posibilitatea de reglare a temperaturii. Dacă, din anumite motive, piesa trebuie încercată în aer liber sau în hale unde temperatura nu poate fi menținută constantă se iau măsuri pentru a diminua erorile cauzate de schimbările temperaturii și anume : 1). Dacă încercările se fac în aer liber schimbările de temperatură pot fi reduse prin efectuarea încercărilor în perioada zilei cu maxim de temperatură (după-amiază). 2) Încercările se vor efectua cît mai rapid posibil pentru a scurta intervalul de timp în care temperatura s-ar putea schimba. 3) Efectuarea de etalonări continue ale lacului cu scopul ca pragul de deformație să poată fi stabilit ca o funcție de timpul și temperatura din perioada încercării.

În afară de temperatură, modificările de umiditate din atmosferă influențează calitățile lacului deși condițiile de umiditate din timpul uscării par a fi mai importante decît condițiile de umiditate din timpul încercărilor. Aceasta se datorează elementului timp implicat în efectele modificărilor de umiditate. Absorbția sau pierderea apei este un proces de difuzie relativ lent [2]; dacă încercările cu lac casant pot fi realizate rapid, influența modificărilor de umiditate poate fi redusă.

d) *Relația sarcină-timp și influența sa asupra pragului de deformație.* Pragul de deformație ε_0 al lacurilor casante, stabilit după metoda descrisă la § 7.3., depinde de relația sarcină-timp. Această relație este ilustrată de curba din fig. 7.11, care arată că, la etalonare, deformarea barei incastrate se face în mai puțin de o secundă [2]. Această bară este apoi menținută în poziție deformată timp de cca. 15 s înainte de a fi relaxată. Dacă încărcarea piesei de încercat nu poate fi realizată în același mod, etalonarea trebuie corectată.

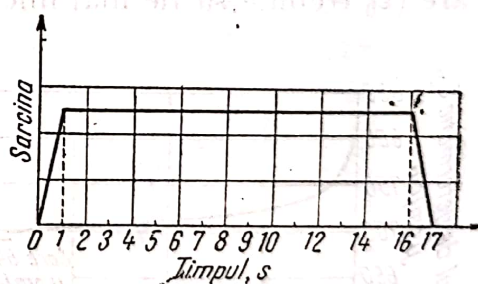


Fig. 7.11.

Cînd sarcina este aplicată lent asupra piesei, lacul manifestă efecte vîscoelastice [2] și tensiunile dezvoltate în stratul de lac se relaxează într-o anumită măsură, datorită aplicării lor lente. Efectul general al acestei relaxări în stratul de lac este creșterea valorii deformației piesei necesară fisurării lacului. Acest efect poate fi luat în considerație după recomandările făcute de firma Magnaflux [14] prin corectarea corespunzătoare a valorii lui ε_0 folosind datele din curbele prezentate în fig. 7.12, pentru corectarea pragului de deformație, sau folosind relația [2]

$$\varepsilon_0' = [1 + 0{,}05\,(\log \cdot t)^2]\varepsilon_0 \tag{7.1}$$

pentru t cuprins între 1 şi 1000 s, în care :

ε_0' este valoarea corectată a pragului de deformaţie ;

ε_0 — valoarea pragului de deformaţie determinată prin etalonare urmînd relaţia sarcină-timp prezentată în fig. 7.11 ;

t — timpul necesar aplicării sarcinii.

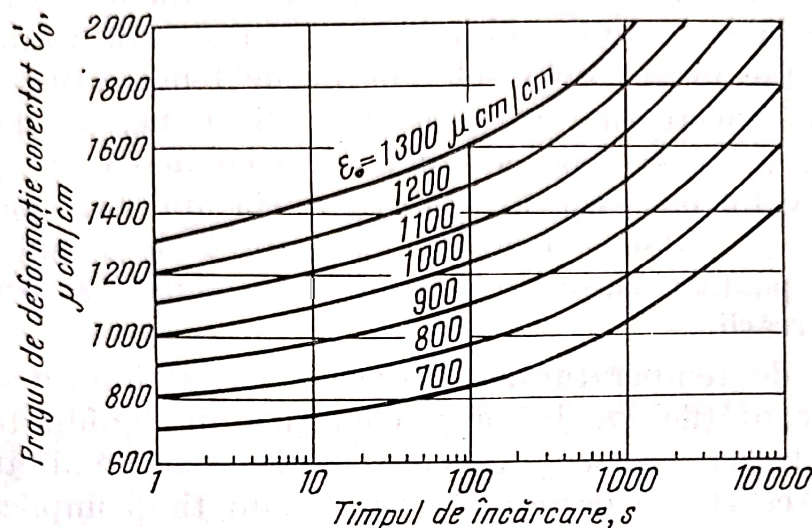


Fig. 7.12.

Dat fiind că aceste corecţii sînt relativ mari după o perioadă de 100 s (v. fig. 7.12), trebuie luate măsuri de aplicare a sarcinii în mai puţin de 2 minute.

Lacurile casante pot fi utilizate şi pentru analiza tensiunilor în cazul solicitărilor dinamice. În acest caz trebuie luate următoarele măsuri :

— lacul trebuie să fie mai sensibil decît cel folosit în mod normal la solicitări statice, pentru a fi siguri că fisurile rămîn deschise după încărcare (ε_0 trebuie să fie mai mic de 700 μcm/cm). Cîmpurile de fisuri se vor forma şi vor rămîne vizibile chiar dacă durata de menţinere a sarcinii este numai de 4 sau 5 milisecunde ;

— trebuie făcută corecţia etalonării statice a lacului pentru a ţine seama de durata de încărcare.

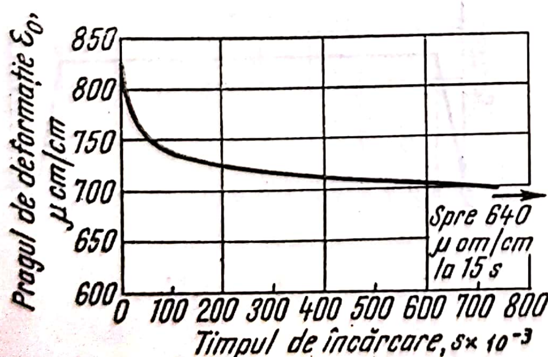


Fig. 7.13.

Influenţa duratei de încărcare asupra pragului de deformaţie este arătată de curba din fig. 7.13.

Folosind datele din diagrama prezentată în fig. 7.13 se pot face corecţiile corespunzătoare ale pragului de deformaţie.

e) *Efectele cîmpului de tensiune.* Relaţia cea mai frecvent folosită pentru interpretarea datelor obţinute la încercările cu lac casant este

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_0 \tag{7.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care:

σ_1 este tensiunea principală maximă în piesă;

E — modulul de elasticitate al materialului piesei.

Această relaţie neglijează efectele biaxiale datorate lui σ_2.

La etalonare se consideră $\sigma_2 \approx 0$ şi $\varepsilon_2 \approx - \mu\varepsilon_1$; în practică, în majoritatea cazurilor σ_2 este diferit de 0.

Rezultatele unor serii de încercări la care cîmpul biaxial de tensiuni din piesă a variat într-un domeniu larg a arătat că σ_2^0 reduce valoarea lui σ_1^0, necesară fisurării lacului; de aici rezultă că datele obţinute utilizînd formula (7.2) sînt numai informative.

7.3. ETALONAREA LACURILOR

7.3.1. TEHNICA DE ETALONARE

Curbele *izoentatice**) trasate pe conturul închis al cîmpului de fisuri la o anumită sarcină de încărcare, reprezintă linii de tensiune constantă separînd zonele fisurate de cele nefisurate ale lacului. Pentru stabilirea tensiunii corespunzătoare fiecărei curbe izoentatice este necesară etalonarea lacului pentru a determina pragul de deformaţie ε_0. Această etalonare se face prin deformarea unor bare — special pregătite — cu ajutorul

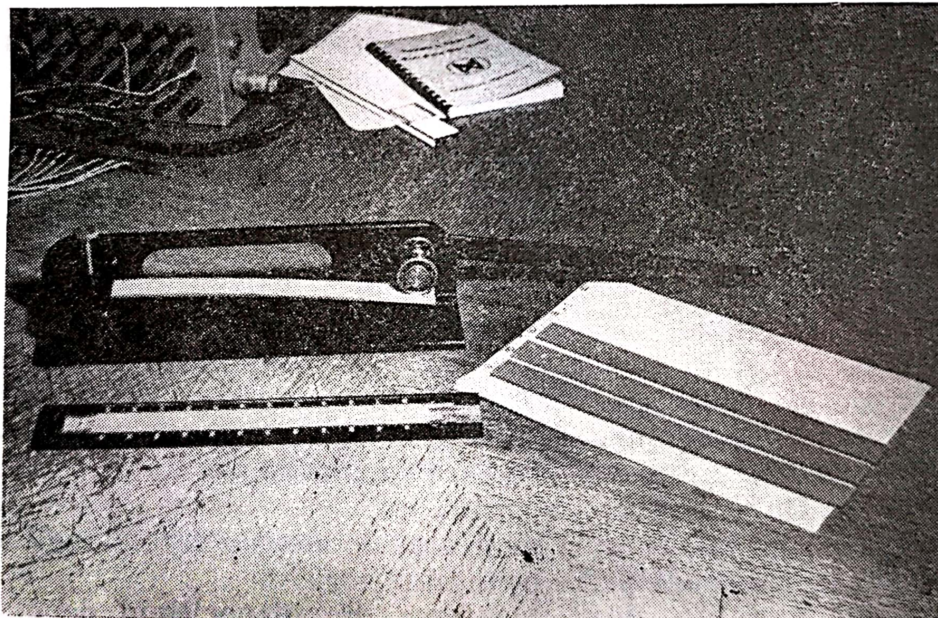


Fig. 7.14.

unui dispozitiv de etalonare. În fig. 7.14 se prezintă fotografia dispozitivului realizat în acest scop la I.C.P.T.T. Bucureşti.

---

* Liniile izoentatice trasate pentru o sarcină dată reprezintă locul geometric al punctelor avînd aceeaşi tensiune principală σ_1. Ele se obţin prin unirea punctelor de vîrf a curbelor izostatice ce formează cîmpul de fisuri pentru o anumită sarcină.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru obţinerea unei valori concludente a pragului de deformaţie etalonarea trebuie repetată de 5—10 ori pe perioada încercărilor, după care se face o evaluare statistică.

Firmele furnizoare de lacuri casante livrează şi barele de etalonare necesare. Dat fiind că ceea ce se măsoară sînt deformaţiile şi nu tensiunile, barele de etalonare nu ţin seamă de materialul piesei de încercat. Se acoperă, se usucă şi se încearcă barele o dată cu piesa sau structura ce face obiectul cercetării. Precizia etalonării depinde, în primul rînd, de menţinerea barelor de etalonare în aceleaşi condiţii de temperatură şi umiditate ca şi piesa sau structura. Barele de etalonare se vor manipula ţinîndu-le de capete, fără a atinge lacul care poate fi afectat de grăsimi şi de variaţia de temperatură.

a) *Tehnica de etalonare pentru măsurarea deformaţiilor de întindere.* Aceasta cuprinde următoarele operaţii :

— se acoperă cu lac bara de etalonare şi se usucă lacul în mod corespunzător ;

— se înlătură lacul pe o porţiune de 25 mm la fiecare capăt al barei de etalonare ;

— se aşează bara în dispozitivul de etalonare astfel ca faţa acoperită cu lac să fie solicitată la întindere. Se reglează şurubul de fixare pînă ce bara atinge cama ;

— se roteşte cama complet, într-o secundă, şi se marchează fisura cea mai apropiată de camă ;

— se înlătură sarcina şi se pune bara de etalonare în scala de deformaţii, unde în dreptul fisurii marcate se citeşte pe scală valoarea pragului de deformaţie (v. fig. 7.14).

b) *Tehnica de etalonare pentru măsurarea deformaţiilor de compresiune.* În acest caz tehnica este mai complexă şi se poate realiza în două variante :

1°. Se acoperă bara de etalonare cu lac, şi se aşează în dispozitivul de etalonare cu faţa acoperită în jos. Se roteşte complet cama şi se menţine bara în stare deformată pînă la uscarea lacului. Readucerea camei şi deci a barei în poziţia iniţială va permite formarea fisurilor, în mod similar cu cele ce apar la tehnica obişnuită de etalonare la întindere.

2°. Se acoperă bara cu lac şi se usucă în mod obişnuit. Se aşează în dispozitivul de etalonare cu faţa acoperită în jos şi se deformează bara prin rotirea completă a camei. Se menţine bara în această stare deformată timp de aproximativ 2 ore, timp în care stratul de lac curge, tinzînd să se relaxeze, pînă atinge o stare de echilibru. La sfîrşitul acestei perioade slăbirea camei va produce fisuri în stratul de lac, similare cu cele formate prin tehnicile de calibrare prezentate anterior.

În ambele variante, după scoaterea din dispozitivul de etalonare, bara este pusă în scala de deformaţii unde se marchează şi se citeşte pragul de deformaţie.

7.3.2. VERIFICAREA PRECIZIEI ETALONĂRII

Verificarea preciziei etalonării lacurilor casante se face — de regulă — cu ajutorul traductoarelor rezistive. În acest scop, după încercarea piesei sau structurii cu metoda lacului casant, se aplică două traductoare

Scanned with OKEN Scanner

rezistive pe o linie izoentatică, prima perpendiculară pe o izostatică iar a doua paralelă la aceasta (fig. 7.15, a).

Se încarcă piesa cu sarcina la care s-a obţinut izoentatica şi se citesc deformaţiile înregistrate de cele două traductoare. Cu deformaţiile astfel determinate se calculează valoarea tensiunilor principale folosind relaţiile (1.25 b).

Odată tensiunile principale determinate, pragul de deformaţie al lacului se poate calcula cu relaţiile

$$\varepsilon_{0-1} = \frac{\sigma_1^p}{E_p}$$
$$\varepsilon_{0-2} = \frac{\sigma_2^p}{E_p} \qquad (7.3)$$

unde ε_{0-1} şi ε_{0-2} sînt pragurile de deformaţie ale lacului casant pentru cele două familii de izoentatice.

O metodă mai simplă pentru verificarea etalonării lacurilor casante cu ajutorul traductoarelor rezistive (v. fig. 7.15, b), a fost elaborată în laboratorul de tensometrie al ICPTT din Bucureşti şi constă din : (*1*) aplicarea unui număr de traductoare*) pe una din barele de etalonare ; (*2*) deformarea barei cu ajutorul dispozitivului de etalonare ; (*3*) înregistrarea cu ajutorul unei punţi tensometrice a deformaţiilor specifice în dreptul fiecărui traductor de pe bara etalon ; (*4*) trasarea diagramei de variaţie a deformaţiei specifice de-a lungul barei etalon ; (*5*) gradarea scalei de deformaţie conform datelor înregistrate.

Determinarea pragului de deformaţie al lacului aplicat pe barele etalon, folosind acelaşi dispozitiv de etalonare şi aceeaşi scală, constituie un mijloc de verificare a pragului de deformaţie comunicat de firma furnizoare a lacului.

Verificările efectuate în cazul unor lacuri furnizate de firma Magnaflux (Stresscoat) şi firma Photolastic (Tens-Lac) au confirmat eficacitatea metodei mai sus prezentată.

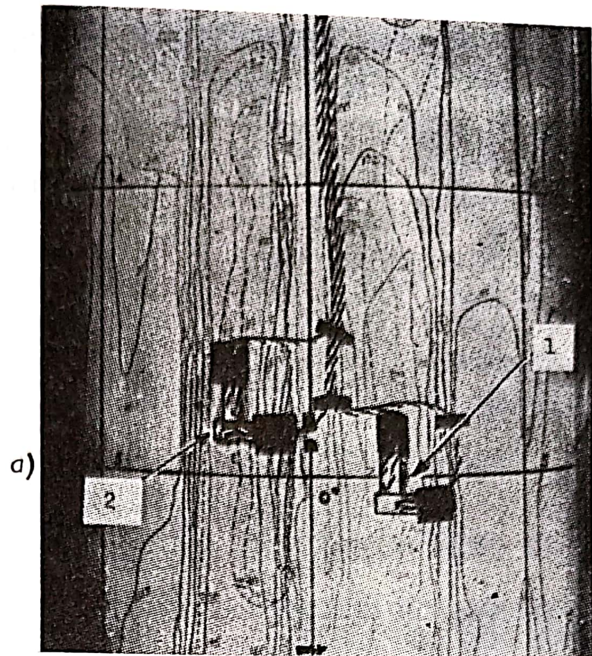
În curba din fig. 7.15, c sînt prezentate rezultatele comparative obţinute la verificarea — cu metoda amintită — a pragului de deformaţie comunicat de furnizor pentru lacul Stresscoat ST—75.

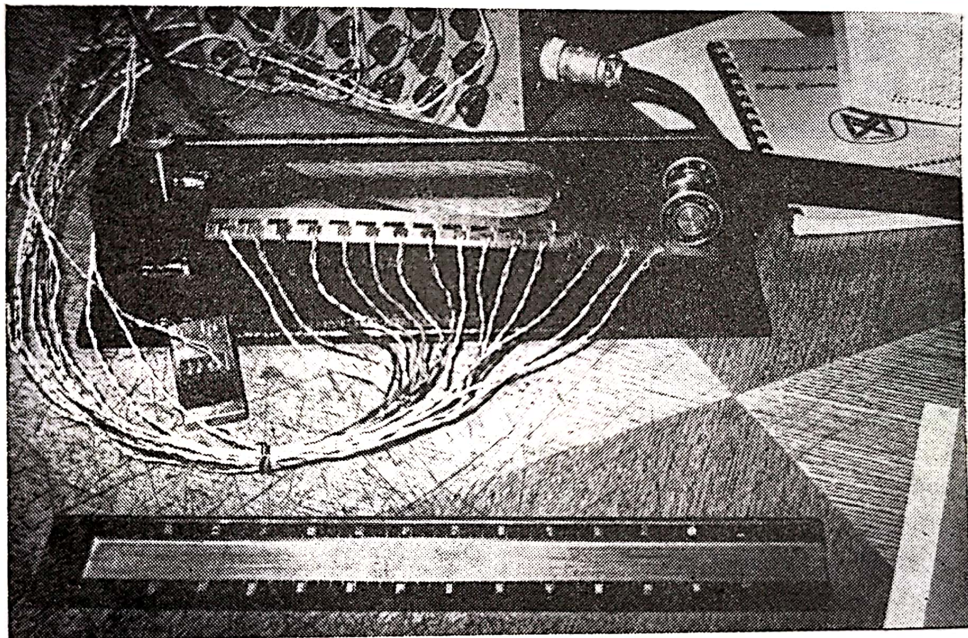
7.3.3. DETERMINAREA LIMITEI DE RUPERE A LACULUI CASANT (PRAGUL DE DEFORMAŢIE)

În timpul transformării lacului din stare lichidă în stare solidă, datorită contracţiei se produce o tensiune internă în stratul de lac. În anumite cazuri, această tensiune poate fi mai mare decît limita de rupere a lacului şi poate produce fisuri întîmplătoare. Fisurile întîmplătoare sînt fisuri orientate după toate direcţiile nefiind direcţii preferenţiate.

---

* La experimentările făcute, s-au aplicat un număr de 16 traductoare, care au acoperit în măsură satisfăcătoare regiunea de bară examinată.





b)

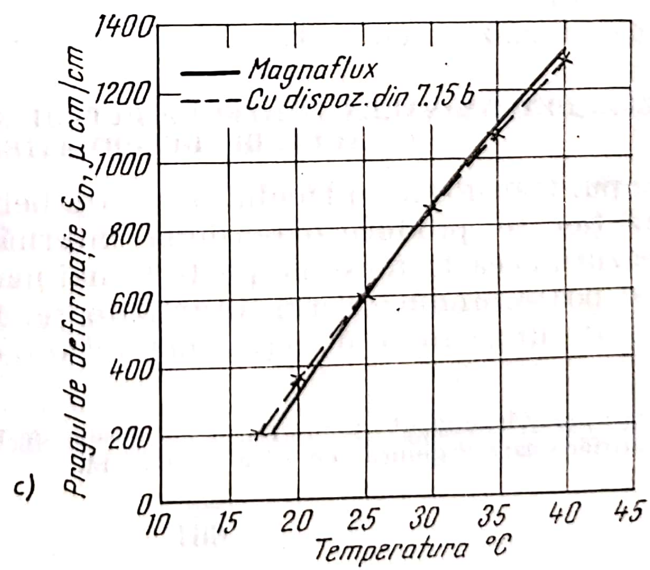


Fig. 7.15.

Scanned with OKEN Scanner

În cele mai multe cazuri, tensiunea internă nu este suficientă pentru a fisura lacul casant. Uneori după ce lacul se solidifică, datorită însuşirilor sale plastice, o parte din această tensiune internă va fi eliberată.

La o încercare efectuată corect răcirea trebuie să fie lentă astfel că o mare parte din tensiunea internă este eliberată. Cu toate acestea stratul de lac rămîne cu o tensiune remanentă σ_r^l.

Ipoteza de rupere a tensiunii maxime de întindere (ipoteza I-a), admite că stratul de lac casant va fisura cînd tensiunea principală maximă

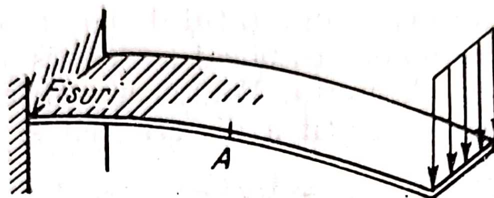


Fig. 7.16.

în lac este mai mare sau egală cu o valoare critică σ_r^l, definită ca rezistenţă de rupere a lacului casant.

Pentru bara de etalonare (fig. 7.16), dacă lacul începe să fisureze în punctul A, atunci σ_r^l trebuie să fie egal cu suma tensiunii remanente σ_R^l şi tensiunea aplicată σ_1^l.
adică

$$\sigma_r^l = \sigma_1^l + \sigma_R^l \tag{7.4}$$

cunoscînd că

$$\sigma_1^l = \frac{1-\mu^l\mu^c}{1-\mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 \quad \text{(v. § 7.5., relaţia (7.12))}$$

rezultă

$$\sigma_r^l = \frac{1-\mu^l\mu^c}{1-\mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 + \sigma_R^l \tag{7.5 a}$$

în care :

μ^c este coeficientul lui Poisson pentru materialul barei de etalonare;
ε_0 — deformaţia principală maximă în punctul A, numită şi prag de deformaţie la încărcare directă a lacului folosit;
μ^l — coeficientul lui Poisson pentru lac;
E^l — modulul de elasticitate al lacului.

Cunoscînd constantele μ^l, μ^c şi E^l precum şi valoarea ε_0 stabilită prin etalonare, se determină diferenţa

$$\sigma_r^l - \sigma_R^l = \frac{1-\mu^l\mu^c}{1-\mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 \tag{7.5 b}$$

Pe de altă parte pragul de deformaţie (ε_0') al lacului liber de orice tensiune remanentă, ($\sigma_R^l = 0$), este determinat de furnizor şi deci cunoscut. Introducînd în relaţia (7.5) valoarea pragului de deformaţie ε_0' pentru $\sigma_R^l = 0$, rezultă σ_r^l.

O dată stabilite mărimea σ_r^l şi diferenţa ($\sigma_r^l - \sigma_R^l$), se poate determina valoarea tensiunii remanente σ_R^l.

7.4. DETECTAREA FISURILOR ÎN STRATUL DE LAC

Reuşita unei încercări cu lac casant depinde de posibilităţile de localizare a fisurilor ce se formează în stratul de lac, în urma aplicării sarcinii exterioare. Dacă lacul este corect aplicat aceste fisuri vor rămîne deschise şi după ce sarcina este înlăturată. Pentru a utiliza în mod corect lacul casant în vederea cunoaşterii atît a direcţiei cît şi a mărimii tensiunilor

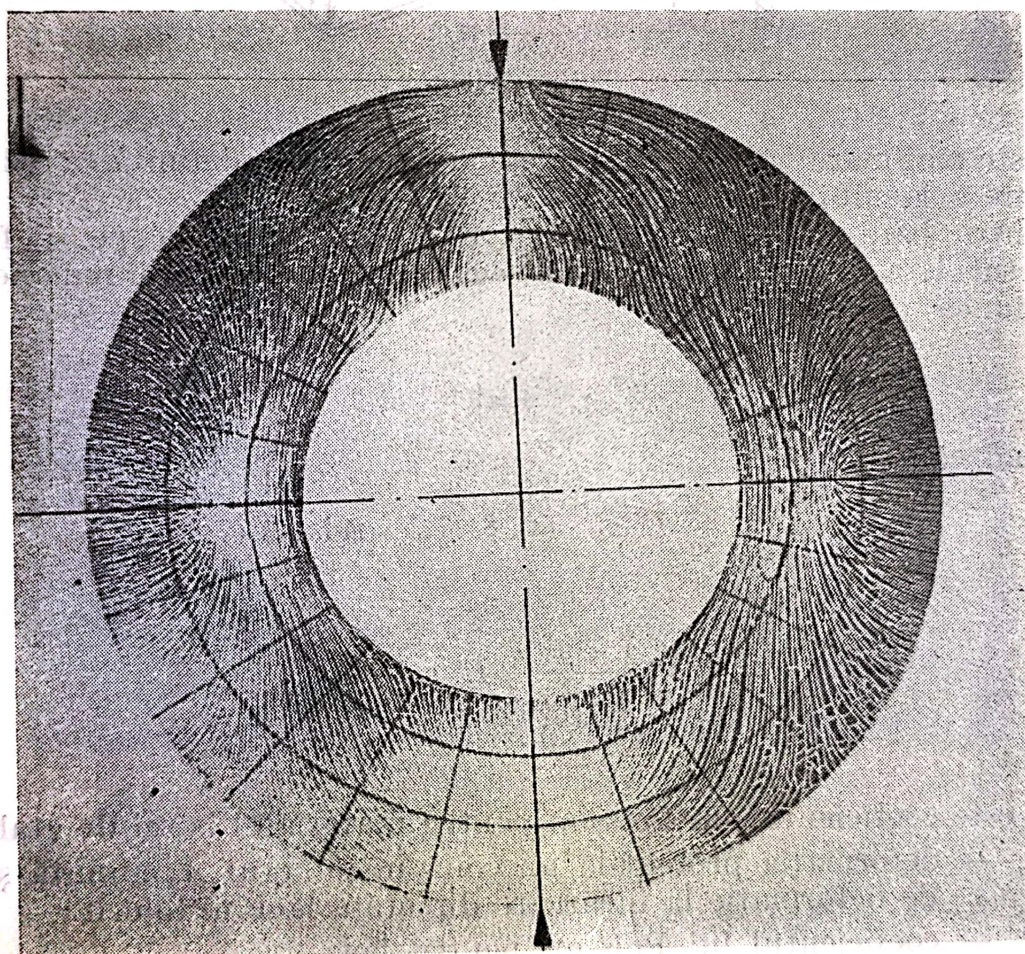


Fig. 7.17.

este necesară localizarea tuturor fisurilor şi înregistrarea valorii sarcinii la care acestea apar.

Fisurile produse sînt foarte fine, de regulă în formă de V, cu o adîncime egală cu grosimea stratului de lac şi o lăţime de aproximativ 0,05 pînă la 0,075 mm. Pentru a putea fi observate vizual, se foloseşte

o sursă de lumină focalizată îndreptată oblic pe suprafaţa piesei şi normală la direcţia fisurii [10]. Deseori locul, direcţia şi sarcina la care va apare prima fisură nu sînt cunoscute, din care cauză se cheltuieşte o mare parte din timp pentru localizarea fisurilor.

O metodă de examinare cu particule electrizate, care reduce în mare măsură timpul necesar localizării cîmpurilor de fisuri, a fost pusă la punct de firma Magnaflux sub denumirea comercială de Statiflux [14]. Pe suprafaţa de examinat se aplică un agent penetrant umed cu proprietăţi de electrolit moderat. Dacă există fisuri, agentul penetrant curge în acestea, le umple şi face contact electric cu metalul piesei. Suprafaţa piesei este apoi ştearsă cu un şerveţel. Această operaţie înlătură agentul penetrant de pe suprafaţa lacului dar nu şi din fisuri. În continuare, cu ajutorul unui pulverizator se aplică asupra stratului de lac o pudră de talc electrizată negativ chiar în timpul pulverizării. Particulele de pudră încărcate negativ sînt atrase electric spre agentul rămas în fisură. Pudra formează mici coline albe de-a lungul fisurilor şi oferă un mijloc bun de localizare a acestora.

Metoda mai poate fi folosită şi pentru fotografierea cîmpurilor de fisuri. Exemple tipice de folosire a metodei Statiflux sînt ilustrate în fig. 7.17 şi 7.18.

Principalul dezavantaj al metodei Statiflux de detectare a fisurilor constă în faptul că agentul trebuie aplicat şi îndepărtat în mod repetat pe stratul de lac (necunoscînd momentul în care apar fisurile).

Orice abatere de la aplicarea uniformă a agentului peste întreaga suprafaţă a lacului va produce schimbări de temperatură datorate vitezelor diferite de evaporare.

După cum s-a arătat (în § 7.2.4 c), schimbarea temperaturii trebuie evitată în orice analiză cantitativă cu lac casant.

Tot firma Magnaflux produce o vopsea corozivă ce poate fi folosită pentru a spori vizibilitatea cîmpului de fisuri, însă numai pentru scopuri fotografice. Vopseaua corozivă este un amestec de terebentină, valvolină şi vopsea roşie. Se aplică vopseaua corozivă pe suprafaţa lacului fisurat timp de un minut. În acest timp agentul coroziv atacă lacul la marginea fisurilor făcîndu-le mai largi. Dacă vopseaua corozivă este lăsată în contact cu lacul casant, o perioadă excesivă de timp, ea va ataca suprafaţa lacului. După ce vopseaua corozivă este ştearsă de pe suprafaţa lacului, acesta se curăţă cu o emulsie de apă şi săpun. Vopseaua care a pătruns în fisuri, nu este înlăturată în timpul procesului de curăţire ; astfel, fisurile apar ca nişte linii roşii pe un fond galben.

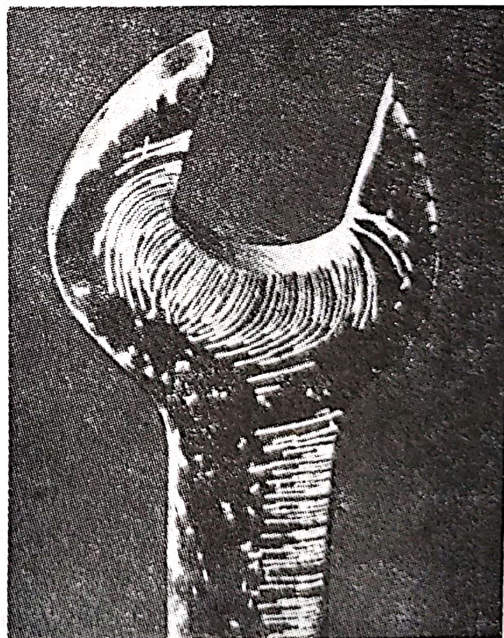


Fig. 7.18.

Folosirea vopselei corozive ca mijloc de detectare a fisurilor în timpul încercărilor nu este recomandată pentru că uleiurile existente în compoziția sa influențează comportarea lacului.

7.5. TENSIUNILE DIN STRATUL DE LAC CASANT

Dacă constantele elastice ale lacului și ale piesei de cercetat ar fi aceleași — în ipoteza că tensiunile remanente sînt nule — starea de tensiune existentă în stratul de lac ar fi aceeași cu starea de tensiune de pe suprafața piesei. Aceste constante fiind foarte diferite, cu ocazia uscării lacului, chiar semnul tensiunii apărute în lac poate fi uneori diferit de cel din piesă [5]. Grosimea stratului de lac fiind foarte mică (0,125—0,250 mm) tensiunile din stratul de lac perpendiculare pe suprafața acestuia pot fi neglijate, deci se poate admite că în stratul de lac există o stare plană de tensiune. Tensiunile din stratul de lac aplicat pe piesa de cercetat, se consideră egale cu tensiunile din stratul de lac aplicat pe bara de etalonare. Aceasta se poate obține prin menținerea piesei și a barei de etalonare împreună în timpul uscării lacului.

Se admite că adeziunea între stratul de lac și piesă este perfectă; ca urmare deformațiile în stratul de lac vor fi identice cu cele de la suprafața piesei, și direcțiile principale ale deformațiilor și tensiunilor în stratul de lac vor coincide cu cele ale piesei.

După ce stratul de lac a fost uscat la temperatura camerei, sau tratat într-un cuptor la temperatură ridicată (v. § 7.2.2.c), piesa este supusă la un sistem de încărcări care produce fisurarea stratului de lac.

Tensiunile din stratul de lac, ce produc cîmpul de fisuri, depind de valoarea tensiunilor din piesă.

Dat fiind că stratul de lac, așa cum s-a subliniat mai sus, este, de regulă, foarte subțire în raport cu grosimea piesei, se poate admite că deformațiile ce apar la suprafața piesei sînt transmise stratului de lac fără a fi modificate; mai mult, aceste deformații pot fi considerate uniforme pe grosimea acestuia.

S-a arătat că (§ 7.2.1) stratul de lac se fisurează cînd deformația lui specifică ajunge la valoarea critică numită *prag de deformație*, determinat prin etalonarea lacului în modul prezentat la § 7.3.1. Tensiunea principală în piesă, perpendiculară pe fisura în stratul de lac, se calculează folosind următoarea relație

$$\sigma_l^p = E^p \varepsilon_0 \tag{7.6}$$

unde:

σ_l^p este tensiunea principală de la suprafața piesei ce face obiectul cercetării, în locul fisurii din stratul de lac;

E^p — modulul de elasticitate al materialului piesei;

ε_0 — pragul de deformație necesar fisurării stratului de lac, cînd piesa este supusă la o stare de tensiune monoaxială.

Scanned with OKEN Scanner

Această relaţie pentru calculul tensiunilor principale fiind simplă, este larg acceptată ca fiind suficient de precisă; totuşi ea are un neajuns important; nu ţine seama de influenţa stării biaxiale de tensiuni asupra ruperii lacului, stare, care în practică există în majoritatea cazurilor.

Pentru a examina această influenţă a stării biaxiale de tensiuni, se consideră un element de secţiune care cuprinde atît stratul de lac cît şi de material din piesă (fig. 7.19).

Ţinînd seama că, aşa cum s-a menţionat mai sus, stratul de lac este relativ subţire în raport cu grosimea piesei, şi că aderenţa lacului pe supra-

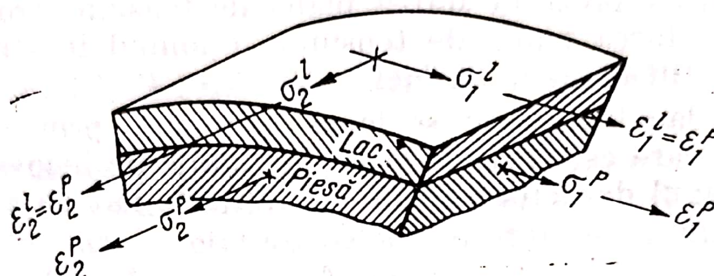


Fig. 7.19.

faţa piesei este perfectă, deformaţiile apărute la suprafaţa piesei sînt transmise practic fără modificare la stratul de lac [5]

astfel că $$\varepsilon_1^l = \varepsilon_1^p, \quad \varepsilon_2^l = \varepsilon_2^p \tag{7.7}$$

Se admite că: $$\sigma_3^l = \sigma_3^p = 0.$$

Se presupune deci că există o stare plană de tensiune atît în stratul de lac, cît şi în stratul de material de la suprafaţa piesei; ca urmare deformaţiile pot fi exprimate în funcţie de tensiuni folosind legea lui Hooke generalizată exprimată prin relaţiile (1.25 a). Aplicînd aceste relaţii la cazul de faţă rezultă:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^p &= \frac{1}{E^p}\left(\sigma_1^p - \mu^p \sigma_2^p\right) \\
\varepsilon_2^p &= \frac{1}{E^p}\left(\sigma_2^p - \mu^p \sigma_1^p\right) \\
\varepsilon_1^l &= \frac{1}{E^l}\left(\sigma_1^l - \mu^l \sigma_2^l\right) \\
\varepsilon_2^l &= \frac{1}{E^l}\left(\sigma_2^l - \mu^l \sigma_1^l\right)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ține seama de relațiile (7.7) rezultă umătoarele expresii pentru tensiunile principale din stratul de lac

$$\sigma_1^l = \frac{E^l}{E^p(1-\mu^{l2})}\left[(1-\mu^l\mu^p)\,\sigma_1^p + (\mu^l-\mu^p)\,\sigma_2^p\right]$$

$$\sigma_2^l = \frac{E^l}{E^p(1-\mu^{l2})}\left[(1-\mu^l\mu^p)\,\sigma_2^p + (\mu^l-\mu^p)\,\sigma_1^p\right] \qquad (7.9)$$

Aceste relații reprezintă starea plană de tensiuni produsă în stratul de lac de către starea plană de tensiuni acționînd în stratul superficial al piesei ce este în contact cu lacul.

Etalonarea lacului casant se face, de regulă, prin aplicarea sa pe o bară în consolă care este supusă la o deformație de încovoiere cunoscută (v. § 7.3.1). Pragul de deformație al lacului este dat de relația

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1^p \qquad (7.10)$$

Tensiunile în fibrele extreme ale barei pe care este aplicat lacul sînt date de relația

$$\sigma_1^p = E^p\,\varepsilon_1^p, \qquad \sigma_2^p = 0 \qquad (7.11)$$

Substituind relațiile (7.10) și (7.11) în relațiile (7.9) se obțin tensiunile în stratul de lac pentru bara de etalonare.

$$\sigma_1^l = \frac{E^l}{1-\mu^{l2}}(1-\mu^l\mu^c)\varepsilon_0 = \frac{E^l}{E^c(1-\mu^{l2})}(1-\mu^l\mu^c)\sigma_1^c$$

$$\sigma_2^l = \frac{E^l}{1-\mu^{l2}}(\mu^l-\mu^c)\varepsilon_0 = \frac{E^l}{E^c(1-\mu^{l2})}(\mu^l-\mu^c)\sigma_1^c \qquad (7.12)$$

în care :

μ^c este coeficientul lui Poisson pentru materialul din care este confecționată bara de etalonare;

σ_1^c — tensiunea monoaxială în bara de etalonare, necesară fisurării lacului casant;

E^c — modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată bara de etalonare.

Din relațiile (7.12) rezultă că starea monoaxială de tensiune în bara de etalonare produce o stare biaxială de tensiune în stratul de lac. Starea de tensiune biaxială apare ca urmare a diferenței dintre coeficientul de

Scanned with OKEN Scanner

contracție al lacului și cel al materialului din care este confecționată bara de etalonare.

Ca urmare, dacă coeficientul de contracție al lacului μ^l este mai mare decît cel al materialului structurii de cercetat, aceasta, este supusă unei tensiuni de compresiune transversală.

Coeficientul de contracție al lacurilor casante este, în general, cuprins între 0,4—0,5 [13] superior deci celui al oțelului. Pentru acest considerent, chiar dacă deformațiile piesei și lacului sînt aceleași, tensiunile pot fi diferite datorită valorilor diferite ale caracteristicilor elastice. De aici necesitatea etalonării lacurilor pe perioada încercărilor.

7.6. EXEMPLE DE CÎMPURI DE FISURI

Locul, succesiunea și direcția fisurilor în stratul de lac, într-o anumită zonă a piesei sau structurii, arată starea de solicitare: direcția tensiunilor principale iar în cazul determinărilor cantitative și mărimea acestor tensiuni în zona studiată.

Pentru o mai bună înțelegere a modului de interpretare a cîmpului de fisuri se prezintă următoarele exemple:

7.6.1. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN ÎNCĂRCARE DIRECTĂ

Se consideră următoarele trei cazuri [2].

Cazul 1: $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 < 0$.

În acest caz se formează fisuri numai după o direcție și anume, după direcția perpendiculară la σ_1 (v. fig. 7.20).

Aceste fisuri indică direcția tensiunii principale σ_2, în consecință fisurile reprezintă traiectorii de tensiune sau izostatice (σ_2).

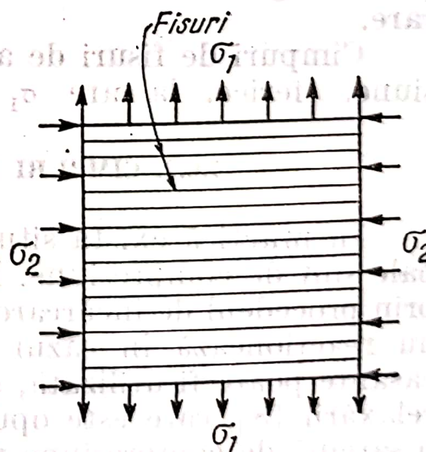


Fig. 7.20.

Cazul 2: $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$.

În acest caz se pot forma două familii de fisuri. Prima datorită lui σ_1 se formează perpendicular pe σ_1 și paralel cu σ_2. Cînd nivelul tensiunii σ_2 devine suficient de ridicat, o a doua familie de fisuri se va forma perpendicular pe σ_2 și paralel cu σ_1. Cînd ambele familii de fisuri sînt formate, se obține un cîmp de izostatice sau traiectorii de tensiune (fig. 7.21).

Cîmpurile de fisuri de acest tip sînt adesea întîlnite în încercarea porțiunii cilindrice a vaselor de presiune, unde σ_1 (tensiunea după circonferință) este de două ori mai mare decît σ_2 (tensiunea după axa cilindrului).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă presiunea în cilindru crește încet, primele fisuri în stratul de lac vor apare de-a lungul axei cilindrului și se vor datora lui σ_1.

Mai tîrziu ,după ce presiunea hidrostatică, acționînd asupra vasului cilindric, este mai mult decît dublă față de presiunea la care au apărut

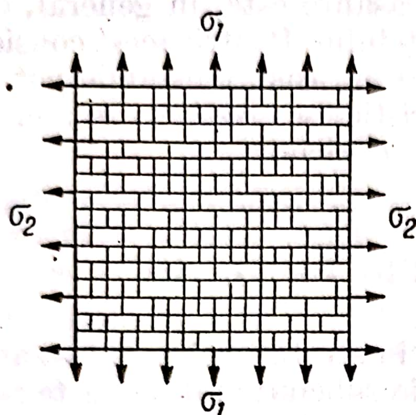


Fig. 7.21.

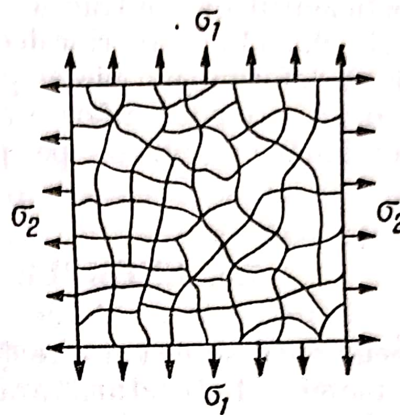


Fig. 7.22.

primele fisuri, o a doua serie de fisuri se va forma în direcție circulară datorită tensiunii σ_2.

Cazul 3 : $\sigma_1 = \sigma_2 > 0.$

Cînd $\sigma_1 = \sigma_2$, în orice punct de pe corp, există așa numita starea izotropică de tensiune și oricare direcție este o direcție principală. Dacă valorile lui σ_1 și σ_2 sînt suficient de mari, stratul de lac va fisura ; cîmpul de fisurare produs va avea un caracter întîmplător neavînd direcții preferențiate.

În fig. 7.22 este ilustrat în mod schematic acest tip de cîmp de fisurare.

Cîmpuri de fisuri de acest tip apar cînd sînt încercate vase, sub presiune, sferice, la care $\sigma_1 = \sigma_2$.

7.6.2. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN RELAXARE

În practică există situații cînd una sau chiar ambele tensiuni principale sînt de compresiune. În asemenea cazuri nu este posibil să se obțină prin procedeul de încărcare directă cîmpuri de fisuri, deoarece lacul casant nu reacționează în cazul tensiunilor de compresiune. Metoda lacurilor casante poate fi utilizată, și în asemenea cazuri, dacă se folosește tehnica relaxării [8], care este opusă procedeului de încărcare directă. Se aplică o sarcină de compresiune piesei acoperite cu lac, înainte de uscarea acestuia. Sarcina este menținută asupra piesei pînă la uscarea completă a lacului. În aceste condiții lacul este nesolicitat (neglijînd tensiunile remanente, care sînt totdeauna prezente în lac) , în timp ce piesa este puternic solicitată la compresiune. Dacă o parte din sarcină este înlăturată, piesa se va lungi, deoarece a fost în prealabil comprimată, iar în stratul de lac

vor apare tensiuni de întindere care sînt suficient de mari pentru a indica zonele de solicitare la compresiune ale piesei. În felul acesta relaxarea sarcinii din piesă inversează tensiunile în stratul de lac și permite determinarea cu suficientă precizie a tensiunilor de compresiune ce apar în piesă.

7.6.3. CÎMPURI DUBLE DE FISURI

Cînd lacurile casante sînt folosite pe modele din plastic, se pot obține ambele familii de fisuri suprapuse pe model. Aceasta se realizează prin încărcarea modelului în timp ce lacul este umed, și menținerea lui sub sarcina pînă ce lacul s-a uscat. La scăderea sarcinii, lacul fisurează paralel cu direcția σ_1. Pentru obținerea unui cîmp de fisuri pe toată suprafața acoperită, uneori, în această etapă este necesară folosirea unei tehnici de răcire (v.§ 7.6.4).

Dacă lacul este apoi lăsat un timp de 6—8 ore să se relaxeze, tensiunile în lac vor dispare din cauza proprietății lacului de a curge sub sarcină. Dacă la sfîrșitul acestei perioade de relaxare se aplică o sarcină directă

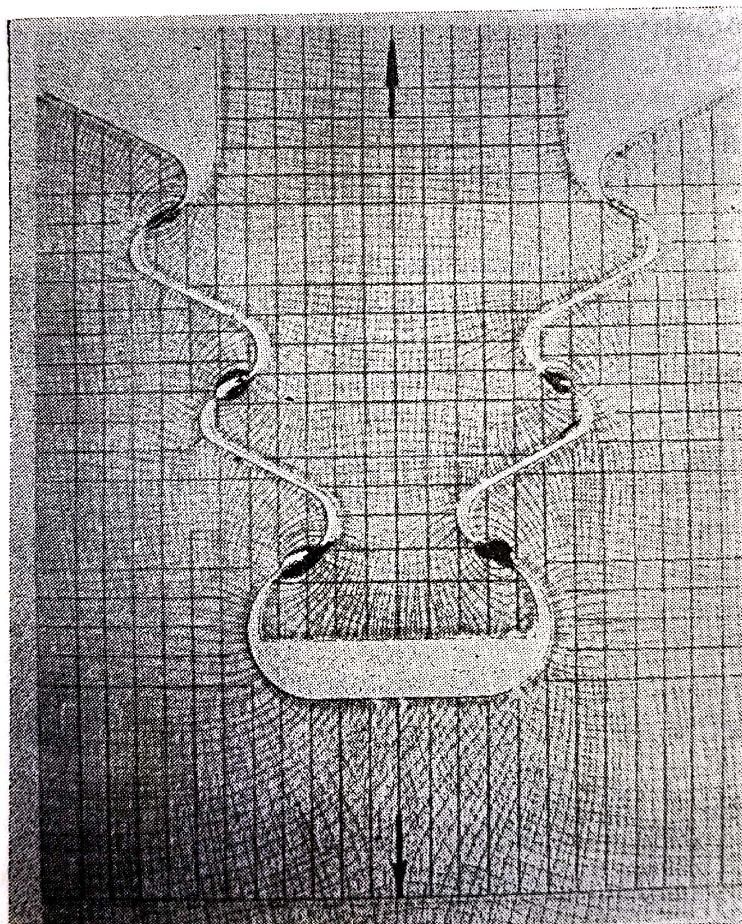


Fig. 7.23.

asupra modelului o a doua familie de fisuri va apare paralel cu direcția σ_2 (v. fig. 7.23).

Din nou poate fi necesar folosirea unei tehnici de răcire pentru a obține fisurarea lacului casant pe întreaga suprafață acoperită.

Scanned with OKEN Scanner

Această tehnică poate fi folosită şi la elemente din metal, însă rezultatele nu sînt totdeauna concludente deoarece deformaţiile specifice în metale sînt mult mai mici decît cele din materialele plastice.

7.6.4. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN TEHNICA RĂCIRII

În multe cazuri practice, o anumită zonă este adesea mult solicitată iar restul piesei nu este solicitată la un nivel suficient pentru a produce fisurarea lacului casant.

Singura informaţie dobîndită de cercetător pentru zonele în care lacul nu fisurează, este că, tensiunea în aceste zone ale piesei este mai mică decît tensiunea corespunzătoare pragului de deformaţie al lacului.

Cunoaşterea valorii tensiunilor şi în zonele slab solicitate este necesară pentru a se putea stabili în ce măsură dimensiunile piesei pot fi reduse pentru a se realiza economii de material. Pentru a cunoaşte valorile tensiunilor şi în zonele slab solicitate, de regulă, se folosesc traductoare rezistive.

Fisurarea lacului casant şi în zone slab solicitate este posibilă folosind metoda răcirii lacului [8]. Se încarcă mai întîi piesa, apoi stratul de lac casant este supus la o scădere bruscă a temperaturii.

Scăderea rapidă a temperaturii produce o stare de tensiune hidrostatică în stratul de lac care, se suprapune peste tensiunile existente datorită sarcinii exterioare.

Tensiunile datorită sarcinii, combinate cu cele termice, sînt în general suficiente pentru a produce ruperea lacului şi formarea cîmpului de fisuri. Direcţia fisurilor care au rezultat coincide cu una din direcţiile tensiunilor principale datorită sarcinii, pentru că, tensiunile termice fiind izotropice nu au direcţii preferenţiate.

Această tehnică este simplu de aplicat, rezultatele fiind suficient de precise, cu condiţia ca tensiunile în stratul de lac datorită sarcinii să fie mult mai mari decît componentele tensiunilor remanente ce pot apare în stratul de lac.

Pentru scăderea temperaturii stratului de lac se folosesc, în general, două metode : Prima metodă constă în acoperirea cu gheaţă a suprafeţelor de lac ce nu au reacţionat încărcării. Această metodă nu este totdeauna eficace, pentru că nu produce un efort termic suficient de ridicat pentru a obţine o reacţie suficientă a lacului. O schimbare substanţială a temperaturii poate fi obţinută prin trecerea unui curent de aer comprimat printr-o cutie cu gheaţă uscată, care apoi să fie dirijat spre suprafaţa acoperită cu lac. Curentul de aer rece poate fi dirijat corespunzător, iar cîmpurile de fisuri formate sînt mai bine controlate.

7.6.5. EFECTUL RĂCIRII

Răcirea produce două efecte distincte. Mai întîi, schimbarea rezistenţei la întindere a lacului σ_r^0 la temperatura de încercare t_0, în σ_r^f la temperatura mai scăzută t_f. Al doilea, introduce o tensiune hidrostatică

Scanned with OKEN Scanner

în lacul casant. Această tensiune notată cu σ_H^l, poate fi calculată după, cum urmează :

Contracţia pe unitate de lungime a lacului, datorită scăderii temperaturii de la t_0 la t_j este

$$\alpha^l(t_0 - t_j) \tag{7.13}$$

iar contracţia pe unitate de lungime a piesei datorită scăderii temperaturii de la t_0 la t_s este

$$\alpha^p(t_0 - t_s) \tag{7.14}$$

în care : α^l şi α^p sînt coeficienţii de dilataţie termică lineară a lacului, respectiv a piesei de încercat.

Dilatarea pe unitate de lungime a lacului, datorită tensiunii hidrostatice σ_H^l la temperatura t_j este dată de deformaţia hidrostatică corespunzătoare

$$(1 - \mu^l)\frac{\sigma_H^l}{E_j^l} \tag{7.15}$$

unde E_j^l este modulul de elasticitate al lacului casant la temperatura t_j.

Contracţia piesei de încercat datorită compresiunii hidrostatice este neglijabilă.

Considerînd o adeziune perfectă între lac şi piesă rezultă

$$\alpha^l(t_0 - t_j) - \alpha^p(t_0 - t_s) = (1 - \mu^l)\frac{\sigma_H^l}{E_j^l} \tag{7.16}$$

sau

$$\sigma_H^l = \frac{E_j^l}{1 - \mu^l}\,[\alpha^l(t_0 - t_j) - \alpha^p(t - t_s)]. \tag{7.17}$$

Dilatarea relativă a stratului de lac produsă prin răcire, poate fi considerată ca şi cum ar fi fost produsă de către o tensiune hidrostatică de întindere din piesă.

Această tensiune hidrostatică fictivă în piesă σ_H^p, care ar produce în stratul de lac o tensiune de aceeaşi mărime cu cea din răcire, poate fi calculată substituind pe E^l cu E_0^l, σ_1^l cu σ_H^l, iar pe σ_1^p şi σ_2^p cu σ_H^p în prima din ecuaţiile (7.9) obţinînd

$$\sigma_H^l = \frac{E_0^l}{E^p(1 - \mu^{l2})}(1 - \mu^l\mu^p + \mu^l - \mu^p)\sigma_H^p \tag{7.18}$$

sau

$$\sigma_H^p = \frac{E^p}{E_0^l}\cdot\frac{1 - \mu^l}{1 - \mu^p}\sigma_H^l \tag{7.19}$$

unde E_0^l este modulul de elasticitate al lacului casant la temperatura t_0.

7.7. INTERPRETAREA CANTITATIVĂ A CÎMPULUI DE FISURI

Lacurile casante fisurează după direcţii perpendiculare pe deformaţiile principale de întindere furnizînd informaţii privind direcţia şi mărimea deformaţiei în limitele elastice ale materialului de bază.

Informaţiile din încercarea cu lacuri de tip Stresscoat pot fi folosite pentru obţinerea unor rezultate cantitative dacă sînt respectate două condiţii şi anume : materialul structurii să rămînă în domeniul elastic şi, distribuţia sarcinii să nu se schimbe în timpul încercării [14]. Cînd aceste două condiţii sînt îndeplinite se poate considera că deformaţiile variază direct proporţional cu sarcina, iar deformaţia măsurată pentru o valoare a sarcinii aplicate, poate fi extrapolată şi pentru alte valori ale sarcinii.

Pe măsură ce se formează cîmpurile de fisuri, în stratul de lac de pe structură, trebuie înregistrată poziţia şi direcţia în care acestea apar, precum şi valoarea pragului de deformaţie a lacului. Se recomandă marcarea cîmpului, direct pe structura de cercetat cu un pix, creion sau un ac de trasat, imediat după aplicarea sarcinii. Cîmpurile de fisuri proaspăt formate dau rezultatele cantitative cele mai precise. Cînd cîmpurile iniţiale sînt greu de localizat, se încercuiesc zonele dubioase observîndu-se evoluţia lor o dată cu creşterea sarcinii. Pentru a fi siguri că fisurile sînt observate în faza lor iniţială de formare, este bine să se limiteze fiecare creştere suplimentară de sarcini la 25% din sarcina precedentă, sau mai puţin.

Procedeul de măsurare a deformaţiilor de întindere este următorul :

Se aplică o sarcină prestabilită, se menţine, în timp ce se verifică apariţia cîmpului de fisuri, apoi se înlătură sarcina. Se lasă structura nesolicitată, un timp egal cu cel puţin de două ori perioada de încărcare. Aceasta permite lacului să se relaxeze. Se încarcă şi se descarcă structura cu sarcini din ce în ce mai mari într-un mod similar pînă la atingerea sarcinii maxime.

De fiecare dată barele de etalonare trebuie încărcate pe o durată de timp egală cu cea necesară pentru atingerea sarcinii corespunzătoare fiecărei trepte de încărcare.

O altă tehnică de etalonare prevede încărcarea barei într-o secundă şi corectarea pragului de deformaţie ε_0 cu ajutorul curbelor (fig. 7.12) de corecţie datorită curgerii lacului.

Uneori este greu să se realizeze încărcarea şi apoi înlăturarea sarcinii între treptele de încărcare. În acest caz sarcina pentru fiecare treaptă de încărcare se obţine din treapta precedentă prin adăugarea în mod continuu a sarcinii corespunzătoare, şi corectarea datorită curgerii lacului cu ajutorul curbelor menţionate mai sus. În aceste condiţii creşterea sarcinii trebuie să se facă cu o viteză constantă. Aceasta nu impune creşterea continuă a sarcinii dar trebuie să fie creşteri egale adăugate la intervale de timp egale.

În tabelul 7.2 se arată care lacuri pot fi folosite pentru determinări cantitative ; în acelaşi timp se dau o serie de indicaţii privind alegerea

Scanned with OKEN Scanner

Indicații privind alegerea lacurilor casante

Tabelul 7.2

0	Stresscoat 1	Micro stresscoat 2	All-Temp 3	Tens-Lac 4	SNECMA 5	ONERA 6	Maybach 7	Brafa 8
Domeniul de temperatură utilizabil, °C	−20−45	−20−45	−18−375	0−35	10−50	10−40	0−50	10−30
Pragul de deformație, µ cm/cm	500	800−1000	200−2000	500	350−1500	300	100−200	100
Condițiile de deformație (I = întindere, C = compresiune)	I și C	I și C	I	I și C	I	I	I	I
Experiența cerută operatorului, de la 1 la 3 (1 = cel mai experimentat)	2	1	3	2	2	1	3	2
Utilizabil în laborator (L) sau pe șantier (S)	L + S	L	L + S	L + S	L + S	L + S	L + S	L + S
Temperatura de uscare °C	24	24	550	24	40−100	20	140	130
Timp de uscare, ore	18	1/2−2	10	24	1−24	24	timpul necesar răcirii piesei	timpul necesar răcirii piesei
Timpul scurs de la prima operație pînă la prima determinare, ore	8−18	1/2−2	1−10	24	1−24	12−24	în funcție de timpul de răcire al piesei	în funcție de timpul de răcire al piesei
Dacă permite și determinări cantitative	Da	Nu	Nu	Da	Da	Nu	Nu	Nu
Dacă este reutilizabil	Da	Nu	Nu	Da	Nu	Nu	Da	Da
Utilizări tipice	Cadre metalice, structuri de material rulant, vase sub presiune	Membrane, piese mici, elemente de mecanică fină	Schimbătoare de căldură, roți de turbină, blocuri de motor	Șasiuri de vagoane și locomotive, grinzi de poduri, carcase, vase sub presiune	Structuri metalice simple, carcase mici	Elemente de construcție de dimensiuni reduse	Structuri din fontă și oțel, și unele metale neferoase	Construcții metalice din oțel și fontă

Scanned with OKEN Scanner

lacurilor în funcţie de caracteristicile acestora, de felul solicitării, condiţiile de lucru şi altele.

Aplicaţie. Următorul exemplu, arată modul în care trebuie realizată o analiză a tensiunilor utilizînd procedeul prezentat mai sus [14]. Piesa este supusă la o solicitare de întindere iar sarcina se aplică în mod continuu. Aceasta impune folosirea diagramei de corecţie datorită curgerii lacului. În cel de-al doilea caz se măsoară deformaţia de întindere sub sarcină de tracţiune, sarcina fiind readusă la zero după fiecare treaptă de încărcare.

Proba aleasă pentru această încercare este un cîrlig de macara montat într-o maşină de încercat cu cabluri flexibile. Sarcina nominală a cîrligului este de 2000 daN, iar încercarea începe la jumătate din această sarcină. Fiecare creştere a sarcinii va fi 25% din sarcina iniţială. Se înregistrează timpul necesar fiecărei trepte de încărcare, timpul de menţinere a sarcinii la fiecare treaptă, pecum şi timpul consumat pentru întreg ciclul de încărcare.

Cîrligul, şi mai multe bare de etalonare, au fost acoperite cu lac şi uscate în aceleaşi condiţii, iar înainte de încercare se aduce la o stare de echilibru cu temperatura camerei de încercare. Barele de etalonare sînt menţinute în apropiere şi în aceleaşi condiţii cu cîrligul, pe tot timpul încercărilor. Pe măsură ce apar cîmpuri de fisuri, pe piesă, conturul lor se marchează. Modulul de elasticitate al oţelului s-a considerat $E = 2{,}06 \times 10^6$ daN/cm².

Se presupune că deformaţiile locale sînt proporţionale cu sarcina, deci materialul este solicitat sub limita de elasticitate.

Cunoscînd pragul de deformaţie al lacului ε_0, stabilit prin etalonare, se determină pragul de deformaţie corectat (datorită curgerii lacului) ε_0', cu ajutorul curbelor din fig. 7.12. Cunoaşterea lui ε_0' este necesară numai atunci cînd timpul de încărcare al piesei diferă de cel folosit la etalonare.

Ţinînd seama de relaţiile (7.10) şi (7.11) şi indentificînd cîmpurile de fisuri ce apar în anumite zone ale cîrligului la o încărcare dată, se determină valoarea deformaţiei specifice la suprafaţa piesei ε^p_{2000} şi apoi valoarea tensiunii la suprafaţa piesei σ^p_{2000} în aceste zone, pentru sarcina nominală de 2000 daN, după cum urmează: $\varepsilon_0 \left[\frac{\mu\,\text{cm}}{\text{cm}}\right] \times \frac{2000\ \text{daN}}{\text{sarcina de încercare}} = \varepsilon^p_{2000}$.
De exemplu, pentru $\varepsilon_0 = 800$ μcm/cm şi sarcina de încărcare la prima treaptă de 1250 daN, rezultă pentru zona considerată o deformaţie specifică la sarcina de 2000 daN, $\varepsilon^p_{2000} = 1280$ μcm/cm.

Pentru aceeaşi zonă la sarcina de 2000 daN, valoarea tensiunii va fi: $\sigma^p_{2000} = \varepsilon^p_{2000} \times E^p$, adică $1280 \cdot 10^{-6} \times 2{,}06 \cdot 10^6 = 2640$ daN/cm².

În tabelul 7.3. sînt prezentate rezultatele acestei încercări folosind procedeul de creştere progresivă a sarcinii aplicate cîrligului (încărcare continuă) [14]. Valorile trecute în coloanele 1 şi 2 reprezintă timpul de aplicare a sarcinii, respectiv de control al suprafeţei lacului pentru depistarea cîmpurilor de fisuri ce apar (coloana 5).

Pragul de deformaţie corectat ε_0' din coloana 6 se obţine din $\varepsilon_0 = 800$ μcm/cm cu ajutorul curbelor de corecţie (7.12) în funcţie de timpul total scurs de la începutul încercării, timp menţionat în coloana 3. Se poate constata creşterea pragului de deformaţie corectat ε_0' cu creşterea timpului scurs de la începerea încercării.

Cunoscînd sarcinile la care apare cîmpul de fisuri într-o anumită zonă, şi pragul de deformaţie corectat, se determină, aşa cum s-a arătat anterior, care va fi deformaţia la suprafaţa cîrligului în zona respectivă, corespunzător sarcinii nominale de 2000 daN, ε^p_{2000} trecută în coloana 7. Avînd deformaţia specifică ε^p_{2000} şi cunoscînd modulul de elasticitate al oţelului $E = 2{,}06 \cdot 10^6$ daN/cm², se calculează tensiunea în zonele respective, corespunzătoare sarcinii nominale a cîrligului σ^p_{2000} trecută în coloana 8.

Pentru a determina valoarea tensiunii şi în zone mai puţin solicitate, s-a continuat încărcarea pînă la sarcina de 4760 daN, materialul rămînînd în domeniul elastic în care poate fi folosită legea lui Hooke.

Scanned with OKEN Scanner

Măsurarea deformaţiilor de întindere

1. *Procedeul de încărcare continuă*

— Bara de etalonare încărcată într-o secundă;
— Pragul de deformaţie ε_0', corectat cu diagrama de corecţie (fig. 7.12).
— Pragul de deformaţie ε_0 = 800 μcm/cm

Tabelul 7.3.

Rezultatele încercărilor la procedeul de încărcare continuă

Timp de încărcare s	Timp de control s	Timp total s	Sarcina de încercare (daN)	Localizarea fisurilor (zone)	Pragul de deformaţie corectat $\varepsilon_0'\left[\mu\frac{cm}{cm}\right]$	Deformaţia la sarcina de 2000 daN $\varepsilon^p_{2000}\left[\mu\frac{cm}{cm}\right]$	Tensiunea în piesă la 2000 daN σ^p_{2000} [daN/cm²]
1	2	3	4	5	6	7	8
60	10	70	1000	nu apar	—	—	—
120	10	130	1250	nu apar	—	—	—
180	10	190	1560	apar în zona A	1010	1300	2670
240	10	250	1950	zona A creşte	1040	1070	2200
300	10	310	2440	zona A creşte	1060	870	1790
360	10	370	3050	zona A creşte apar şi în zona B	1080	710	1460
420	10	430	3810	zona A creşte zona B creşte	1100	580	1190
480	10	490	4760	zona A creşte zona B creşte	1110	470	970

În tabelul 7.4. sînt prezentate rezultatele unei încercări efectuate tot asupra unui cîrlig, folosind procedeul de încărcare cu revenire repetată la sarcina zero, după fiecare treaptă de încărcare [14].

7.8. METODA LACURILOR CASANTE AUXILIAR AL TENSOMETRIEI ELECTRICE ŞI AL FOTOELASTICITĂŢII

Alegerea celei mai bune metode de analiză experimentală a tensiunilor într-o anumită aplicaţie practică devine tot mai dificilă dacă se are în vedere atît noile metode şi tehnici de analiză apărute în ultimul timp cît şi perfecţionarea celor vechi.

S-a subliniat (cap. 1) că metodele şi tehnicile tensometrice nu măsoară tensiunea ele măsoară deformaţia. Mai mult, majoritatea tehnicilor măsoară numai deformaţia la suprafaţa piesei sau structurii ce face obiectul cercetării, şi în consecinţă nu obţinem o analiză completă. Este necesar să se stabilească, mai întîi, care deformaţii trebuie măsurate, uniaxiale

2. *Procedeul de încărcare cu revenire repetată la sarcina zero*

— Bara de etalonare încărcată în 45 s
— Timpul de încărcare în toate cazurile, 45 s
— Pragul de deformaţie $\varepsilon_0 = 800$ µcm/cm

Tabelul 7.4.

Rezultatele încercărilor la procedeul de încărcare repetată cu revenire la zero

Sarcina de încercare (daN)	Localizarea fisurilor (zone)	Deformaţia la 2000 daN $\varepsilon^p_{2000}\left[\mu\frac{cm}{cm}\right]$	Tensiunea în piesă la 2000 daN σ^p_{2000} [daN/cm²]
1000	nu apar	—	—
0	—	—	—
1250	apar în zona A	1280	2640
0	—	—	—
1560	zona A creşte	1030	2120
0	—	—	—
1950	nu apar alte fisuri	—	—
0	—	—	—
2440	zona A creşte, apar şi în zona B	655	1350
0	—	—	—
3050	zona A creşte zona B creşte	525	1080

(la suprafaţa), biaxiale (la suprafaţa), sau triaxiale (interne). În multe cazuri cea mai bună cale de rezolvare este folosirea combinată a două sau chiar trei metode tensometice, fiecare metodă, fiind utilizată pentru a rezolva partea pentru care este cea mai indicată [6].

Metoda lacului casant oferă un mijloc excelent de determinare a direcţiilor tensiunilor principale, precum şi a zonelor de maximă solicitare aşa cum s-a văzut la (§ 7.6).

În general, cu ajutorul lacurilor casante pot fi determinate valorile tensiunilor maxime cu o precizie de aprox. ± 10%, dacă condiţiile atmosferice pot fi controlate.

În numeroase cazuri este necesar un grad de precizie mai ridicat decît cel ce poate fi obţinut prin utilizarea lacurilor casante. În cazurile menţionate este indicat să se folosească pe lîngă lacurile casante alte metode tensometrice şi în deosebi traductoare rezistive. În asemenea cazuri se va aplica pe suprafaţa piesei, mai întîi, lacul casant pentru că acesta, aşa cum s-a menţionat, indică, cu mare precizie atît direcţiile principale cît şi zonele cele mai solicitate. În continuare se aplică traductoare

Scanned with OKEN Scanner

rezistive numai în acele locuri ale piesei în care lacul casant indică tensiuni ridicate. În zonele respective se vor monta rozete numai cu două traductoare (v. tab. 1.5), după direcţiile perpendiculare şi paralele la izostaticele indicate de cîmpul de fisuri al lacului casant.

Desigur traductoarele rezistive se utilizează şi fără lacuri casante (v.cap. 3). În acest caz necunoscîndu-se dinainte regiunile cele mai solicitate şi nici direcţiile principale, se impune folosirea unui mare număr de rozete tensometrice cu 3 sau chiar 4 traductoare (v. tab. 1.5) pentru a reduce riscul omiterii zonei cu tensiuni maxime şi pentru a putea determina direcţiile şi tensiunile principale. Utilizînd lacurile casante se reduc în mod substanţial : numărul traductoarelor tensometrice necesare, timpul necesar pentru analiză, costul cercetării şi, în acelaşi timp se asigură creşterea preciziei analizei.

În cazul cînd piesa sau structura de cercetat are zone cu concentratori puternici, se recomandă folosirea pentru aceste zone, şi a metodelor interferometrice (v. cap. 5).

Metoda lacurilor casante mai poate fi folosită împreună cu metoda fotoelastică [7]. Deşi fotoelasticitatea este o metodă total independentă (toate informaţiile necesare pot fi obţinute prin tehnicile fotoelastice), este recunoscut că la determinarea cu ajutorul fotoelasticităţii a direcţiilor tensiunilor (izoclinele) există o oarecare imprecizie. De aceea, pentru determinarea valorilor individuale ale tensiunilor principale (σ_1 şi σ_2) se foloseşte metoda lacului casant. În acest caz, pentru determinarea direcţiilor principale lacul casant poate fi aplicat direct pe modelul fotoelastic.

În cercetările intreprinse privind distribuţia tensiunilor la cilindrii sub presiune, avînd practicate orificii, Durelli [8. b] arată că dintre diferitele metode folosite în analiza experimentală, utilizarea combinată a fotoelasticităţii şi lacului casant este potrivită pentru determinarea stării de tensiune în punctele situate pe suprafeţele exterioare sau interioare ale acestor cilindri.

BIBLIOGRAFIE

1. CYMBOLISTE, M., PORTEVIN, A., *Procedée d'etude de la distribution des efforts élastiques dans le pièces metalliques*, Rev. mét., vol. 31, 1934.
2. DALLV, J. W., RILEV, W. F., *Experimental Stress analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New-Vork, 1965
3. DALLY, J. W., DURELLI, A. J., *Variables affecting brittle coating in stress analysis*, Prod. Eng., Design Digest Issue, 1959.
4. DIETRICH, O., LEHR, E., *Das Dehnungslinienverfahren*, Z. des Ver. deut. Ing., vol. 76 1932.

Scanned with OKEN Scanner

5. DURELLI, A. J., PHILLIPS, E. A., ISAO, C. H., *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain*, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1958.
6. DURELLI, A. J., DALLY, J. W., MORSE, S., *Experimental study of large-diameter thin — walled pressure vessels*, Expl. Mech., vol. 1, nr. 2, 1961.
7. DURELLI, A. J., PARKS, V. J., LEE, H. C., *Stress in a pressurized ribber cylindrical shell with a reinforced hole*, Journal of Strain analysis, vol. 8, nr. 2, 1973.
8. DURELLI, A. J., PARKS, V. J., PAVLIN, V., *Brittle — coating — patterns evaluation*, Experimental Mechanics, vol. 14, Nr. 8, 1965.
8. b. DURELLI, A. J., CARLOS, J. del RIO, VINCENT, J. PARKS. *Streesses in a pressurized cylinder with a hole*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, oct. 1967.
9. ELLIS, G., *Resinous Composition for determining the strain Concentration in rigid articles*, U. S. patent 2. 428. 559, oct. 7, 1947.
10. FAURE, G., *Le vernis craquelant. Analyse des contraintes*, tom. II, nr. 3, 1972.
11. GONCIAROV, N. R., *The brittle locquer method of determining stresses. Stress determination in machine parts by means of tensometers and iacquers*, Leningrad — Moscova, 1946, Abstract de G. S. Smith, Metalurghia, aprilie, 1948.
12. GULOT, H., *Un nouveau vernis craquelant*, le vernis émail, Recherche aeronaut., nr. 17., 1950.
13. L'HERMITE, R. *Métodes générales d'essai et de controle en laboratoire*, Mesures geometriques et méchaniques, edition Eyrolles, Paris, 1959.
14. MAGNAFLUX CORPORATION, *Principles of Stresscoat*, Brittle coating stress analysis manual, Chicago, 1971.
15. MOCANU, D. R., BUGA, M., GEORGESCU, C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor, Bucureşti, 1966.
16. NAKAHARA, I., MUROTA, T. *Drawnability of a blank with hole. Strain determination by brittle coating*, Japan Soc. Mech. Engrs., noiembrie 1954.
17. SALMON, B., *L'Analyse des contraintes par la méthode des vernis craquelants*, Tech. et Sci. aeronaut, nr. 13, 1950.
18. SAUERWALD F., WIELAND, H., *Uber die Kerbschlagprobe nauch Schule Moser*, Zeitschrift für Metallkunde, vol. 17, 1925.
19. SINGDALE, F. N., *Improved brittle coatings for use under widely varying temperature conditions*, Proc. SESA, vol. XI, nr. 2, 1958.
20. TAIRA, S., NISCHIMURA, T., MAEDA, H., *Strain determination by brittle coating*, Tech. Repts. Eng. Research Inst., Kyoto Univ.. vol. 3, nr. 1, decembrie, 1953.
21. PHOTOLASTIC INC., *Instructions for the selection and use of TENS — LAC brittle laquers and undercoating*, Bulletin TL—201.
22. *Braunschweiger Farbenwerke*, H. Müller GmbH & CoKG — Buletin DS 2 — 69
23. Magnaflux Corporation, Bulletin ST—22, Nelson A. Crites, *for stress analysis, Brittle Coating methods, Product Engineering.*

Scanned with OKEN Scanner

8

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR REMANENTE

Prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU
Dr. ing. C. BURADA
Prof. dr. doc. VL. POPOVICI
Ing. M. BĂLTĂNOIU
Conf. dr. ing. D. HORBANIUC
Prof. dr. ing. M. TRIPA

8.1. ORIGINEA ȘI CLASIFICAREA TENSIUNILOR REMANENTE

Prin *tensiuni remanente* se înțeleg acele tensiuni care există într-un corp solid în absența sarcinilor exterioare (forțe, cupluri și accelerații).

Aceste tensiuni sînt cunoscute și sub denumirea de *tensiuni proprii* sau *tensiuni interne*. Ultimul termen nu este adecvat, deoarece nu face deosebire între tensiunile produse de sarcinile exterioare și tensiunile existente în absența acestora.

O particularitate a tensiunilor remanente este aceea că ele formează un sistem de forțe în echilibru.

Existența acestor tensiuni este cunoscută de mulți ani, însă abia în anii din urmă s-au dobîndit cunoștințele necesare cu privire la originea și măsurarea lor.

Tensiunile remanente în construcții și, îndeosebi, în organele de mașini au fost considerate, pînă recent, ca fiind, în general, nedorite, ele constituind adesea cauze de defecțiuni în exploatare sau de fisurări ori deformări supărătoare ale pieselor, chiar în timpul procesului de prelucrare sau al tratamentului termic (uzinarea pieselor turnate, laminare, călire etc.). Această poziție față de prezența tensiunilor remanente a predominat mulți ani, cu toate că, încă la sfîrșitul secolului trecut, au fost fabricate tuburi fretate utilizîndu-se tensiunile remanente. Întrebuințate, la început, în industria de armament, astăzi sistemele favorabile de tensiuni remanente sînt folosite pe scară largă, în numeroase cazuri ele reprezentînd mijlocul principal pentru sporirea rezistenței construcțiilor. Este lucru stabilit că rezistența la oboseală a metalelor — în anumite situații — este sensibil influențată de prezența tensiunilor remanente.

Tensiunile remanente pot fi clasificate în funcție de :

a) cauzele formării lor

b) volumul în care se echilibrează, și

c) orientarea lor în spațiu.

a) *Cauzele apariției tensiunilor remanente sînt* :

În primul rînd deformațiile plastice neuniforme ce apar în cazul supraîncărcării elementelor solicitate la încovoiere și răsucire sau la prelucrarea lor la rece prin presare (matrițare).

Dacă în timpul încărcării, deformaţiile depăşesc, în unele zone ale materialului, limita de elasticitate, după descărcare, în elementul considerat, apar deformaţii şi tensiuni remanente.

În al doilea rînd distribuţia neuniformă a temperaturilor, într-un corp solid, provoacă — în timpul răcirii — în interiorul acestuia deformaţii elastice şi elasto-plastice. Acestea din urmă duc la formarea de deformaţii şi tensiuni remanente. Acest proces apare la sudarea pieselor ca şi în cazul altor feluri de prelucrări la cald (forjare, laminare, sudare, ş.a). Tot în această grupă intră şi tensiunile remanente din piesele bimetalice supuse variaţiunilor de temperatură.

În al treilea rînd, în special la sudarea oţelurilor, în timpul procesului de sudare se produc modificări de structuri care sînt însoţite de modificări locale de volum şi densitate. Aceste modificări în metal dau naştere la deformaţii şi tensiuni remanente locale.

Factorii care influenţează valoarea acestor tensiuni remanente sînt: compoziţia şi structura metalului, temperatura şi durata de încălzire, viteza de răcire ş.a.

b) *În funcţie de volumul corpului în limitele căruia tensiunile remanente se echilibrează reciproc, acestea se clasifică după cum urmează* : *)

Tensiuni de speţa I, care se echilibrează într-un volum relativ mare, uneori, de acelaşi ordin de mărime cu cel al întregii structuri. Aceste tensiuni pot atinge valori ridicate, ajungînd pînă la limita de curgere a materialului şi chiar depăşind-o. Ele au o anumită orientare în funcţie de forma piesei sau structurii, din care cauză se mai numesc şi *tensiuni remanente orientate.*

În această categorie intră :

— tensiunile datorite deformaţiilor elasto-plastice produse de sarcinile exterioare ;

— tensiunile datorite încălzirii şi răcirii neuniforme ;

— tensiunile datorite precomprimării sau pretensionării ;

— tensiunile datorite acoperirilor metalice ;

— tensiunile datorite nepotrivirilor de dimensiuni la montaj ş.a.

Tensiuni de speţa a II-a, care se echilibrează în volume microscopice din corp, între limitele unuia sau mai multor grăunţi cristalini. Ele nu au o orientare determinată şi nu depind de forma piesei sau structurii.

În această categorie intră :

— tensiunile datorite modificărilor caracteristicilor fizico-chimice ale grăunţilor cristalini ;

— tensiunile datorite diferenţei de dilataţie a constituienţilor ;

— tensiunile produse de alunecarea sau fluajul constituenţilor, etc.

Tensiunile de prima speţă se mai numesc şi tensiuni remanente *macroscopice*, iar cele de speţa a doua tensiuni remanente *microscopice* sau de structură.

---

*) Această clasificare a fost propusă pentru prima dată de E. Orowan [46].

Scanned with OKEN Scanner

c) *Tensiunile remanente pot fi clasificate și după orientarea lor.* În funcție de forma și mărimea piesei sau structurii, precum și de originea tensiunilor remanente, acestea pot fi :

— *monoaxiale*, cînd apar după o singură direcție ;

— *biaxiale*, cînd acționează după diferite direcții cuprinse în același plan, și

— *triaxiale* (spațiale), cînd acționează după toate direcțiile.

Pot fi determinate prin calcul — utilizînd relațiile stabilite în teoria elasticității și plasticității — sau pe cale experimentală, numai valorile tensiunilor remanente de speța întîia. Cele de speța a doua pot fi determinate numai pe cale experimentală cu ajutorul razelor X (v. § 8.6).

În general, cînd se vorbește de tensiuni remanente se au în vedere numai cele de speța întîia.

Pentru stabilirea mărimii și distribuției tensiunilor remanente sînt cunoscute mai multe metode experimentale unele *distructive* iar altele *nedistructive*. În cele ce urmează se vor prezenta metodele cele mai frecvent utilizate.

8.2. METODE DISTRUCTIVE ȘI SEMIDISTRUCTIVE

Tensiunile remanente, în majoritatea cazurilor, au un caracter triaxial fiind caracterizate, într-un punct oarecare al piesei, prin tensorul respectiv, ele formînd, în lipsa sarcinilor exterioare, un sistem în echilibru. Prin reducerea dimensiunilor piesei, sau prin secționarea parțială a acesteia, echilibrul este deranjat, punîndu-se astfel în evidență existența lor. În același timp se dă posibilitatea de a se stabili distribuția și valoarea lor.

8.2.1. METODA SECȚIONĂRII

Metoda cea mai simplă și cea mai veche este aceea de secționare a piesei, ce face obiectul cercetării, în benzi paralele. Se consideră o platbandă în care se presupune că există tensiuni remanente dirijate în direcția Oy. După ce s-a făcut prelucrarea și rectificarea piesei la extremitatea $M-N$, aceasta se secționează în benzi de lungime l, paralele cu axa Oy (fig. 8.1). După secționare se observă că benzile s-au deformat cu Δl, pozitiv sau negativ. Dacă se neglijează efectul tensiunilor remanente după direcția Ox, valoarea medie a tensiunii remanente după direcția Oy într-o anumită bandă este

$$\sigma_y = \frac{\Delta l}{l} E \tag{8.1}$$

unde E este modulul de elasticitate al materialului.

Această metodă este utilizată, de mult timp, la evaluarea tensiunilor remanente în profile și în șinile de cale ferată [40], unde tensiunile pot fi considerate, practic, monoaxiale.

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 8.2 se prezintă diagrama tensiunilor remanente longitudinale — după axa secţiunii şi la marginile tălpii — dintr-o şină de cale

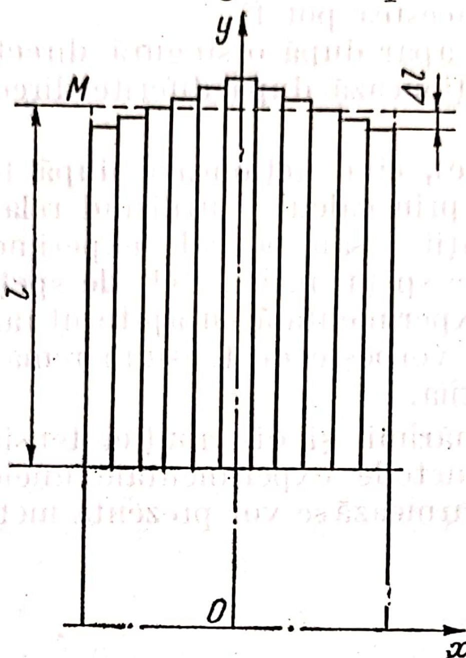


Fig. 8.1

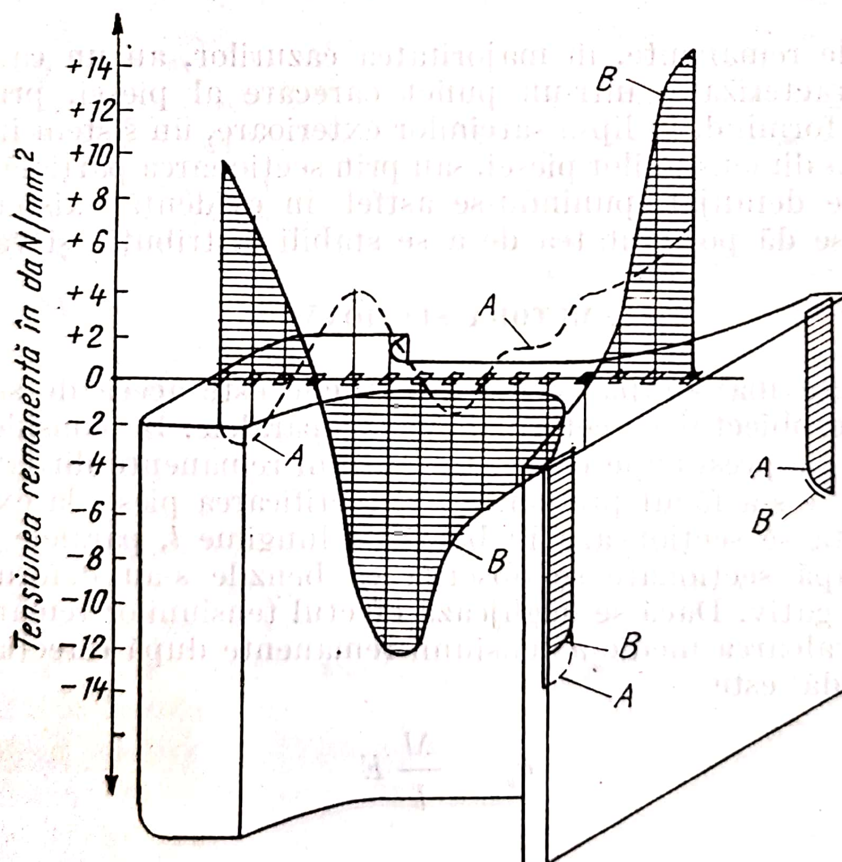


Fig. 8.2

ferată tip 40, determinate prin această metodă. Se poate considera că tensiunile remanente produse de operaţia de laminare sînt nule din cauza

temperaturii ridicate la care se face laminarea, în schimb, tensiunile remanente care apar în şină în timpul răcirii — care nu se face uniform — au valori apreciabile (curba A). După operaţia de îndreptare a şinei, care se face la rece, apar, datorită deformaţiilor elasto-plastice, tensiuni remanente de valori şi mai mari (curba B).

Această metodă este simplă dar prezintă dezavantajul că necesită distrugerea piesei (structurii), şi că precizia măsurării tensiunilor este redusă, aceasta, în principal, datorită faptului că procesul de secţionare provoacă, el însuşi, tensiuni remanente în marginile benzilor, a căror lăţime este de 15—18 mm.

8.2.2. METODE UTILIZATE ÎN CAZUL PIESELOR CILINDRICE

Una dintre metodele ce se aplică la piese cilindrice, cu secţiunea circulară sau inelară, este metoda strunjirii. Principiul care stă la baza metodei este explicat în fig. 8.3. Suprafeţele frontale ale unui cilindru plan sînt reprezentate în fig. 8.3, a prin două discuri circulare. Tensiunile remanente existente în cilindru, de întindere în miez şi de compresiune în zona periferică, sînt imaginate ca fiind produse de trei resoarte. Resortul din mijloc, care evidenţiază această zonă, este solicitat la întindere, iar cele două resoarte exterioare, corespunzătoare zonei periferice, sînt solicitate la compresiune. Dacă straturile periferice ale cilindrului plin se îndepărtează,

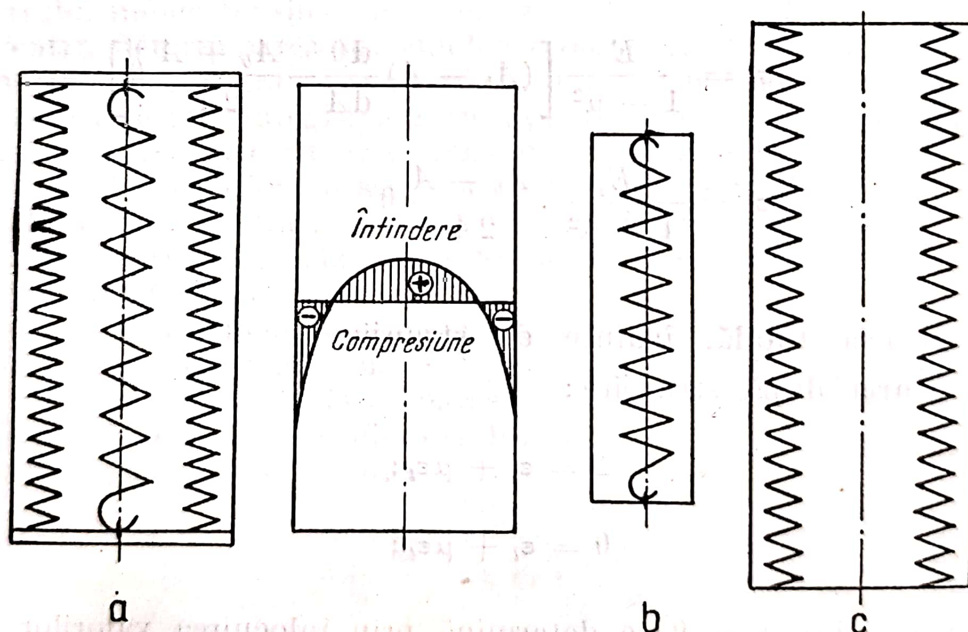


Fig. 8.3

prin strunjire, se micşorează şi tensiunile de compresiune corespunzătoare acestei zone. Prin această perturbare a echilibrului dintre tensiunile remanente, tensiunile din zona mijlocie se pot manifesta nestingherit, astfel încît această zonă devine mai scurtă (fig. 8.3, b). Dacă din clindrul

plin, cu starea indicată de tensiuni remanente, se scoate zona din mijloc, se poate imagina efectul acestei măsuri cu ajutorul reprezentărilor din fig. 8.3, c, prin îndepărtarea resortului din mijloc. Prin aceasta, zonele de margine, deci cele două resoarte exterioare, nu mai sînt stingherite în tendința lor de a se întinde. Îndepărtarea zonei din mijloc deranjează echilibrul și provoacă o prelungire a zonei periferice. După metoda folosită de Sachs [54], strunjirea se face în etape, la temperatură constantă, prin creșterea treptată a diametrului interior, de la o strunjire la alta, pînă cînd nu mai rămîne decît un corp gol cu pereți subțiri.

Din fiecare operație de strunjire interioară (alezare) se măsoară pe fața exterioară a cilindrului alungirile în direcția longitudinală și în direcția tangențială, cu ajutorul traductoarelor rezistive așezate după cele două direcții.

S-a arătat de către Sachs [54] că cele trei tensiuni principale (longitudinală, tangențială și radială) pot fi determinate, pentru o valoare a razei interioare a cilindrului $\frac{D}{2}$, în funcție de deformațiile înregistrate, cu ajutorul următoarelor relații:

$$\sigma_l = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(A_b - A)\frac{d\Delta}{dA} - \Delta\right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(A_b - A)\frac{d\theta}{dA} - \frac{A_b + A}{2A}\,\theta\right] \qquad (8.2)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{A_b - A}{2A}\,\theta$$

în care:

A_b este aria totală, înainte de strunjire;

A — aria după strunjire;

$$\Delta = \varepsilon_l + \mu\varepsilon_t;$$

$$\theta = \varepsilon_t + \mu\varepsilon_l;$$

Derivatele lui Δ și θ se determină prin înlocuirea valorilor lui ε_l, ε_t, Δ și θ și a valorilor suprafeței secțiunii transversale A, pentru două strunjiri consecutive. Dacă strunjirea se face pe suprafața exterioară a cilindrului aplicînd traductoarele pe fața interioară, tensiunile remanente se calculează cu expresiile de mai jos, care rezultă din primele, prin înlocuirea secțiunii totale A_b cu secțiunea interioară A_0 a cilindrului gol și dacă se introduc pentru ε_l și ε_t din expresiile lui Δ și θ valorile deforma-

ţiilor măsurate cu traductoare rezistive aplicate pe faţa interioară a cilindrului şi anume

$$\sigma_l = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(A - A_0)\frac{d\Delta}{dA} - \Delta\right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(A - A_0)\frac{d\theta}{dA} - \frac{A + A_0}{2A}\theta\right] \qquad (8.3)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{A - A_0}{2A}\right]\theta.$$

Aplicarea acestor formule este indicată numai dacă lungimea cilindrului este cel puţin de trei ori diametrul.

Diverşi cercetători au elaborat metode speciale pentru măsurarea tensiunilor remanente după direcţia tangentei în piesele cu secţiune inelară (cilindri, tuburi). În toate cazurile atît tensiunile longitudinale, cît şi cele radiale sînt neglijate, din care cauză rezultatele sînt aproximative.

Astfel, Kala Koutzky a strungit inele subţiri din cilindri. Aceste inele aveau pe o parte trasate un cerc şi diametrul acestor cercuri era măsurat înainte şi după tăiere. Dacă diametrul cercului creşte, aceasta indică prezenţa de tensiuni circumferenţiale de compresiune, iar o descreştere a diametrului indică tensiuni de întindere.

Pentru determinarea tensiunilor remanente în cilindrii plini, Siebel [40] a tăiat discuri transversale din cilindru şi le-a perforat sau strunjit, în etape succesive, înregistrînd variaţia de diametru în baza căreia s-a calculat valoarea şi distribuţia tensiunilor remanente.

În cazul cilindrilor cu secţiune inelară, după Sachs, tensiunea remanentă după direcţia tangentă, se evidenţază printr-o secţiune longitudinală în cilindru (fig.8.4,a). Se măsoară diametrul exterior al tubului înainte şi după tăiere.

Tensiunea remanentă longitudinală se evidenţiază prin tăiere din cilindru a unei fîşii longitudinale (fig. 8.4, b). Aceasta după tăiere se încovoaie. Mărimea săgeţii f dă valoarea tensiunii longitudinale.

Relaţiile pentru determinarea lui σ_t şi σ_l, într-un punct oarecare corespunzător distanţei x, sînt

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(e - 2x)\frac{D_1 - D_0}{D_1 \cdot D_0}$$

$$\sigma_l = E(e - 2x)\frac{f}{l^2}; \qquad (8.4)$$

în care:

e este grosimea peretelui tubului (cilindrului);
D_0 — diametrul înainte de tăiere;
D_1 — diametrul după tăiere;

Scanned with OKEN Scanner

x — distanța de la punctul considerat pînă la fața interioară, respectiv exterioară, a tubului, măsurată pe direcția razei;
f — săgeata capătului fîșiei.

Dacă fîșia a fost tăiată pe toată lungimea tubului, f este dat de distanța de la capătul fîșiei pînă la tangenta dusă la celălalt capăt al fîșiei.

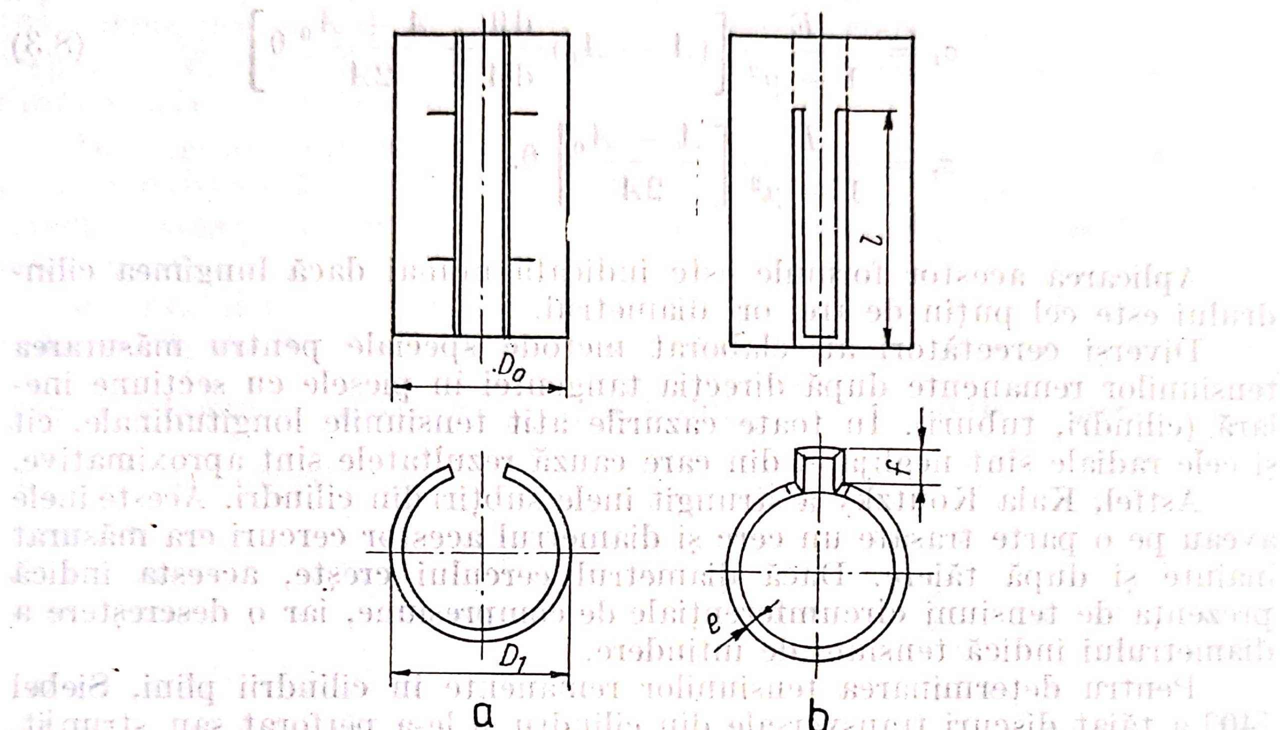


Fig. 8.4

Această metodă simplă este folosită, îndeosebi, pentru determinarea tensiunilor remanente din tuburile trase. Tăierea se face cu pînze subțiri de ferăstrău. Lățimea optimă a fîșiei longitudinale este de $(0,1 \ldots 0,2)D_0$.

Metoda este aplicată numai dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

— tensiunile remanente sînt de întindere pe o față (interioară sau exterioară) și de compresiune pe cealaltă față (exterioară sau interioară);

— tensiunile remanente sînt constante atît pe circumferința tubului, cît și de-a lungul tubului;

— lungimea cilindrului nu este prea mică față de diametru ($L \geqslant 2D$).

Stabilirea tensiunilor remanente în tuburile cu pereți subțiri prin metoda lui Sachs, descrisă mai sus, se face cu erori destul de mari din cauza valorilor mici ale deformațiilor.

Rezultate mai precise se obțin, în asemenea cazuri, cu metoda stabilită de *N.N. Davîdenkov* [40], care folosește secționarea pieselor tubulare de-a lungul unei generatoare și îndepărtarea treptată pe calea chimică a unor straturi de grosime uniformă (fig. 8.5).

În acest caz se admite că tensiunile remanente sînt distribuite simetric în raport cu axa tubului și sînt constante de-a lungul acesteia. Se admite, de asemenea, ca și la metoda Sachs, că grosimea tubului este mică

în comparație cu raza medie $\left[\frac{h}{R_m} < \frac{1}{3}\right]$ ceea ce face posibilă admiterea repartiției liniare a tensiunii pe grosimea țevii, fapt ce simplifică întrucîtva calculul. Tensiunile suplimentare ce apar, ca rezultat al decupării mostrei tubulare, se neglijează, fapt care se poate admite în cazul cînd :

$$l \geqslant 4 \cdot l_1$$

unde l_1 este lungimea capetelor tubului de lungime l (fig. 8.5, c), pe care, conform principiului lui Saint-Venant, acționează efectul de margine. Pe baza teoriei învelișurilor subțiri cilindrice, se poate admite

$$l_1 \geqslant 3\sqrt{R_m \cdot h}.$$

Rezultă deci

$$l \geqslant 4 \cdot l_1 = 12\sqrt{R_m \cdot h}.$$

De exemplu, în cazul cînd

$$h = 0{,}25\ R_m ; \quad l \geqslant 3D_m ;$$

$$h = 0{,}10\ R_m ; \quad l \geqslant 2D_m .$$

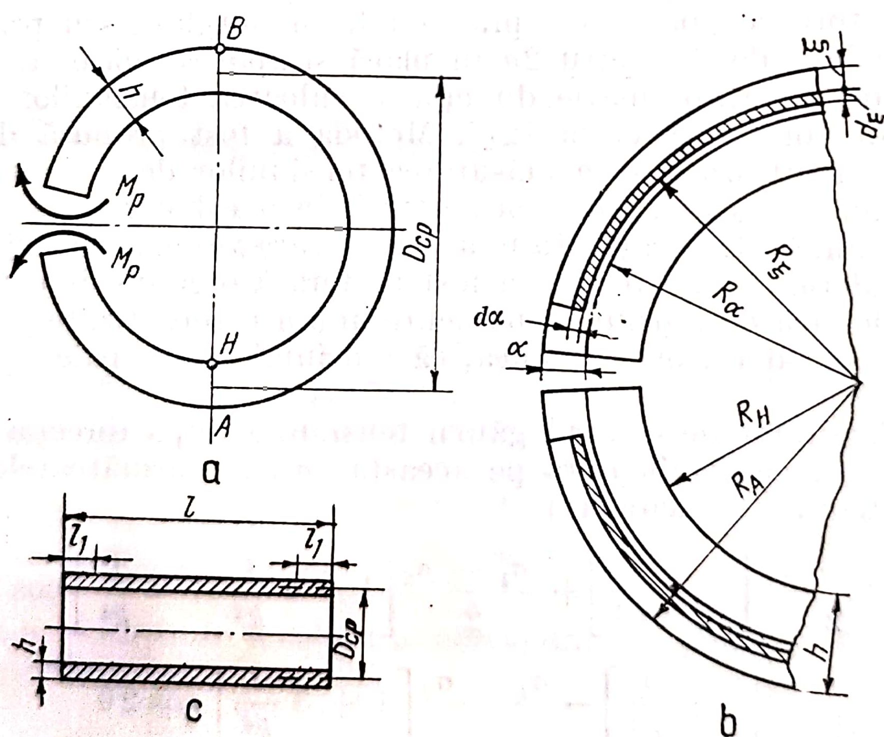


Fig. 8.5

Se face tăierea tubului de-a lungul unei generatoare și, apoi, îndepărtarea treptată, pe cale chimică, cu acizi, a unor straturi exterioare sau interioare (fig. 8.5, b)

Valoarea tensiunii remanente după direcţia tangentei, în stratul α, după tăierea şi eliminarea straturilor anterioare, se calculează cu formula

$$\sigma_{t\alpha} = \pm\left\{2\frac{E\cdot\delta_p}{(1-\mu^2)D_{cp}}\left(\frac{h}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{E(h-\alpha)^2}{(1-\mu^2)D_\alpha}\cdot\frac{d\delta}{dx}+\right. \\ \left.+\frac{E}{3(1-\mu)}\int_0^\alpha\frac{2h-3\alpha+\xi}{D}\cdot\frac{d\delta}{d\xi}d\xi\right\}. \quad (8.5)$$

în care:

$D_{cp} = R_A + R_H$ este diametrul mediu al inelului după tăiere;

$$\delta_p = \frac{D_{cp}}{2EI}M_p;$$

EI — rigiditatea secţiunii inelului.

Semnificaţia celorlalte mărimi rezultă din fig. 8.5, a şi 8.5, b. Semnul + se foloseşte în cazul strunjirii de straturi exterioare, iar semnul — în cazul strunjirii de straturi interioare.

8.2.3. METODA GĂURIRII (PERFORĂRII)

În cazul plăcilor supuse unei stări plane de tensiuni remanente determinarea acestora se poate face practicînd, cu burghiul sau prin frezare, o gaură circulară de diametru $2a$ în placă şi apoi se măsoară ovalizarea găurii care dă cu aproximaţie direcţia şi valoarea tensiunilor principale remanente în zona respectivă [27]. Metoda a fost propusă de Mathar [36] şi poate fi utilizată şi la măsurarea tensiunilor de la suprafaţa unei piese de formă oarecare; adîncimea găurii, în acest caz, este limitată la aproximativ jumătatea diametrului acesteia, care variază între 6 şi 12 mm.

Se consideră o placă în care a fost perforată o gaură de diametru $2a$. (fig. 8.6) solicitată de tensiuni remanente uniform repartizate pe grosimea acesteia. Se consideră, de asemenea, că tensiunile principale σ_1 şi σ_2 sînt cunoscute.

La o distanţă r de centrul găurii tensiunile după direcţia razei (σ_r) şi după direcţia perpendiculară pe aceasta (σ_t) au următoarele expresii, stabilite în teoria elasticităţii*).

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\left[1-\frac{1}{k^2}\right]+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\left[1-4\frac{1}{k^2}+3\frac{1}{k^4}\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\left[1+\frac{1}{k^2}\right]-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\left[1+3\frac{1}{k^4}\right]\cos 2\theta \quad (8.6a)$$

unde $k = \dfrac{r}{a}$.

*) În relaţiile (8.6) σ_1 şi σ_2 sînt tensiuni care au loc la distanţe mari de gaură, deci, practic, valoarea lor este aceiaşi indiferent dacă placa este sau nu găurită.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul plăcii fără gaură ($a = 0$), pentru direcția θ, măsurată față de σ_1, precum și perpendicular pe aceasta, tensiunile se pot calcula cu relațiile

$$\sigma_r' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma_t' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \qquad (8.\ 6b)$$

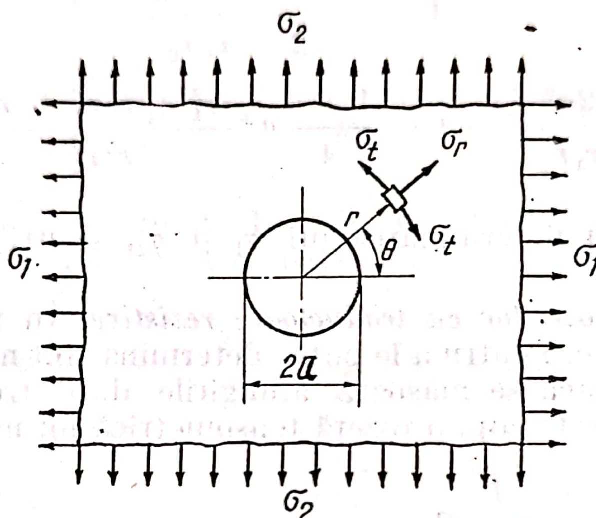


Fig. 8.6

care rezultă din relațiile (8.6 a) unde $k = \frac{r}{a} = \infty$.

În urma practicării găurii, în punctul situat la distanța r de centrul acesteia, au loc variații de tensiuni obținute prin scăderea relațiilor (8. 6b) din relațiile (8.6 a).

$$\Delta\sigma_r = c_r - \sigma_r' = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(-4\frac{1}{k^2} + 3\frac{1}{k^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\Delta\sigma_t = \sigma_t - \sigma_t' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{1}{k^2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 3 \frac{1}{k^4} \cos 2\theta. \qquad (8.7)$$

Acestor variații de tensiuni le corespund, în punctul respectiv, deformațiile specifice

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\Delta\sigma_r - \mu\Delta\sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\Delta\sigma_t - \mu\Delta\sigma_r) \qquad (8.8)$$

În realitate, nu pot fi măsurate alungirile corespunzătoare unui punct, ci utilizînd traductoare rezistive cu baza $l_0 = r_2 - r_1$, acestea măsoară, pe direcţia radială θ, o alungire medie a cărei valoare este dată de relaţia [25]

$$\varepsilon_\theta = A\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} + B\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E}\cos 2\theta \qquad (8.9)$$

unde :

$$A = -\frac{a^2}{2}\,\frac{1+\mu}{r_1 r_2}$$

$$B = \frac{2a^2}{r_1 r_2}\left[-1 + \frac{1+\mu}{4}a^2\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\right]. \qquad (8.10)$$

Practic, pentru determinarea lui σ_1 şi σ_2, se utilizează următoarele metode :

a) *Utilizarea rozetelor cu traductoare rezistive.* În relaţia (8.9) σ_1, σ_2 şi θ sînt necunoscute. Pentru a le putea determina sînt necesare trei ecuaţii. Acestea se obţin dacă se măsoară alungirile după trei direcţii radiale. Se utilizează, în acest scop, o rozetă tensometrică formată din trei traductoare rezistive, special construită pentru măsurarea tensiunilor remanente (v. fig. 8.7).

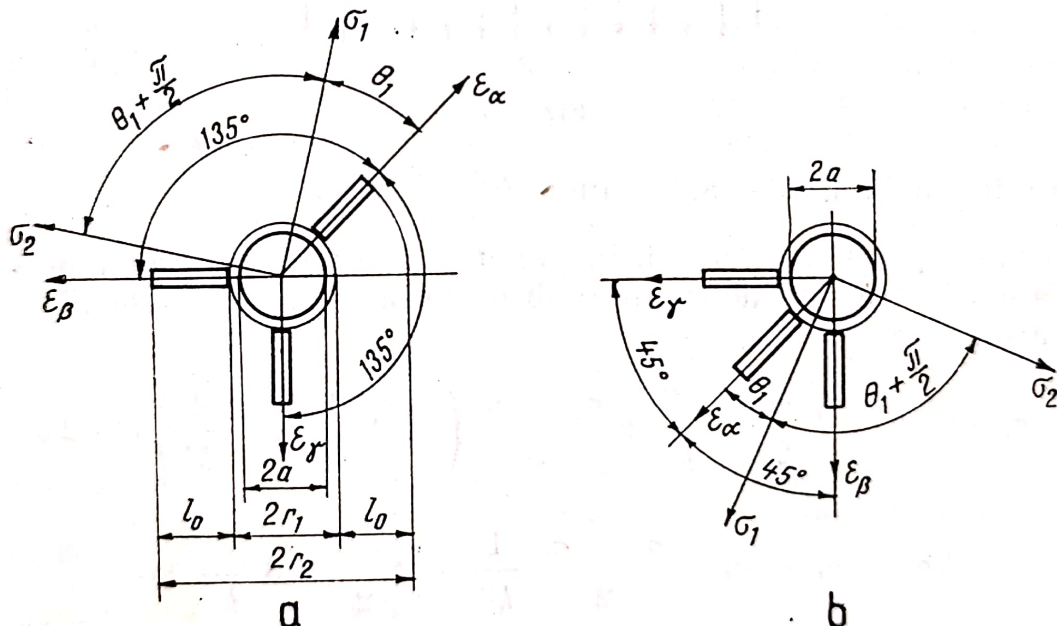


Fig. 8.7

Rozeta se lipeşte, în locul unde se face măsurarea, şi apoi se execută în piesă, — în centrul rozetei — o gaură de diametrul $2a$ şi — după ce puntea a fost echilibrată, pe rînd, pentru fiecare traductor ce alcătuieşte rozeta — se măsoară alungirile ε_α, ε_β, şi ε_γ corespunzătoare (fig. 8.7, a).

Dacă se ia ca origine pentru unghiuri traductorul α, cele trei alungiri, conform relației (8.9), sînt

$$\varepsilon_\alpha = \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta_1$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (8.11)$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\left(\theta_1 - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Rezolvînd acest sistem, în funcție de necunoscutele σ_1, σ_2 și θ_1 se obțin tensiunile remanente principale și direcțiile lor

$$\sigma_1 = \frac{E}{4A}(\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) + \frac{E}{4B}\sqrt{(2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{4A}(\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) - \frac{E}{4B}\sqrt{(2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2} \quad (8.12)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta}{2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}. \quad (8.13)$$

Unghiul θ_1 dintre direcția traductorului ε_α și tensiunea principală σ_1 se măsoară în sens trigonometric de la direcția ε_α.

Dacă se utilizează rozeta dreptunghiulară din fig. 8.7, b relațiile (8.12) rămîn valabile, iar relația (8.13) are semnul schimbat.

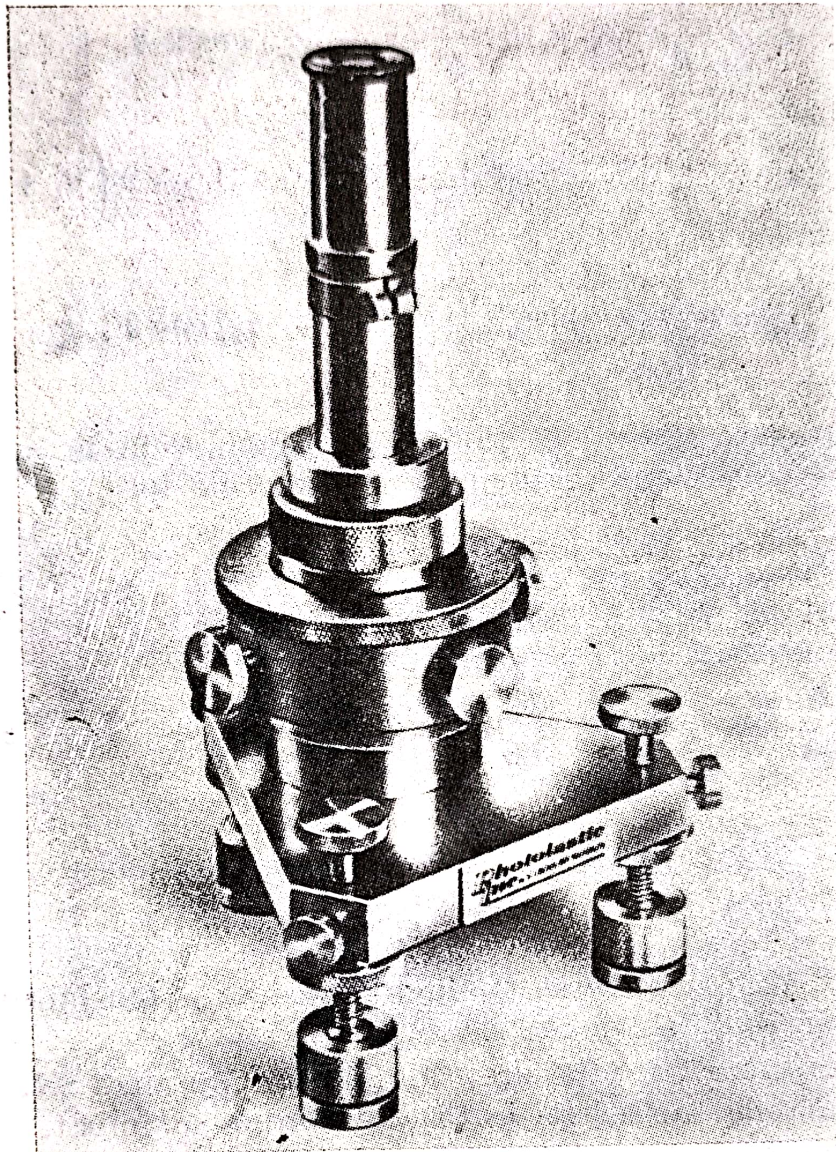
Se menționează că la stabilirea relațiilor de mai sus nu a fost luată în considerare sensibilitatea transversală. După calculele făcute de Boiten și Ten Cate [5], în cazul cînd se utilizează rozeta Δ din fig. 8.7a avînd baza traductoarelor $l_0 = 4$ mm și $r_1 = 2{,}5$ mm iar diametrul găurii $2a = 2$ mm, eroarea ce se face, din această cauză, este de maximum 10%.

În general, se recomandă ca distanța de la cel mai apropiat punct al traductoarelor față de gaură să fie inferioară diametrului găurii, iar acesta să fie cel mult, $\frac{l_0}{2}\left(\text{deci } a \leqslant \frac{l_0}{4}\right)$.

În fig. 8.8, este dată fotografia dispozitivului confecționat de firma Photolastie utilizat pentru poziționarea corectă a găurii și efectuarea operației de găurire, iar în fig. 8.8, b se dau trei secvențe din timpul efectuării acestor operații [70] și anume :

Scanned with OKEN Scanner

1) operaţia de centrare, cu ajutorul unui microscop, a dispozitivului pe centrul rozetei;



a)







b)

Fig. 8.8

2) după scoaterea microscopului din dispozitivul de ghidaj, în acesta se introduce o freză pentru efectuarea operației de găurire și

3) practicarea găurii în axul rozetei.

b) *Utilizarea lacurilor casante.* În locul rozetei cu traductoare rezistive, pentru măsurarea tensiunilor remanente, eliberate prin perforare, pot fi utilizate lacurile casante (v. cap. 7). Cu toate că această metodă, de regulă, este utilizată pentru obținerea unor informații calitative, ea poate fi utilizată și pentru obținerea de informații cantitative cu privire la mărimea și distribuția tensiunilor [27].

Dacă se admite ipoteza lui Durelli [16], că fisurarea lacului are loc dacă piesa, ce face obiectul cercetării, este supusă unei tensiuni de întindere superioară limitei de curgere σ_c, raza zonei de fisurare este

$$R_c = a\sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_c}} \tag{8.14}$$

Tensiunea remanentă σ_0 este deci, proporțională cu pătratul lungimii fisurii, iar cîmpul de fisuri se prezintă ca în fig. 8.9.

Dacă tensiunea remanentă este o compresiune hidrostatică, se aplică același raționament. În acest caz rezistența de rupere σ_r și respectiv

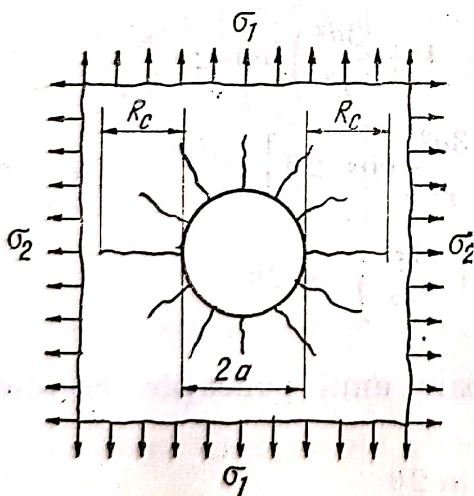


Fig. 8.9

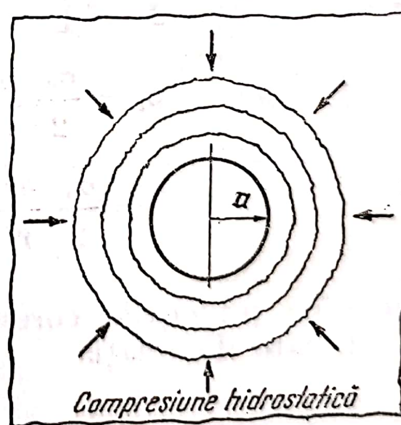


Fig. 8.10

deformația specifică ε_r condiționează fisurarea lacului, iar zona fisurată este formată din cercuri concentrice (fig. 8.10).

Se consideră cazul solicitării de întindere monoaxială $\sigma_1 = \sigma_0$ și $\sigma_2 = 0$ (fig. 8.11). Tensiunile după direcția razei și a tangentei, exprimate

în coordonate polare, înainte de perforare sînt

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{2}(1 - \cos 2\theta) \qquad (8.15)$$

$$\tau_t = -\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta.$$

După perforarea piesei, acestea devin (vezi relațiile (8.6 a)).

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{4\,a^2}{r^2} + \frac{3\,a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad (8.16\ a)$$

$$\tau_t = -\frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta.$$

Făcînd diferența între cele două stări de tensiune, se obține

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}\frac{a^2}{r^2}\left[-1 + \left(-4 + \frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{2}\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \frac{3a^2}{r^2}\cos 2\theta\right] \qquad (8.16\ b)$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_0}{2}\frac{a^2}{r^2}\left(-2 + \frac{3a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta.$$

Direcțiile principale corespunzătoare unui punct de coordonate r şi θ, sînt date de relația

$$\mathrm{tg}\, 2\theta_1 = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + \dfrac{1}{2 - \dfrac{3a^2}{r^2}}} \qquad (8.17)$$

În fig. 8.11 este indicată direcția fisurilor. Cele mai lungi fisuri corespund pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, fiind perpendiculare pe direcția solicitării.

Scanned with OKEN Scanner

După această direcție tensiunile principale au valorile

a) Dacă $\frac{r}{a} \leqslant \sqrt{3}$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{3\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (8.18\ a)$$

b) Dacă $\frac{r}{a} > \sqrt{3}$

$$\sigma_1 = \frac{3\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) \qquad (8.19\ b)$$

Dacă tensiunea remanentă este o compresiune monoaxială (fig. 8.12), fisurile sînt concentrice, cea mai depărtată fisură de centrul găurii fiind după direcția $\theta = 0$, paralelă cu direcția tensiunii remanente.

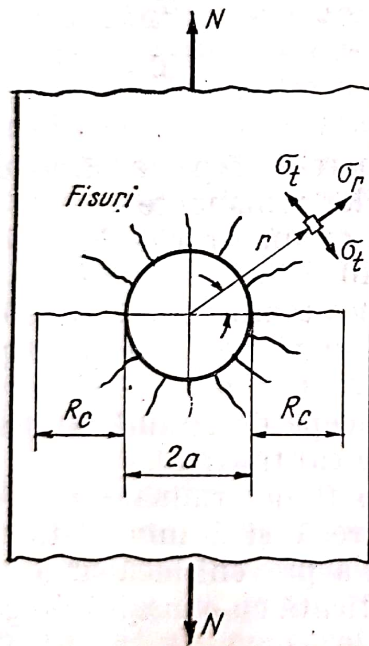


Fig. 8.11

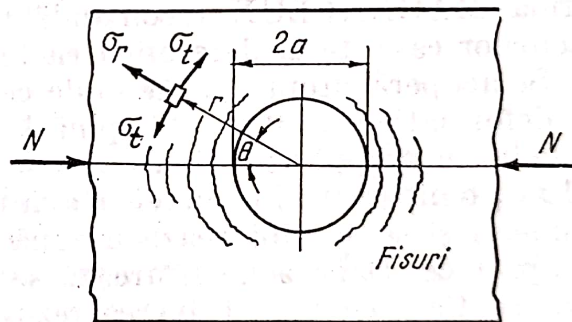


Fig. 8.12

Tensiunile principale după această axă au valorile

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(-5 + \frac{3a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{3a^2}{r^2}\right). \qquad (8.19\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 8.13 se prezintă cîmpul de fisuri în cazul stării de tensiune biaxiale şi anume:

În fig. 8.13, a pentru cazul unei plăci solicitate la întinderea biaxială cu $\sigma_1 > \sigma_2$.

În fig. 8.13, b, idem compresiune biaxială $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ şi

În fig. 8.13, c idem, dacă solicitările la întindere şi compresiune sînt egale.

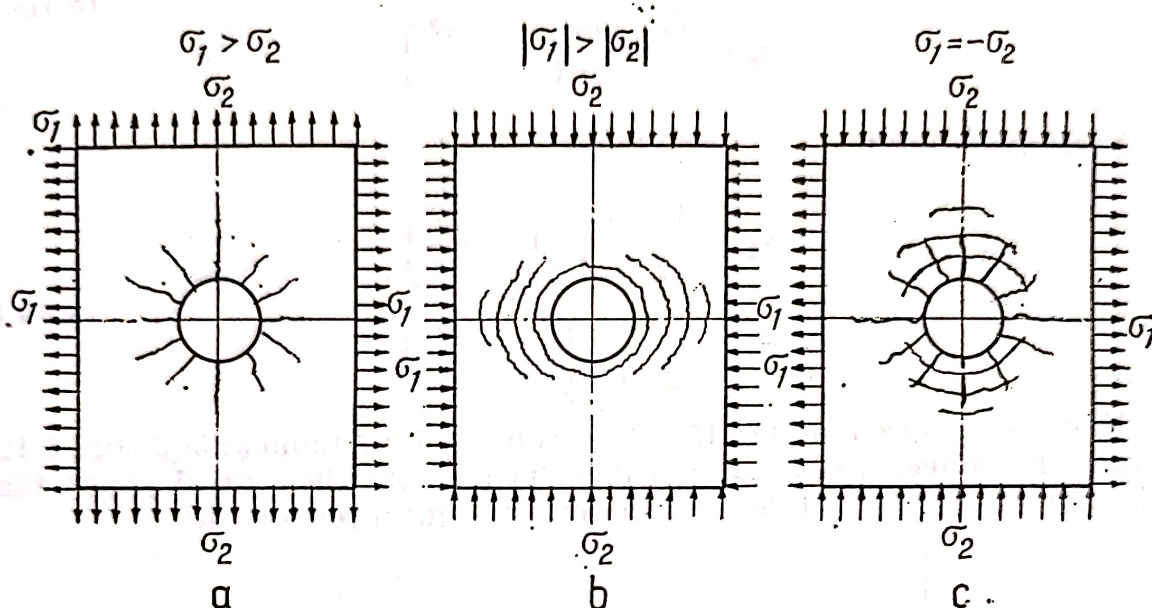


Fig. 8.13

Firma MAGNAFLUX recomandă următoarele etape în cazul utilizării lacurilor casante la determinarea tensiunilor remanente.

1°. Se acoperă suprafaţa piesei de cercetat cu un strat de lac, a cărui prag la deformaţie este $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ pînă la $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Pentru a preveni fisurarea lacului în timpul uscării, uscarea se face la o temperatură superioară, cu 5—10°C, temperaturii camerei. După uscare se aduce piesa la temperatura camerei şi se sensibilizează o zonă mică a suprafeţei piesei cu CO_2 sau cu apă rece. Dacă zona fisurează se pot începe determinările (fisurarea este esenţială pentru obţinerea rezultatelor cantitative).

2°. Se practică, în zona unde urmează a fi determinate tensiunile remanente, o gaură cu diametrul cuprins între 1 şi 3 mm. Adîncimea găurii este egală cu diametrul acesteia. Pentru a preveni încălzirea materialului de bază este indicat ca gaura să fie practicată cu o maşină de găurit manuală.

3°. După găurire, imediat, se sensibilizează cu CO_2 sau cu apă rece, zona din jurul găurii, pînă începe să apară fisuri.

4°. Tensiunile remanente de întindere produc cîmpuri de fisuri radiale (fig. 8.11) în timp ce tensiunile de compresiune produc fisuri circulare (fig. 8.12). Valorile deformaţiilor specifice produse de tensiunile eliberate pot fi estimate prin măsurarea dimensiunii cîmpului de fisuri, începînd de la marginea găurii; unitatea de măsură fiind diametrul găurii. Astfel în cazul lacurilor „Stresscoat" (v. cap. 7), se consideră că o fisură a cărei lungime este egală cu diametrul găurii corespunde la o

Scanned with OKEN Scanner

deformație specifică de 7 00 $\frac{\mu \text{cm}}{\text{cm}}$ ($0{,}7 \cdot 10^{-3}$). Dacă, de exemplu, în cazul unei găuri cu diametrul de 3 mm, cîmpul de fisuri se întinde pînă la 6 mm de la marginea găurii, deformația specifică remanentă este de 1400 $\frac{\mu \text{cm}}{\text{cm}}$ ($1{,}4 \cdot 10^{-3}$). Aceastǎ corespunde, în cazul oțelurilor, la o tensiune reziduală de 2940 $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ (coniderînd că limita de elasticitate a oțelului nu este depășită.)

c) *Utilizarea lacurilor fotoelastice.* Pentru determinarea tensiunilor remanente principale σ_1 și σ_2, într-un punct situat pe supfața unei structuri, zona din vecinătatea punctului considerat se acoperă cu un strat de lac fotoelastic. Dacă suprafața este plană, se poate utiliza o folie fotoelastică reflectorizantă lipită pe structură cu un adeziv. În cazul suprafețelor curbe folia fotoelastică se mulează sub foıma unui înveliș care se fixează pe strutură cu adeziv reflectorizant. În punctul în care urmează să se determine tensiunile principale se execută o gaură cu diametrul de 1,5—3,0 mm, care trebuie să străbată stratul de lac și să pătrundă în structură pe o adîncime egală cu diametrul găurii.

Prin găurire tensiunile remanente de la suprafața structurilor se redistribuie, astfel că efectul fotoelastic observat va fi proporțional cu modificarea stării de tensiune în punctul din zona studiată. După găurire, în jurul găurii se formează un cîmp simetric de franje fotoelastice. Axele de simetrie ale cîmpului fotoelastic vor da direcțiile tensiunilor principale. Astfel: axa pe care se înregistrează valoarea cea mai mică a ordinului de bandă pe conturul găurii va da direcția tensiunii principale σ_1 (fig. 8.14). Valoarea maximă a ordinului de bandă determinat pe această axă va da tensiunea principală σ_2. Axa pe care se înregistrează valoarea cea mai mare a ordinului de bandă va coincide cu direcția tensiunii principale σ_2, iar ordinul de bandă maxim de pe această axă, va da valoarea tensiunii principale σ_1.

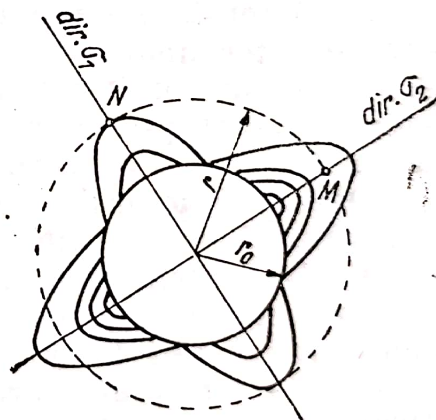


Fig. 8.14

De multe ori, gradientul tensiunilor este foarte ridicat pe conturul găurii și ordinul de bandă nu poate fi determinat cu precizie.

Pe de altă parte conturul găurii făcute în învelișul fotoelastic este, în majoritatea cazurilor, neregulat, datorită așchiilor care se desprind prin găurire, astfel că evaluarea ordinului de bandă pe conturul găurii, de multe ori, se face cu precizie foarte scăzută. Din aceste motive este recomandabil ca determinarea ordinului de bandă să se facă într-un punct situat pe un cerc distanțat de contur. N. Nishida (45) propune ca tensiunile să fie determinate în puncte situate pe un cerc (fig. 8.14) cu raza $r = \sqrt{3}a$. În

acest caz tensiunile principale σ_1 şi σ_2 vor fi calculate în cele două puncte M şi N cu următoarele relaţii

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \frac{k_M \cdot f \cdot E}{1 + \mu} \quad \text{şi} \quad \sigma_2 = \frac{3}{2} \frac{k_N \cdot f \cdot E}{1 + \mu} \tag{8.20}$$

unde k_M şi k_M reprezintă ordinele de bandă determinate pe cele două direcţii (σ_1 şi σ_2), la distanţa $r = \sqrt{3}a$ (a fiind raza găurii şi f constanta de bandă a lacului fotoelastic).

8.2.4. METODA GĂURIRII INELARE

Determinarea tensiunilor remanente prin metoda găuririi inelare se bazează, ca şi metoda găuririi, prezentată mai sus, pe măsurarea deformaţiilor ce se produc datorită modificării stării de tensiune din piesa studiată. Măsurarea deformaţiilor se face, de regulă, cu ajutorul traductoarelor rezistive aplicate în punctele în care se urmăreşte cunoaşterea tensiunilor remanente.

Anularea stării de tensiune din zona unui traductor rezistiv, în vederea măsurării deformaţiei corespunzătoare, se face practicînd o gaură inelară în jurul acestuia, care conduce la eliberarea materialului, din dreptul traductorului, de legătură cu materialul înconjurător şi, deci, la descărcarea lui de tensiunile corespunzătoare acestei legături. Gaura inelară trebuie să fie atît de adîncă încît starea de tensiune din piesă să nu mai influienţeze materialul din interiorul găurii inelare unde este plasat traductorul sau rozeta de traductoare.

Dacă tensiunile sînt uniform distribuite pe grosimea piesei, metoda permite determinarea valorii efective a tensiunilor. În cazurile cînd tensiunile nu sînt uniform distribuite pe grosimea piesei, metoda permite determinarea tensiunilor existente la nivelul suprafeţei care, de obicei, au cea mai mare valoare.

Dacă traductorul rezistiv, sau rozeta de traductoare, se aplică pe o piesă nesolicitată, prin efectuarea găurii inelare se determină tensiunile remanente existente înainte de efectuarea găurii.

Dacă traductorul, sau rozeta de traductoare, se aplică pe o piesă supusă unei anumite stări de solicitare măsurările, cu această metodă, indică suma algebrică a tensiunilor produse de solicitarea respectivă şi a tensiunilor remanente.

Pe măsura creşterii adîncimii găurii materialul de la suprafaţa piesei se descarcă de efort. Adîncimea la care efectul stării de tensiune de la baza cilindrului format prin efectuarea găurii inelare nu se mai resimte asupra traductorului, sau rozetei de traductoare, s-a determinat, de autor, prin măsurări efectuate pe două tipuri de epruvete : o grindă simplu rezemată cu secţiune dreptunghiulară, solicitată la încovoiere pură şi o bară comprimată centric.

---

*) Metoda este dezvoltată în cuprinsul tezei de doctorat elaborată de dr. ing. Gădeanu Liviu de la Institutul politehnic din Timişoara (conducător ştiinţific ; acad. prof. Dan Mateescu).

Scanned with OKEN Scanner

Grinda simplu rezemată, avînd secțiunea transversală dreptunghiulară, a fost solicitată la încovoiere pură într-o mașină universală de încercări mecanice (fig. 8.15).

Găurirea inelară a fost realizată în trepte, de cîte un milimetru adîncime, cu o mașină de găurit cu burghiu inelar. Rezultatele măsurărilor

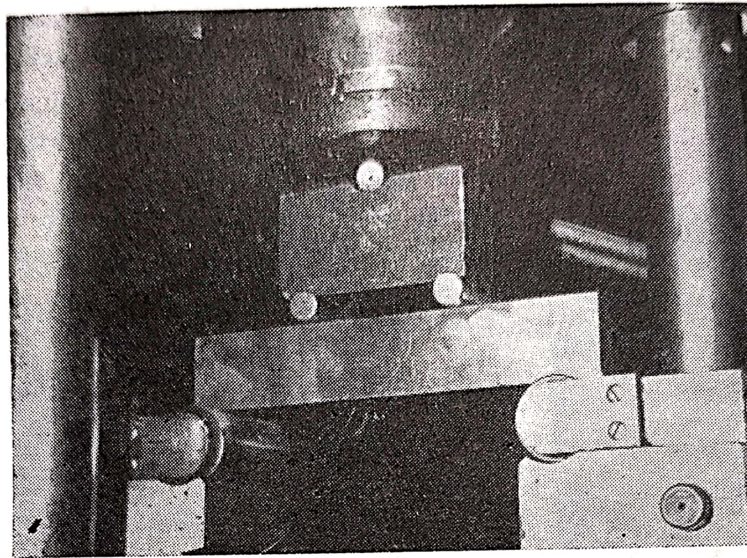


Fig. 8.15

sînt date în fig. 8.16. Ele indică o relaxare completă a materialului la o adîncime h a găuririi inelare de 6 mm, corespunzătoare jumătății diametrului mediu al găurii inelare ($D = 12$ mm.).

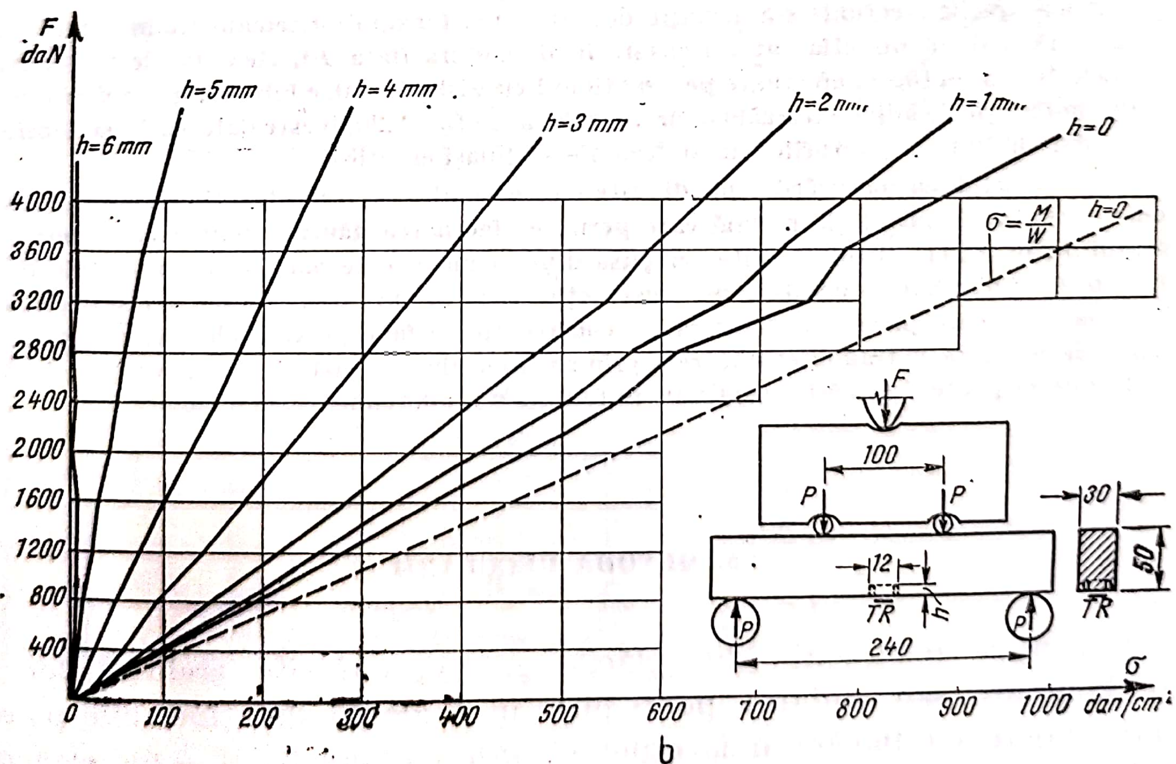


Fig. 8.16

Bara comprimată centric a fost solicitată într-un dispozitiv special, de forma unui jug (fig. 8.17), care a permis menţinerea constantă a solicitării în timpul operaţiei de găurire şi măsurarea deformaţiilor după fiecare treaptă de 1 mm adîncime. Rezultatele măsurărilor sînt date în (fig. 8.18).

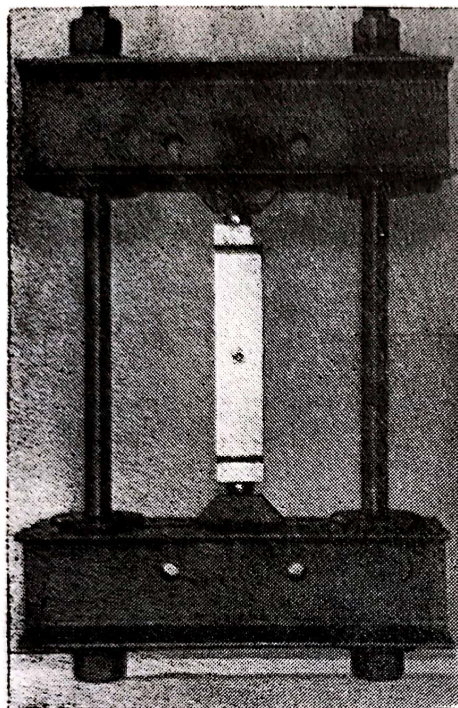


Fig. 8.17

Din analiza rezultatelor se observă că tensiunile introduse iniţial în bară, prin strîngerea piuliţelor şuruburilor laterale, în zona încercuită prin găurire, dispar la o adîncime *h* a găurii de cca. 5 mm. La descărcarea barei (desfacerea piuliţelor), s-a constatat că traductoarele rezistive indică reapariţia unor tensiuni de compresiune de cca 100—200 daN/cm^2. Acest fenomen conduce la concluzia că în cazul existenţei unor tensiuni mari la baza găurii, pentru măsurări exacte, adîncimea acesteia trebuie să fie de ordinul a 0,65 D.

Aplicaţie. Cu metoda prezentată mai sus, autorul a efectuat măsurări pe eşantioane reprezentînd legătura prin sudare dintre etajele componente ale unui grinzi cu inimă plină de mari dimensiuni. Datorită unor abateri de execuţie care au provocat denivelări ale tălpilor celor două etaje, între feţele acestora, au rămas spaţii libere cu valori cuprinse între 0 şi 12 mm. Sudurile dintre cele două tălpi ale etajelor au fost executate după ce în spaţiile libere au fost introduse pene metalice (fig. 8.19).

Prin măsurările efectuate s-a urmărit determinarea tensiunilor remanente în lungul cusăturii (faţa *A*) şi după direcţia catetei cusăturii de sudură (faţa *B*). Rezultatele măsurărilor, pentru cele 10 traductoare, efectuate pe eşantionul cu distanţa între feţele tălpilor d = 0 mm., sînt date, în funcţie de adîncimea găurii, în fig. 8.20, a. În fig. 8.20, b este dată variaţia tensiunilor remanente în lungul cusăturilor de sudură ale aceluiaşi eşantion.

Pentru efectuarea măsurărilor pe diferite elemente ale unei construcţii metalice, autorul metodei a realizat o instalaţie mobilă care permite efectuarea găuririi pentru orice poziţie a elementului (fig. 8.21). Instalaţia este compusă dintr-o maşină de găurit cu un burghiu inelar şi un dispozitiv de fixare a acesteia pe construcţie. Este în curs de realizare o instalaţie, mai perfecţionată, la care prinderea acesteia de construcţie se face pe cale electromagnetică, iar în cablul de legătură al traductorului trece prin axul burghiului, astfel încît, variaţia tensiunii în traductor poate fi urmărită continuu în funcţie de adîncimea găurii inelare *h*.

8.2.5. METODA DECUPĂRII

Tensiunile remanente din plăcile groase, datorite prelucrărilor la cald (laminare sau sudare), pot fi puse în evidenţă detaşînd din placă, — prin tăiere cu flacăra oxiacetilenică sau cu ferăstrăul — un element *ABCD* avînd laturile de ordinul a cîţiva centimetri. Elementul detaşat

Scanned with OKEN Scanner

Ordinea de taiere: 1, 2, 3, 4, 5.

$-\sigma$: 1500, 1400, 1300, 1200, 1100, 1000, 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100

h mm: 0, 1, 2, 3, 4, 5, Descărcat

1(2), 3, 5, 4, 20, 50

Fig. 8.18

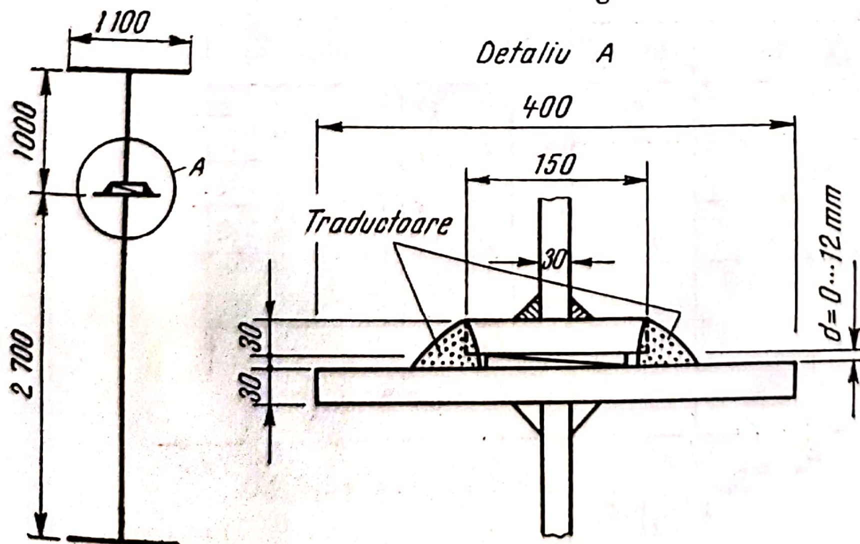


Fig. 8.19

este eliberat de tensiunile remanente exercitate asupra sa de către restul plăcii.

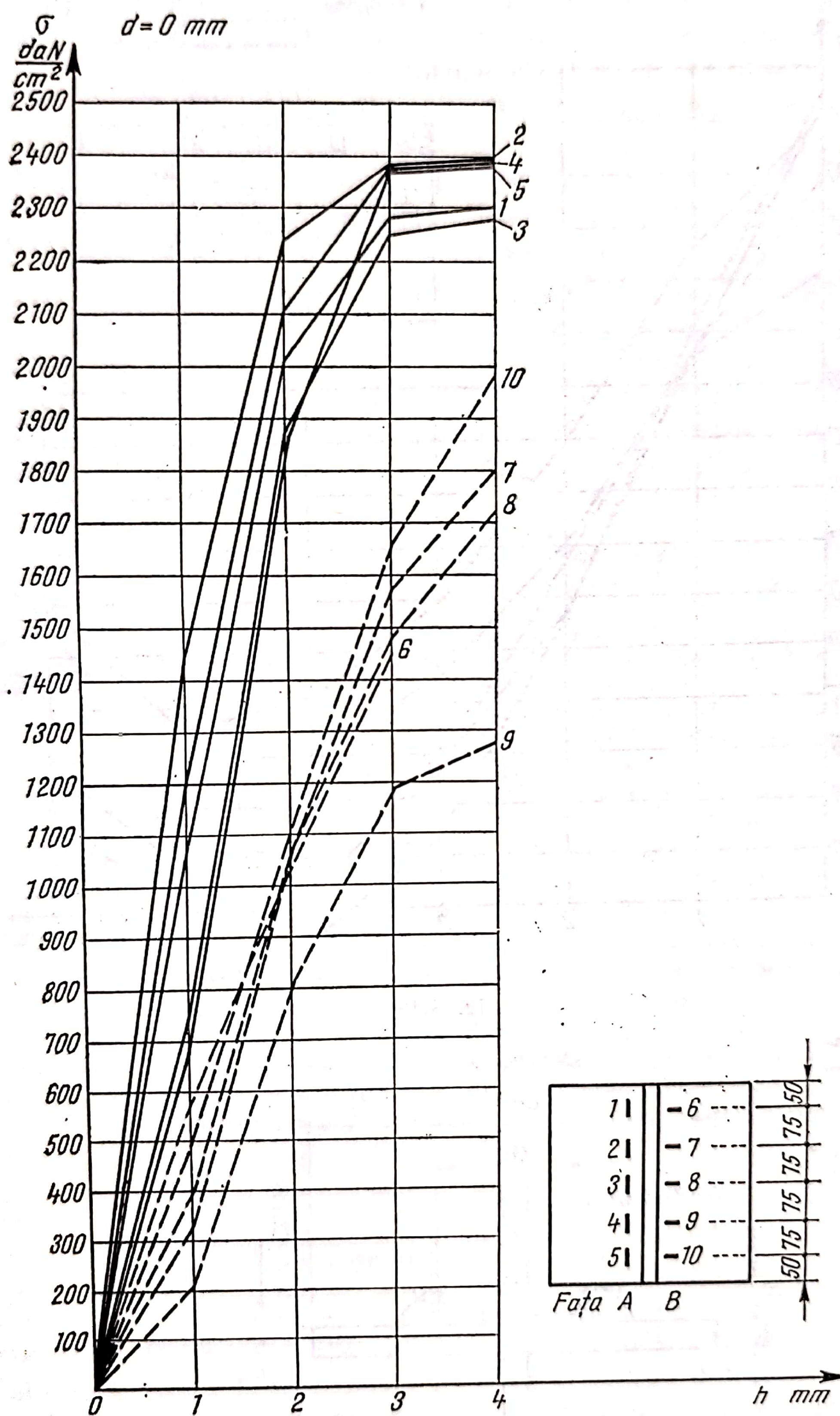


Fig. 8.20 a

Înainte de decupare, pe elementul $ABCD$ (fig. 8.22) se fixează reperele 1, 2, 3 și 4 între care se măsoară distanțele l_{12}, l_{13} și l_{14} de regulă cu ajutorul unui extensometru mecanic. Măsurînd, după tăiere, aceleași

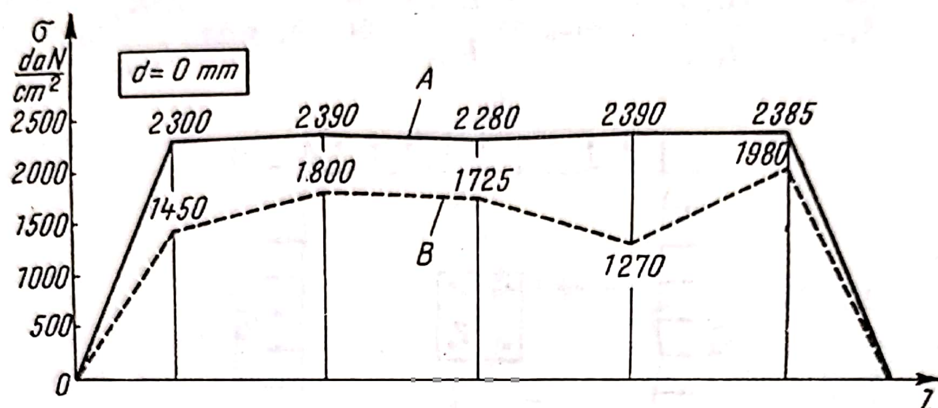


Fig. 8.20 *b*

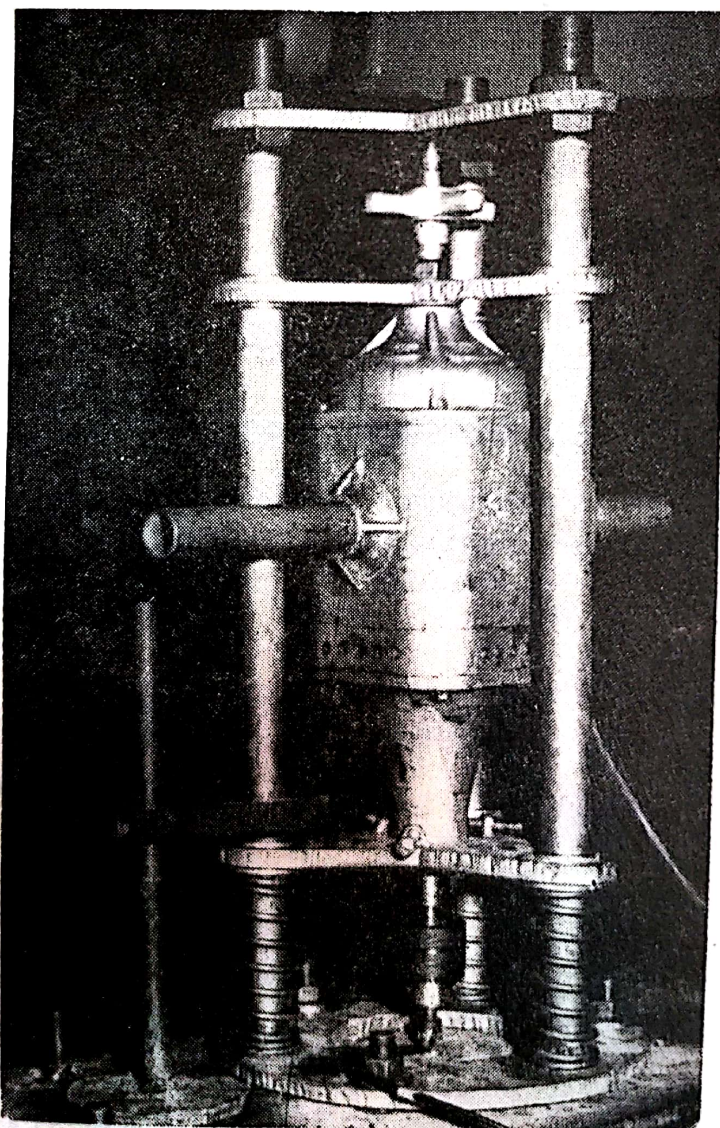


Fig. 8.21

distanțe, se constată că ele au variat cu Δl_{1-2}, Δl_{1-3} și Δl_{1-4} datorită tensiunilor remanente eliberate. Sînt cunoscute, deci, deformațiile specifice după direcțiile respective — datorite acestor tensiuni

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{\Delta l_{1-2}}{l_{1-2}}, \quad \varepsilon_{1-3} = \frac{l_{1-3}}{l_{1-3}} \quad \text{și} \quad \varepsilon_{1-4} = \frac{\Delta l_{1-4}}{l_{1-4}}. \tag{8.21}$$

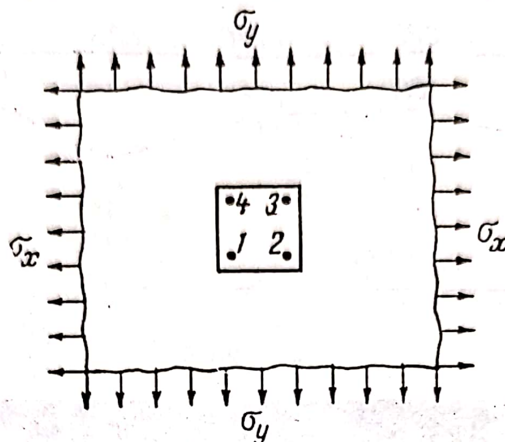


Fig. 8.22

Cu ajutorul relațiilor din tabelul 1.5 corespunzătoare rozetei dreptunghiulare, se calculează valorile tensiunilor remanente eliberate prin detașarea elementului considerat.

Măsurătorile se fac cu ajutorul unui extensometru de construcție specială care pentru marcarea punctelor 1, 2, 3 și 4 folosește bile de oțel, aplicate pe placă ca în fig. 2.19, cu diametrul de 1,5 mm (v. § 2.7).

8.2.6. METODA RABOTĂRII

În cazul profilelor cu secțiune T sau I, pentru măsurarea tensiunilor remanente orientate, provenite din laminare sau din sudare (cînd acestea sînt alcătuite din elemente îmbinate prin sudare), se folosește frecvent metoda îndepărtării succesive a straturilor prin rabotare.

Ca exemplu se consideră un profil laminat cu secțiune din fig. 8.23, a. Se îndepărtează prin rabotare un strat, de pe talpa grinzii, cu secțiunea a_1 și grosimea constantă în care se presupune că acționează tensiunea remanentă σ_1.

Dacă σ_1 este o tensiune de întindere, îndepărtarea stratului a_1 este echivalentă cu adăogirea la partea rămasă de secțiune a unei forțe de întindere

$$N_1 = a_1 \sigma_1 \tag{8.22}$$

și a unui moment încovoetor

$$M_1 = a_1 \sigma_1 e_1 \tag{8.23}$$

*) Metoda a fost introdusă ca lucrare de laborator cu studenții, la catedra de utilaj și tehnica sudării de la Institutul Politehnic Timișoara.

Scanned with OKEN Scanner

care provoacă curbarea grinzii cu săgeata v_1

$$v_1 = \frac{M_1 l^2}{8EJ_1} \tag{8.24}$$

unde l este lungimea grinzii iar produsul EI_1 este rigiditatea acesteia (după îndepărtarea stratului a_1).

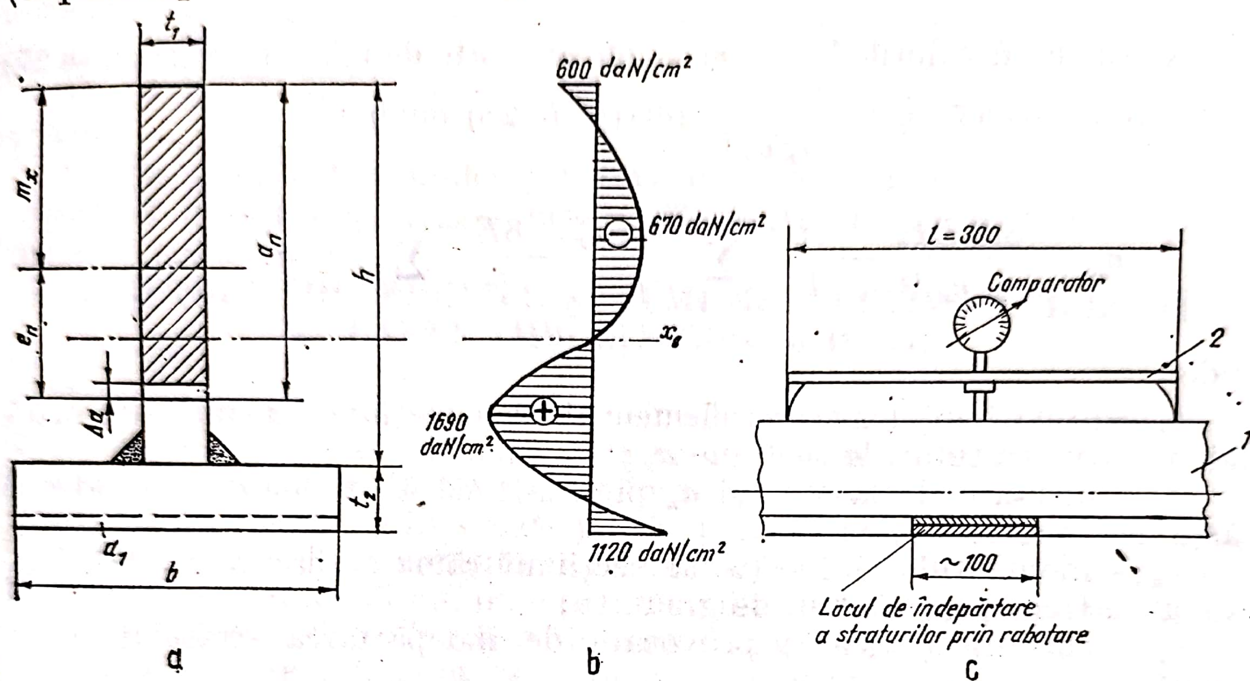


Fig. 8.23

Din relațiile de mai sus rezultă tensiunea remanentă din stratul îndepărtat, cu secțiunea a_1

$$\sigma_1 = \frac{8EI_1 v_1}{a_1 e_1 l}. \tag{8.25}$$

Îndepărtarea stratului a_1 va produce, în secțiunea rămasă A_1 a profilului, apariția unei tensiuni datorite forței N_1

$$\sigma_{N_1} = \frac{\sigma_1 a_1 e_1}{I_1} y_1 = \frac{8Ev_1}{l^2} y_1 \tag{8.26}$$

și alta datorită momentului încovoietor M_1

$$\sigma_{M_1} = \frac{\sigma_1 a_1 e_1}{I_1} y_1 = \frac{8Ev_1}{l^2} y_1 \tag{8.27}$$

unde: y_1 este distanța dintre centrul de greutate al secțiunii profilului și linia de rabotare considerată; A_1 — secțiunea rămasă a profilului după îndepărtarea stratului a_1.

I_1 — momentul de inerție al secțiunii profilului, rămasă după îndepărtarea stratului de secțiune a_1, în raport cu axa neutră.

Pentru cazul general, dacă se notează cu:

σ_n tensiunea remanentă în stratul a_n al profilului T care nu a fost supus rabotării;

Scanned with OKEN Scanner

σ_x — tensiunea remanentă, în acelaşi, strat după ce au fost eliminate straturile subadiacente; tensiunea remanentă în stratul a_n va fi

$$\sigma_n = \sigma_x - \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \sigma_N - \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \sigma_M. \tag{8.28}$$

Substituind valorile lui σ_N şi σ_M cu cele date de relaţiile (8.26) şi (8.27) şi ţinînd seama că $\sigma_x = \frac{8v_n E I_n}{a_n e_n l^2}$ relaţia (8.28) devine

$$\sigma_n = \frac{8v_n E I_n}{a_n e_n l^2} - \frac{8E}{l^2} \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \frac{v_x I_x}{e_x A_x} - \frac{8E}{l^2} \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} v_x (a_n - m_x) \tag{8.29}$$

unde:

v_n este curbura (săgeata) elementului cu secţiune haşurată datorită îndepărtării stratului de secţiune a_n;

e_n — distanţa de la stratul a_n pînă la linia centrelor de greutate a părţii haşurate rămase;

I_n — momentul de inerţie al secţiunii rămase (haşurată), faţă de axa x_0 ce trece prin centrul de greutate;

v_x — curbura (săgeata) provocată de îndepărtarea stratului x cu suprafaţa a_x.

A_x — suprafaţa părţii rămase din secţiune după îndepărtarea unui număr de x straturi;

l — lungimea elementului;

e_x — distanţa de la stratul îndepărtat x pînă la centrul de greutate a părţii rămase din secţiune.

m_x — distanţa de la marginea superioară a secţiunii pînă la centrul de greutate al părţii rămase (axa x_0).

a_n— distanţa de la marginea superioară a profilului T pînă la stratul n.

Măsurînd curbura (săgeata) produsă după îndepărtarea fiecărui strat se pot estima tensiunile remanente introduse de operaţia de sudare.

În fig. 8.23, b se dă diagrama tensiunilor remanente în cazul unei grinzi realizată prin sudare, avînd următoarele dimensiuni: $h = 110$ mm; $b = 60$ mm; $t_1 = t_2 = 10$ mm; şi $l = 300$ mm.

Ordinea operaţiilor a fost următoarea:

1°. S-a pregătit o grindă sub forma unui profil T, din două platbande care s-au sudat electric manual (fig. 8.23, a).

2°. S-a reperat suprafaţa de referinţă şi locul de plasare al cuţitelor dispozitivului pentru a evita eventualele erori la plasarea ulterioară a dispozitivului pe grindă.

3°. Înlăturînd dispozitivul, prin rabotare s-a îndepărtat un strat de grosime 3 mm, din partea centrală a feţei inferioare a tălpii profilului.

4°. S-a montat dispozitivul de măsurare pe grindă (pe vechile locuri de pe inima grinzii) şi s-a determinat săgeata v_1 (fig. 8.23, c), produsă prin

Scanned with OKEN Scanner

îndepărtarea stratului respectiv : valoarea săgeţii se obţine prin scăderea din indicaţia comparatorului a valorii de 3 mm (grosimea stratului îndepărtat).

5°. Cu ajutorul relaţiei (8.25) s-a determinat valoarea tensiunii remanente în stratul îndepărtat.

6°. Se repetă operaţiile de la punctele 3 şi 4.

7°. Cu ajutorul relaţiei (8.29) s-a determinat tensiunea remanentă în cel de al doilea strat.

8°. Se repetă operaţiile de la 3, 4 şi 7 pentru un număr suficient de straturi.

9°. Cu valorile tensiunilor remanente, astfel aflate, s-a trasat epura tensiunilor remanente, în secţiunea profilului T, din fig. 8.23, b.

8.3. METODE DISTRUCTIVE ŞI SEMIDISTRUCTIVE UTILIZATE ÎN CAZUL ÎMBINĂRILOR SUDATE

În cazul construcţiilor sudate tensiunile remanente apar, în principal, din cauza deformaţiilor termoplastice ce au loc în perioada de răcire a pieselor ce se sudează. În funcţie de forma şi mărimea pieselor tensiunile remanente din construcţiile sudate pot fi : monoaxiale, biaxiale şi triaxiale. De regulă tensiunile remanente din îmbinările sudate sînt triaxiale, dar dacă după una sau două din direcţii tensiunile au valori mici se consideră, convenţional, că este vorba de o stare mono sau biaxială de tensiuni.

Cunoscîndu-se influenţa pe care o au tensiunile remanente asupra rezistenţei şi a fiabilităţii construcţiilor sudate, mai ales cînd acestea sînt supuse la solicitări variabile, s-au dezvoltat — paralel cu extinderea construcţiilor sudate — o serie de metode experimentale pentru evaluarea acestora. Dintre metodele distructive se prezintă :

8.3.1. METODA ROSENTHAL ŞI NORTON

Metoda constă în tăierea din piesă a unui element (epruvetă) în formă de paralelipiped dreptunghic, la care se măsoară deformaţia rezultată prin tăiere.

Epruveta *1* din fig. 8.24 (cazul unei plăci sudate cap la cap) serveşte la măsurarea deformaţiilor longitudinale. Pentru măsurarea deformaţiilor

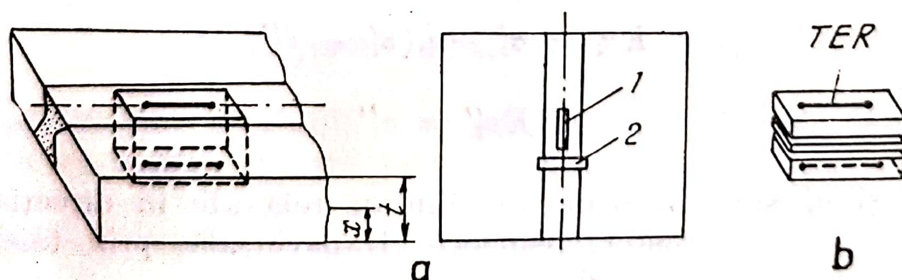


Fig. 8.24.

transversale este necesar să se taie o a doua epruvetă *2*, asemănătoare cu prima, în direcţia transversală pe cusătură.

Se admite că, în această regiune, deformația pe o direcție dată nu se modifică apreciabil de la o epruvetă la alta. Cele două epruvete au o lungimea egală cu cel puțin de două ori grosimea. Cu ajutorul tensometriei electrice, utilizînd TER aplicate pe ambele fețe ale celor două epruvete, se măsoară deformațiile specifice longitudinale și transversale.

Etapa următoare constă în determinarea valorii tensiunii remanente din epruvetă.

Pentru aceasta se secționează epruvete, pornind de la secțiunea mijlocie spre capete. Fiecare jumătate a epruvetei se secționează în fîșii de circa 3 mm grosime. În fiecare stadiu, deformația cauzată de relaxarea tensiunii se măsoară pe cele două fețe exterioare cu ajutorul TER. Tensiunea rămasă în ultima fîșie se determină prin extrapolare, sau direct, folosind procedeul difracției razelor X (v. § 8.5).

Dacă se admite că, după fiecare tăiere, modificarea tensiunii din partea rămasă a epruvetei este o funcție liniară de grosime, tensiunea remanentă relaxată în straturile interioare, poate fi calculată din deformația celor două straturi exterioare. Cele două deformații principale ε_t și ε_l la diferite nivele, fiind astfel determinate, rămîne să se găsească a treia deformație principală, care este perpendiculară pe suprafața plăcii. Aceasta poate fi calculată, la diferite nivele, din condițiile de echilibru al forțelor ce acționează pe un paralelipiped elementar. Cu aceasta, starea de deformație și de tensiuni este complet determinată.

Deformațiile măsurate pe cele două fețe, care apar în urma tăierii epruvetei, sînt ε'_l (pentru epruveta longitudinală) și ε'_t (pentru epruveta transversală).

Deformațiile suplimentare ε''_l și ε''_t apar ca rezultat al tensiunilor eliberate prin tăierea epruvetelor în fîșii. Admițînd o eliberare parțială a tensiunilor în direcția longitudinală și o eliberare totală în direcția transversală, se obține

$$E\varepsilon'_1 = \sigma'_1 - \mu(\sigma'_t + \sigma''_t)$$

$$E\,\varepsilon''_l = \sigma''_l$$

și

$$E\varepsilon'_t = \sigma'_t - \mu(\sigma'_l + \sigma''_l)$$

$$E\varepsilon''_t = \sigma''_t$$

în care: σ'_l și σ'_t sînt valorile tensiunilor relaxate în direcția longitudinală, respectiv transversală, prin tăierea epruvetei din placă;

σ''_l și σ''_t — valorile tensiunilor, în aceleași direcții, obținute prin secționarea în fîșii a epruvetei;

E și μ — constantele elastice ale metalului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd ecuaţiile anterioare, se obţine

$$\sigma_1' = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_l' + \mu\varepsilon_t') + \frac{\mu E}{1-\mu^2}(\varepsilon_l'' + \mu\varepsilon_t'')$$

$$\sigma_t' = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t' + \mu\varepsilon_l') + \frac{\mu E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t'' + \mu\varepsilon_l''). \qquad (8.22)$$

Valorile celor două tensiuni de-a lungul grosimii pot fi calculate pe baza variaţiei liniare a tensiunilor pe grosime. Tensiunea medie pe grosime poate fi stabilită cu ajutorul acestor valori.

Cînd epruveta se taie în două (fig. 8.24, b), se relaxează, atît tensiunile normale longitudinale, cît şi cele după direcţia transversală. Se produce o relaxare parţială a tensiunilor în direcţia longitudinală, în ambele jumătăţi ale epruvetei secţionate. Datorită variaţiei liniare a tensiunilor pe grosime, mărimea tensiunii relaxate poate fi calculată, la fiecare nivel, din mărimea tensiunii relaxate pe partea superioară şi cea inferioară a feţelor epruvetei, folosind condiţiile de echilibru.

Autorii acestei metode au demonstrat că tensiunile longitudinale normale σ_x la un nivel dat x, relaxate prin tăierea epruvetei în două, au valoarea

$$\sigma_x''^0 = (5x - 4)\,\sigma_t''^0 + (1 - x)\sigma_b''^0 \qquad (8.23)$$

unde :

$\sigma_t''^0$ este tensiunea relaxată în urma tăierii epruvetei pe faţa superioară ;

$\sigma_b''^0$ – tensiunea corespunzătoare pe faţa inferioară.

Deoarece epruveta este presupusă îngustă, tensiunea transversală este neglijabilă, deci

$$\sigma_t''^0 = E\varepsilon_t''^0 \quad \text{şi} \quad \sigma_b''^0 = E\varepsilon_b''^0;$$

ca urmare relaţia (8.23) devine

$$\sigma_x''^0 = E[(5x - 4)\,\varepsilon_t''^0 + (1 - x)\varepsilon_b''^0]. \qquad (8.24)$$

În mod similar, tensiunile relaxate, la un nivel dat, deasupra feţei inferioare a epruvetei, au valoarea

$$\sigma_x''^0 = E[(5x - 4)\varepsilon_b''^0 + (1 - x)\varepsilon_t''^0]. \qquad (8.25)$$

În relaţiile de mai sus, x este distanţa de la suprafaţa inferioară, respectiv de la suprafaţa superioară pînă la nivelul la care se face secţionarea epruvetei, iar $\varepsilon_t''^0$ şi $\varepsilon_b''^0$ sînt deformaţiile măsurate cu ajutorul TER de pe suprafaţa superioară şi cea inferioară, ca rezultat al tăierii epruvetei.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea tensiunii relaxate prin tăierea în fîşii a jumătăţilor epruvetei, de la secţiunea medie spre faţa exterioară, pentru jumătatea superioară a epruvetei, este

$$\sigma_x''^s = E\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{d\varepsilon_t''}{dx}(1-x) - 2(\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0) + 3(1-x)\int_{\frac{l}{2}}^{x}\frac{\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0}{(1-v)^2}dv\right]. \tag{8.26}$$

Relaţia corespunzătoare jumătăţii inferioare se obţine schimbînd indicele s cu i şi t cu b.

Semnificaţia simbolurilor este următoarea :

ε_t'' şi ε_b'' sînt deformaţiile de relaxare măsurate cu ajutorul TER aplicate pe faţa superioară, respectiv pe faţa inferioară a epruvetei, pentru poziţia x;

$\varepsilon_t''^0$ şi $\varepsilon_b''^0$ — deformaţiile relaxate pe partea superioară şi cea inferioară, care iau naştere prin tăierea în două a epruvetei ;

$\frac{d\varepsilon''}{dx}$ — înclinarea diagramei $\varepsilon'' = f(x)$, pentru valoarea corespunzătoare a distanţei x;

v — variabilă auxiliară de integrare.

Pentru efecuarea integralei $F = \int_{\frac{l}{2}}^{x}\frac{\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0}{(1-v)^2}dv$, care cuprinde valorile variabilei auxiliare v, se foloseşte metoda grafică.

Tensiunea remanentă longitudinală totală, pentru un nivel dat x, se obţine prin însumarea tensiunilor corespunzătoare cauzate de :

— tăierea epruvetei din placă ; σ_1' şi σ_t' ;
— tăierea epruvetei în două ; $\sigma_x''^0$;
— tăierea în fîşii a epruvetei $\sigma_x''^s$

Termenul care conţine integrala tinde să devină nedeterminat pentru suprafaţa inferioară şi cea superioară. Din acest motiv, cînd cele două jumătăţi ale epruvetei sînt reduse, prin tăierea în fîşii, la aproximativ o zecime din grosimea iniţială, pentru determinarea tensiunilor rămase încă pe feţele superioare şi pe cele inferioare ale epruvetei se recomandă să se facă uz de metoda difracţiei razelor X. În această fază mărcile tensometrice sînt îndepărtate şi se fac măsurători cu ajutorul razelor X în două sau în mai multe puncte, pentru a determina tensiunile medii pe cele două feţe.

Dacă tensiunile pentru faţa superioară şi cea inferioară — astfel determinate — sînt σ_t^* şi σ_b^*, atunci tensiunile σ_t'' şi σ_b''. sînt

$$\sigma_t'' = \sigma_t^* + E\varepsilon_t'', \quad \sigma_b'' = \sigma_b^* + E\varepsilon_b'' \tag{8.27}$$

unde ε_t'' şi ε_b'' reprezintă deformaţiile de relaxare pe feţele superioare şi pe cele inferioare ale epruvetei, din momentul cînd ea a fost scoasă din placă pînă în momentul cînd a fost redusă la din grosimea $\frac{1}{10}$ iniţială.

Scanned with OKEN Scanner

8.3.2. CAZUL CUSĂTURILOR DE SUDURĂ DE GROSIME MARE

În cazul cusăturilor de sudură groase, formate din mai multe straturi, nu se poate neglija componenta tensiunilor remanente după direcția grosimii cusăturii σ_z.

În laboratorul de sudură al Școlii superioare tehnice „Bauman" din Moscova, s-au efectuat măsurări pentru determinarea valorilor celor trei componente ale tensiunilor remanente în cazul sudurilor cap la cap de grosime mare. A fost utilizată în acest scop o metodă de cercetare a tensiunilor spațiale (triaxiale) cu ajutorul găurilor adînci.

Cu ajutorul acestei metode se pot determina tensiunile remanente atît în adîncimea îmbinării sudate, cît și la suprafața îmbinării, unde tensiunile sînt biaxiale.

Determinarea tensiunilor remanente se face cu ajutorul unor elemente de formă cilindrică (fig. 8.25) pe care sînt lipite traductoare rezistive. Elementele se introduc în găuri, executate în trepte în piesa de cercetat, orientate după direcția axelor principale ale cîmpului de tensiuni remanente sau sub un unghi determinat față de acestea.

Pentru a se asigura posibilitatea înregistrării deformațiilor elementului de ambele părți, înainte de introducerea lui în piesă, i se imprimă o anumită tensiune preliminară.

După ce s-a determinat deformația care corespunde acestei tensiuni, se taie din epruvetă o coloană de material (cu secțiunea de 40 × 40 mm)

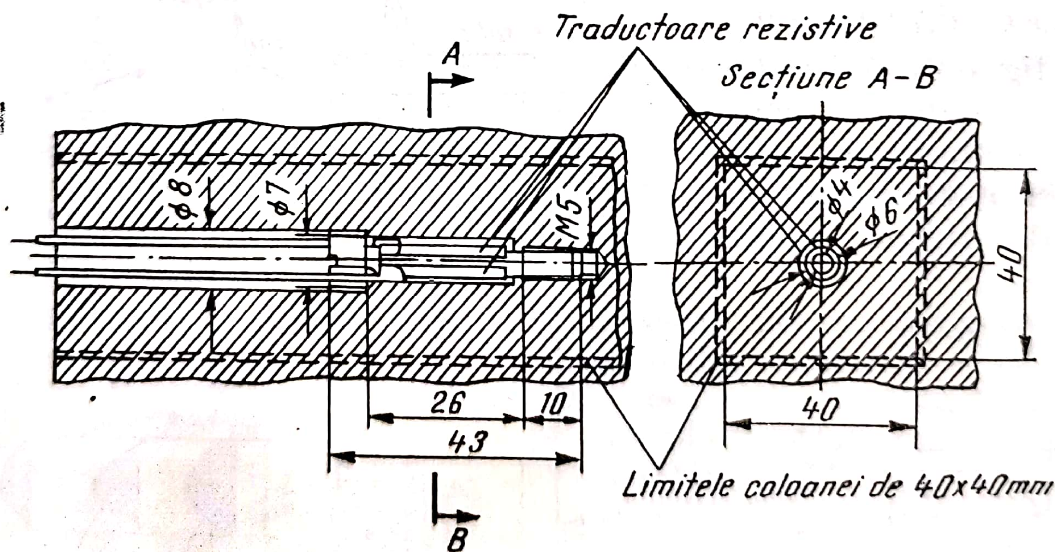


Fig. 8.25.

egală cu elementul de măsurare și se înregistrează o altă valoare a deformației.

Din diferența măsurărilor, înainte și după înlăturarea tensiunilor remanente, se obține valoarea deformațiilor specifice ε_x, ε_y și ε_z.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd axa găurii coincide cu una dintre direcţiile principale, componentele tensiunii remanente la o anumită adîncime se determină cu relaţiile

$$\sigma_x = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Delta + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_y \qquad (8.28)$$

$$\sigma_z = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_z$$

în care: $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Dacă axa găurii formează unghiuri oarecare cu direcţiile principale, mărimea tensiunilor remanente poate fi, de asemenea, stabilită cu ajutorul relaţiilor cunoscute din teoria elasticităţii. Întrucît la suprafaţa îmbinării σ_z este zero, determinarea tensiunilor remanente la suprafaţă se reduce la determinarea componentelor σ_x şi σ_y, orientate longitudinal, respectiv transversal faţă de cusătură.

Aceste componente se măsoară cu ajutorul unor traductoare rezistive, lipite de-a lungul cusăturii pentru măsurarea deformaţiei ε_x şi transversal pe cusătură pentru măsurarea deformaţiei ε_y. Descărcarea tensiunii remanente se face prin tăierea metalului de bază în jurul traductorului, pe o adîncime $h = 0{,}7\,l$ (fig. 8.26).

În fig. 8.27 sînt reprezentate rezultatele măsurărilor efectuate pe o epruvetă din oţel cu conţinut redus de carbon, sudată

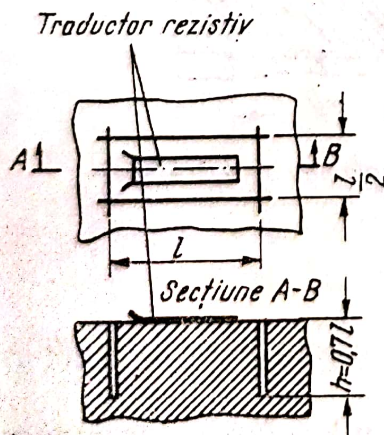


Fig. 8.26.

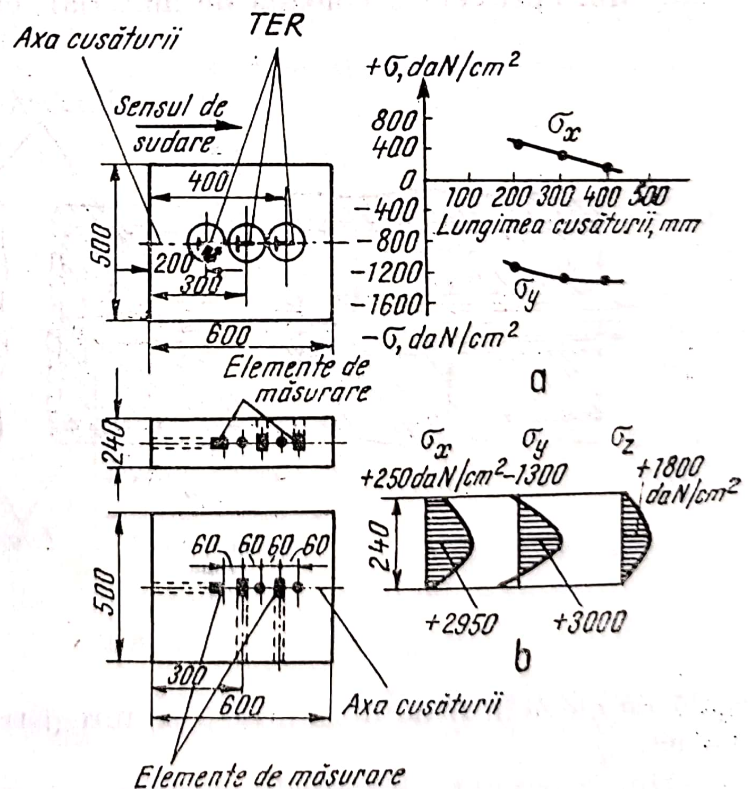


Fig. 8.27.

electric în baie de zgură, cu dimensiunile (după sudare) de 600 × 500 × × 240 mm.

Cu ajutorul a trei rozete în T formate din traductoare rezistive, s-au determinat tensiunile remanente la suprafața cusăturii σ_x și σ_y, în trei puncte situate la distanța de 200, 300 și 400 mm de la capăt. Rezultatele sînt prezentate în diagrama din fig. 8.27, a. Ele indică existența la suprafața îmbinării a tensiunii de întindere σ_x, de circa 500 daN/cm² în direcția cusăturii, și a unor tensiuni de compresiune, transversale față de cusătură, σ_y, de circa 1.400 daN/cm².

Cu ajutorul elementelor de măsurare montate în interior s-a stabilit mărimea și modul de repartiție a tensiunilor σ_x, σ_y și σ_z în secțiunea mijlocie a epruvetei, obținîndu-se valorile indicate în diagramele din fig. 8.15,b.

8.3.3. UTILIZAREA EXTENSOMETRELOR MECANICE

Determinarea deformațiilor, ce rezultă în urma procesului de sudare, se poate face și cu ajutorul extensometrelor mecanice. În cele ce urmează se vor prezenta rezultatele cercetărilor efectuate la uzina „Electroputere"-Craiova, în cazul unor îmbinări sudate prin cusături cap la cap. Pentru măsurarea deformațiilor s-a utilizat un extensometru mecanic sistem Pfender (fig. 2.19).

Deformațiile au fost determinate prin măsurarea lungimii inițiale (baza de măsurare) în diferitele etape ale procesului de deformație. Baza de măsurare a fost delimitată prin bile de oțel cu diametrul 1/16", fixate pe suprafața probei. Bazele de măsurare cu care s-a lucrat au fost de 20 și de 40 mm.

Tehnologia pentru fixarea bilelor pe suprafața piesei a constat din următoarele operații:

— fixarea celor două centre care vor defini baza de măsurare;
— executarea locașurilor conice în care vor fi introduse bilele de oțel;
— introducerea bilelor și
— fixarea bilelor în material.

În fig. 8.28 se prezintă operațiile necesare pentru fixarea bilelor de oțel care delimitează baza de măsurare; în fig. 8.28, a se arată modul de executare a operației pentru centrare a locașurilor în care se introduc bilele. Dispozitivul (*1*) va imprima pe suprafața piesei de cercetat (*2*) centrul acestor locașuri (fig. 8.28, b), printr-o lovitură de ciocan. Urmează ca aceste locașuri să fie profilate după forma bilelor, cu ajutorul poansonului din fig. 8.28, c.

În sfîrșit, se introduc bilele care delimitează baza de măsurare, conform fig. 8.28, d. Măsurarea bazei de măsurare, în diferite etape, se execută cu ajutorul extensometrului mecanic, cu pîrghii și comparator (fig. 2.19). Valoarea unei diviziuni este de 1/1000 mm. În prealabil, extensometrul *5* este reglat pentru lungimea bazei de măsurare respective, cu ajutorul unui etalon din invar. Modul de efectuarea măsurării se prezintă în fotografia din fig. 2.21, unul din picioarele extensometrului este fix

(*a*), iar cel mobil (*b*) se înclină pentru a urmări variația lungimii bazei de măsurare. Diviziunile citite pe cadranul comparatorului indică cu cît baza de măsurare s-a mărit sau s-a scurtat față de valorile inițiale ținînd cont și de corecțiile impuse de eventualele variații de temperatură determinate cu ajutorul etalonului din invar. În cazul extensometrului utilizat erorile determinărilor sînt cuprinse între 0,005% și 0,01%, funcție de baza de măsurare aleasă.

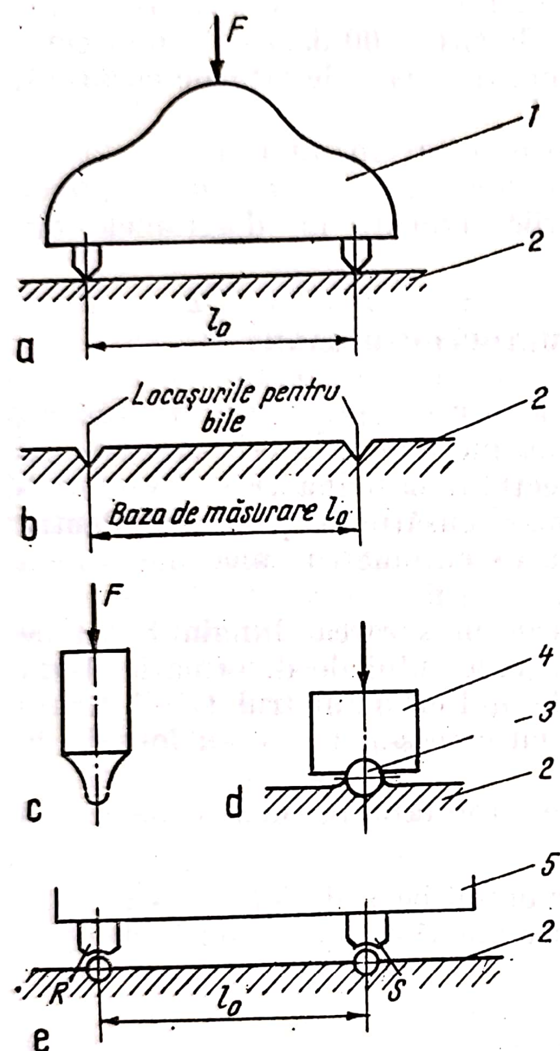


Fig. 8.28.

În primul caz, măsurările au fost efectuate pe o probă din OL 37 alcătuită din două plăci sudate, notate I și II, fiecare avînd dimensiunile 15 × 350 × 500 mm. Marginile plăcilor au fost prelucrate în V, avînd unghiul de 60°. Regimurile de sudare alese au asigurat energia lineară corespunzătoare executării probelor de sudare, conform recomandărilor I.I.S., de maxim 85 000 J/cm.

Pe fața opusă rădăcinii cusăturii, au fost fixate bilele din oțel care au delimitat bazele de măsurare de 20 mm pe placa *I*, și 40 mm pe placa *II*. Segmentele au fost așezate după două direcții perpendiculare, la distanțele indicate în fig. 8.29. Una din direcții a fost paralelă la axa cusăturii de sudură, iar cealaltă perpendiculară pe aceasta.

Înainte de sudare a fost determinată lungimea efectivă pentru fiecare bază de măsurare. Imediat după sudare s-a executat măsurarea acestora, iar la 72 de ore, după sudare, s-a efectuat o nouă măsurare obținîndu-se alte valori. Diferențele valorilor găsite s-au raportat la valoarea inițială a bazei de măsurare.

Pentru eliberarea parțială a tensiunilor remanente din proba sudată, au fost efectuate 6 găuri (*a*, *b*, . . .,*f*) în axa cusăturii de sudură situate după cum rezultă din fig. 8.29 și 8.30, a.

După această operație s-a determinat din nou valoarea distanțelor dintre punctele de măsurare. În continuare au mai fost executate 3 găuri la placa *I* (*g*, *h*, *i*) și 4 găuri în placa *II* (*j*, *k*, *l*, *m*). situate în zonele influențate termic (fig. 8.29 și 8.30, b). După găurire au fost măsurate din nou lungimile bazei de măsurare.

În sfîrșit, o altă operație a urmărit detașarea prin găurire a unei părți din proba sudată, așa cum rezultă din fig. 8.29 și 8.31. Măsurarea

Scanned with OKEN Scanner

Placa I

Decupare

Axa cusăturii de sudură

Decupare

Placa II

Fig. 8.29.

Scanned with OKEN Scanner

deformațiilor specifice s-a efectuat după operația de găurire și după detașarea completă a acestei părți. Se precizează că valoarea lungimilor bazei de măsurare obținute, după efectuarea găurilor și a decupării, au fost raportate la lungimea bazei de măsurare după sudare, avînd în vedere că s-a urmărit efectul acestor operații față de situația creată după sudare.

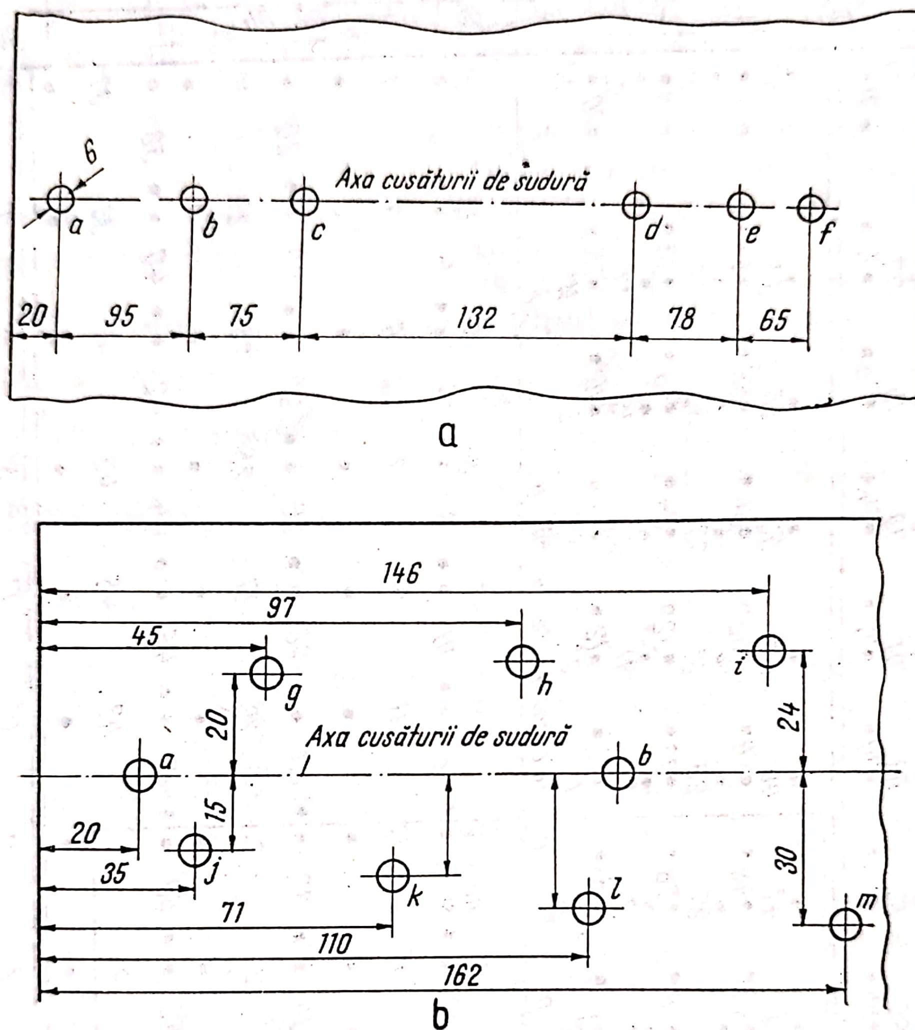


Fig. 8.30.

De asemenea, în toate cazurile, înainte de efectuarea măsurărilor s-a determinat valoarea efectivă a bazei de măsurare, cu ajutorul etalonului de invar, așezat pe proba de măsurat, pentru ca ambele să aibă aceeași temperatură.

Pe baza măsurărilor efectuate prin extensometria mecanică s-au determinat deformațiile specifice pentru cele două plăci ale probei sudate după efectuarea operațiilor de găurire și decupare menționate mai sus.

După ce au fost determinate deformațiile specifice, pe baza legii lui Hooke generalizate, (v. § 1.4.2.) au fost determinate tensiunile principale considerîndu-se pentru $E = 2{,}05 \cdot 10^4$ daN/mm² și pentru $\mu = 0{,}33$. În acest caz direcțiile principale s-au considerat a fi cunoscute, respectiv cea paralelă și cea perpendiculară la cusătura de sudură.

Scanned with OKEN Scanner

Au fost urmărite deformaţiile, în diferitele etape, pe placa I în 80 de puncte de măsurare, iar pe placa II în 54 de puncte, conform fig. 8.29.

Se constată că operaţia de găurire în axa cusăturii sudate eliberează complet tensiunile remanente numai în zona punctelor de măsură (22, 21)

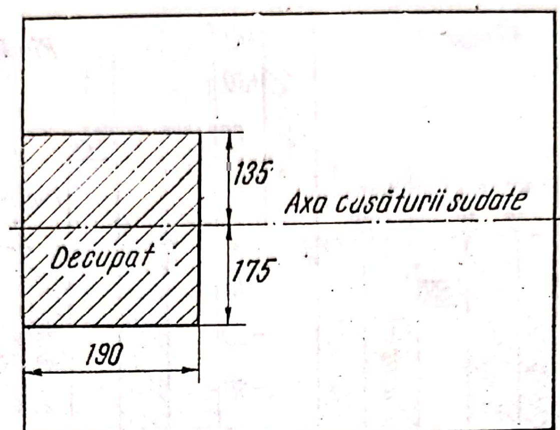


Fig. 8.31.

şi (42, 41), unde deformaţiile după această operaţie devin nule (fig. 8.32, a). Acelaşi lucru s-a produs la placa II, din aceeaşi figură (fig. 8.29) în zona punctelor de măsurare (40, 39) după operaţia de decupare (fig. 8.32, b şi 8. 32, c); în celelalte zone analizate deformaţiile nu mai devin nule ca urmare a efectuării operaţiilor tehnologice amintite şi rezultă existenţa unor deformaţii cu caracter permanent.

Folosind extensometria mecanică măsurările s-au efectuat şi în cazul utilizării rozetelor alcătuite din trei direcţii de măsurare decalate la 45° una faţă de alta (v. tab. 1.5) cu baza de măsurare $l_0 = 20$ m. În acest caz se consideră că nu sînt cunoscute direcţiile tensiunilor principale.

Folosind rozeta cu trei traductoare (tab. 1.5, poz. 1) se pot determina deformaţiile specifice principale ε_1 şi ε_2, tensiunile principale σ_1 şi σ_2 şi direcţiile acestora, prin aflarea unghiului φ_1, dintre direcţia orizontală după care s-a efectuat măsurarea deformaţiilor specifice notate cu ε_x şi direcţia tensiunii principală σ_1 (v. tab. 1.5).

Probele au fost executate din oţel slab aliat cu mangan OL 52—3K STAS 500—68, avînd grosimea de 21 mm (fig. 8.33). Probele sudate au avut rostul pregătit în X, cu unghiul de 60°. Au fost utilizaţi electrozi bazici tip Unibaz. Sudarea s-a executat controlat cu determinarea energiei liniare şi respectarea prevederilor I.I.S. Una din probe, notată cu *3*, s-a sudat fără preîncălzire, iar la proba *4* sudarea s-a executat cu preîncălzire. Ambele probe au avut aceleaşi dimensiuni şi s-a utilizat acelaşi tip de electrod.

În cele ce urmează se prezintă rezultatele măsurărilor efectuate în următoarele cazuri :

a) înainte de sudare ;
b) după sudare ;

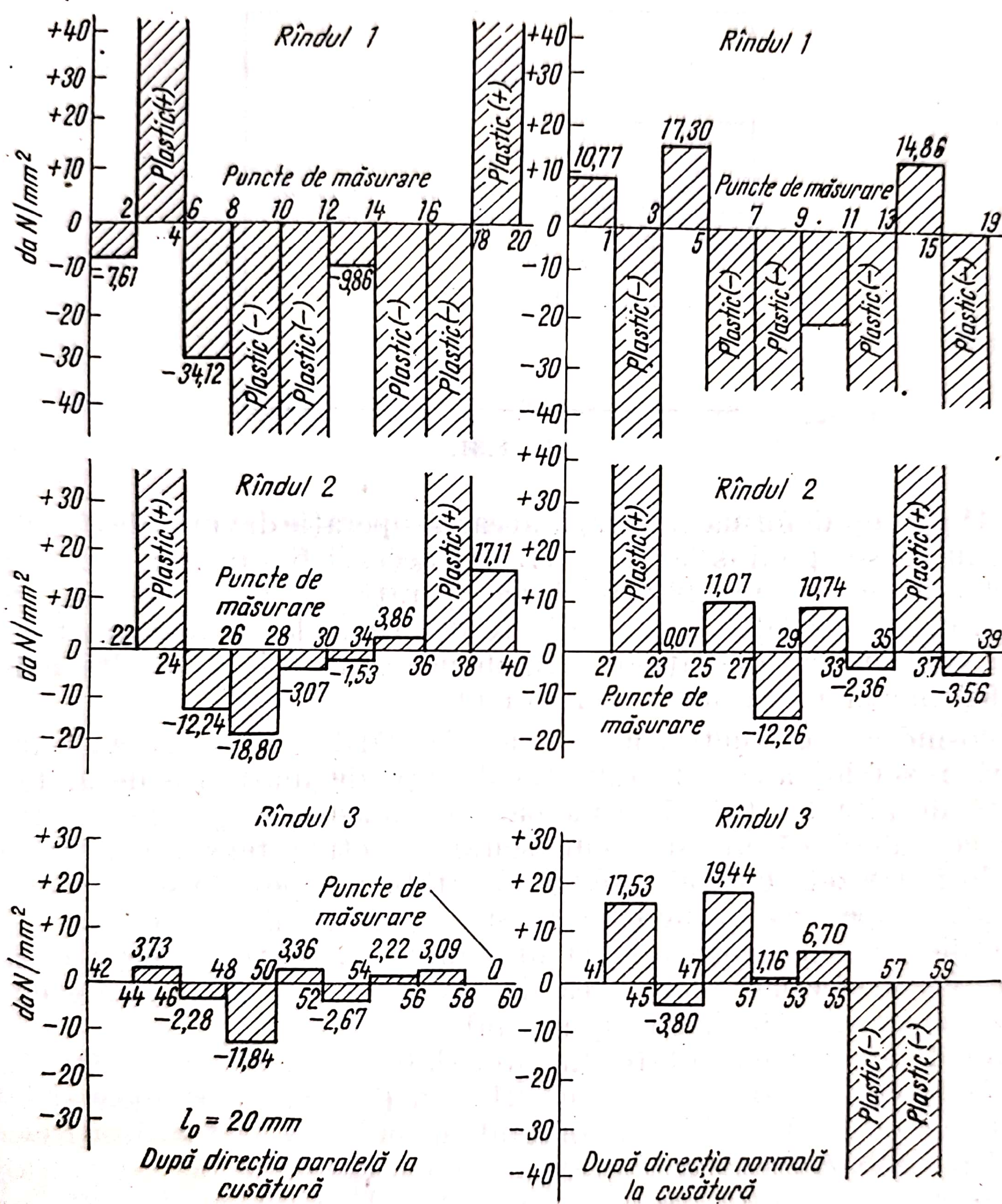
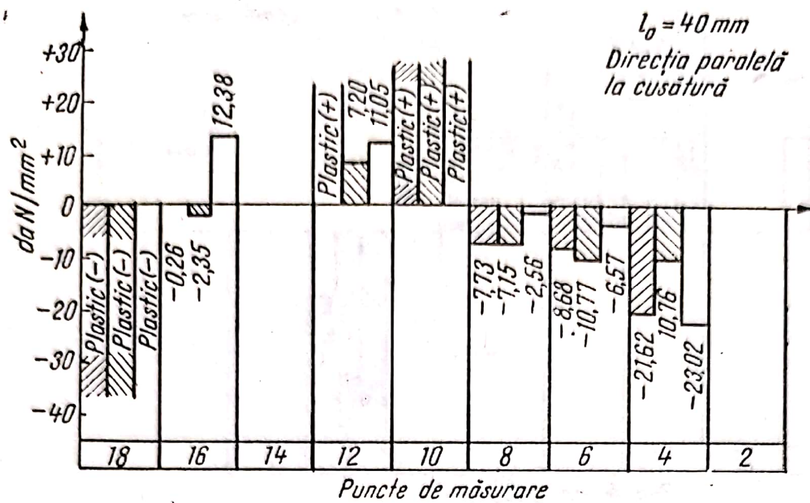
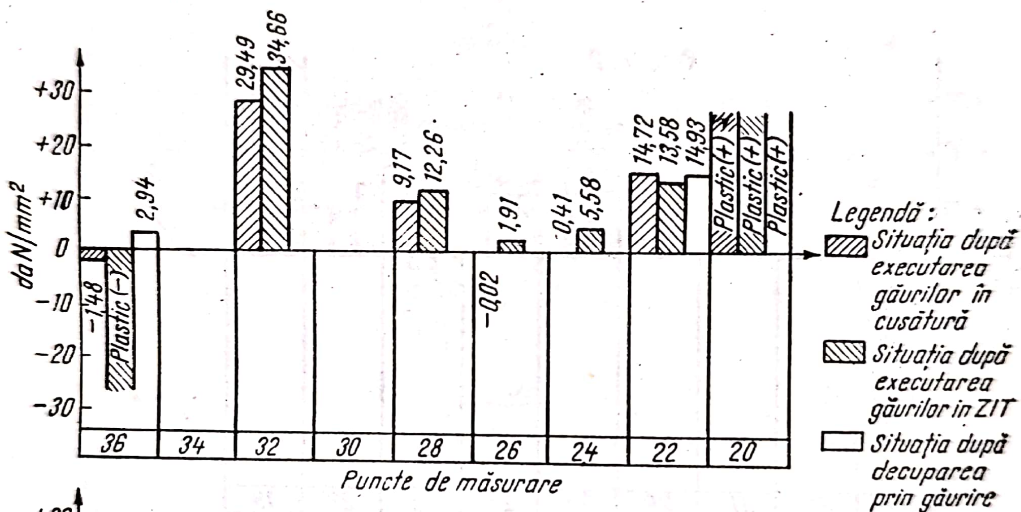
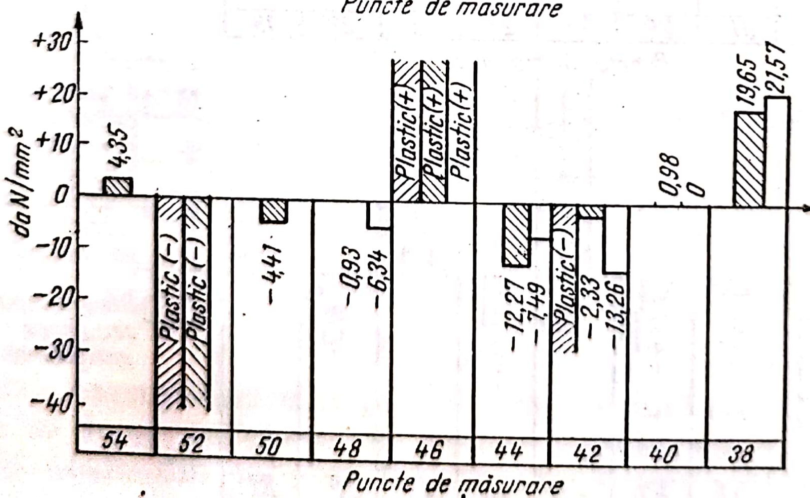

Rîndul 1
Puncte de măsurare
da N/mm²
Plastic(+)
Plastic(−)
−7,61
−34,12
−9,86
10,77
17,30
14,86
Rîndul 2
Puncte de măsurare
17,11
3,86
−12,24
−18,80
−3,07
−1,53
11,07
10,74
0,07
−12,26
−2,36
−3,56
Rîndul 3
3,73
3,36
2,22
3,09
−2,28
−11,84
−2,67
17,53
19,44
1,16
6,70
−3,80
l_0 = 20 mm
După direcţia paralelă la cusătură
După direcţia normală la cusătură
a

Fig. 8.32.


l0 = 40 mm
Direcția paralelă la cusătură
daN/mm2
+30
+20
+10
0
−10
−20
−30
−40
Plastic (−)
Plastic (−)
Plastic (−)
−0,26
−2,35
12,38
Plastic (+)
7,20
11,05
Plastic (+)
Plastic (+)
Plastic (+)
−7,73
−7,15
−2,56
−8,68
−10,77
−6,57
−21,62
10,76
−23,02
18
16
14
12
10
8
6
4
2
Puncte de măsurare


daN/mm2
+30
+20
+10
0
−10
−20
−30
−1,48
Plastic (−)
2,94
29,49
34,66
9,17
12,26
−0,02
1,91
0,41
5,58
14,72
13,58
14,93
Plastic (+)
Plastic (+)
Plastic (+)
36
34
32
30
28
26
24
22
20
Puncte de măsurare
Legendă:
Situația după executarea găurilor în cusătură
Situația după executarea găurilor în ZIT
Situația după decuparea prin găurire


daN/mm2
+30
+20
+10
0
−10
−20
−30
−40
4,35
Plastic (−)
Plastic (−)
−4,41
−0,93
−6,34
Plastic (+)
Plastic (+)
Plastic (+)
−12,27
−7,49
Plastic (−)
−2,33
−13,26
0,98
0
19,65
21,57
54
52
50
48
46
44
42
40
38
Puncte de măsurare

b

Fig. 8.32.

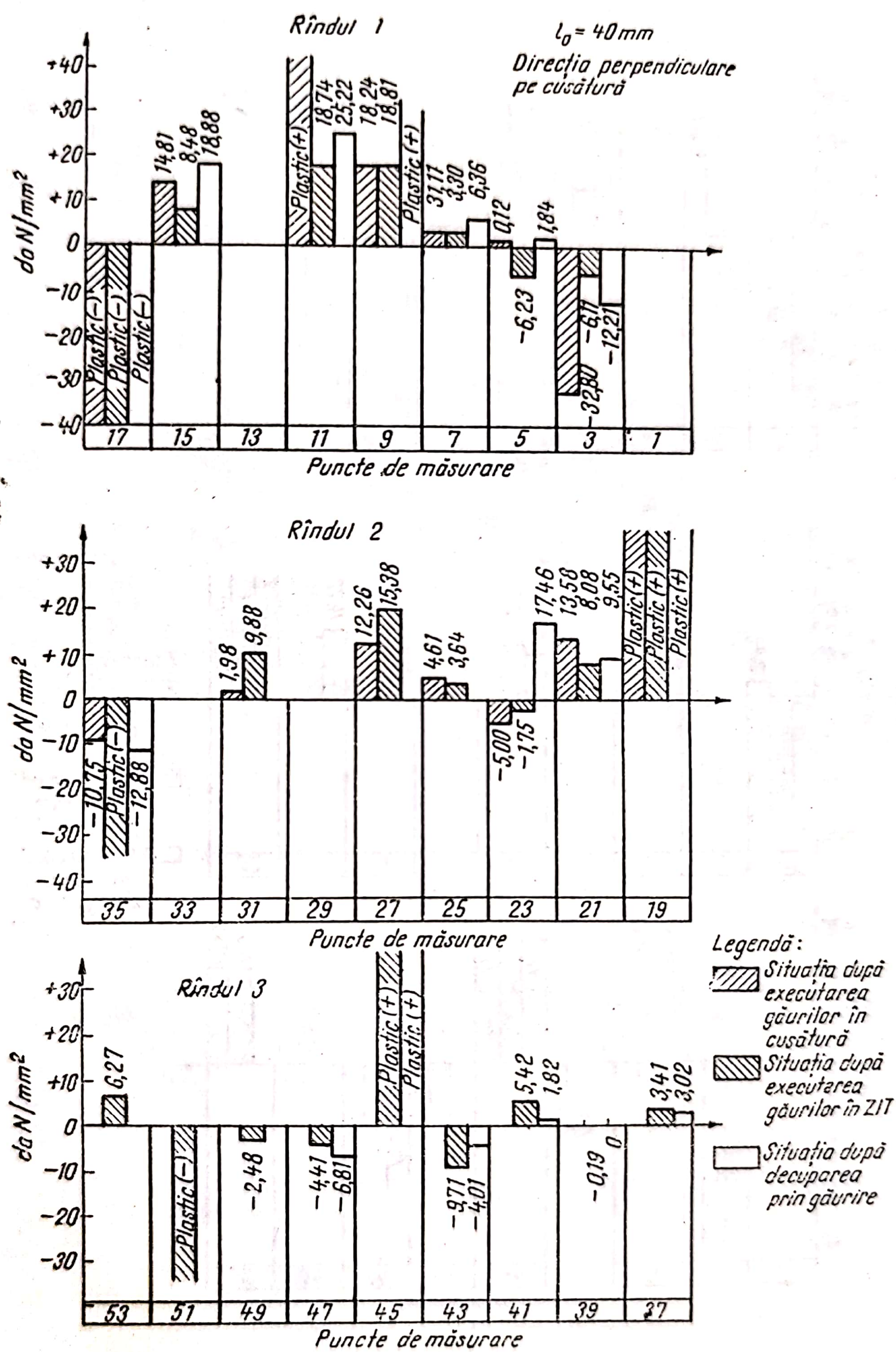

Rîndul 1
l_0 = 40 mm
Direcția perpendiculare pe cusătură
daN/mm²
Puncte de măsurare
Rîndul 2
Rîndul 3
Legendă:
Situația după executarea găurilor în cusătură
Situația după executarea găurilor în ZIT
Situația după decuparea prin găurire

Fig. 8.32.

c) după decuparea prin fîşii, cu lăţime de 50 mm, a zonelor prevăzute cu rozete tensometrice şi

d) după executarea unor găuri cu diametrul de 5,8 mm la mijlocul bazei de măsurare.

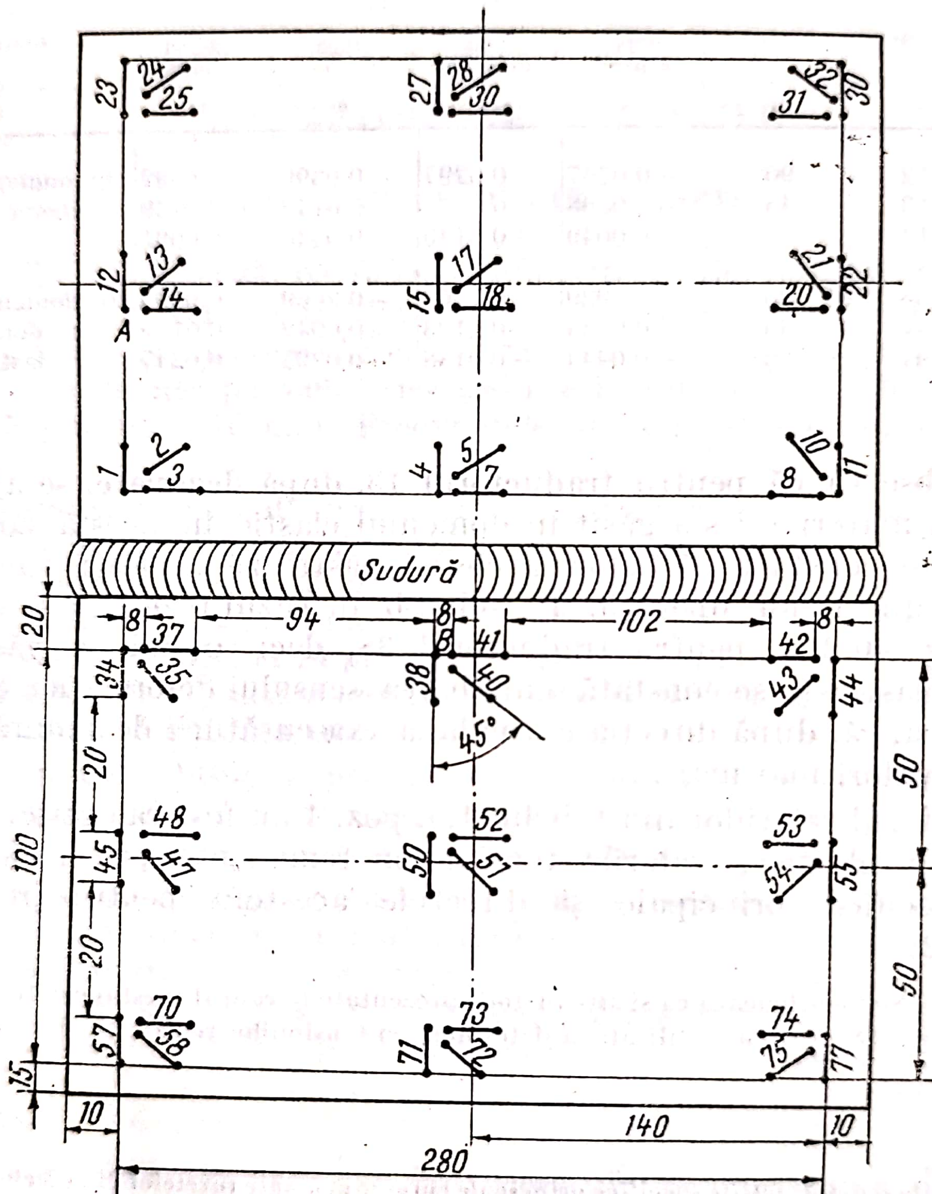


Fig. 8.33.

Pentru exemplificare se prezintă cazul unei rozete ale cărei deformaţii se găsesc în domeniul elastic şi pentru calculul căreia s-au aplicat relaţiile corespunzătoare din tabelul 1.5 (rozeta A) şi cazul unei rozete la care deformaţiile pentru un traductor au intrat în domeniul plastic (rozeta B).

Din tabelul 8.1 se observă dinamica deformaţiilor specifice determinate cu ajutorul dispozitivului din fig. 2.19 pentru fiecare punct de măsurare care alcătuiesc rozeta respectivă. În cazul rozetei A se constată că $\varepsilon < 0{,}2\,\%$, respectiv materialul s-a deformat sub limita de curgere.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8.1.

Valorile deformațiilor specifice pentru două rozete de pe proba 3, apărute după efectuarea celor patru operații

Rozeta	Traductorul	Poziția	Valoarea lui ε %				Observații
			după sudare	după decupare	după găurire	efectul găuririi	
0	1	2	3	4	5	6	8
A	12	90°	−0,0247	−0,0297	−0,0396	−0,0099	în domeniul elastic
	13	45°	−0,0298	0	−0,0149	−0,0149	
	14	0°	+0,0049	+0,0149	+0,0240	+0,0091	
B	38	90°	+0,2929	−0,2768	−0,2669	+0,0099	în domeniul plastic
	40	45°	−0,0544	+0,0198	+0,0049	−0,0149	în domeniul elastic
	41	0	−0,0444	−0,0148	−0,0395	−0,0247	

Se poate observa că pentru traductorul 13, după decupare, se ajunge la $\varepsilon = 0$, deci materialul s-a găsit în domeniul elastic în acestă zonă. De asemenea, se constată că deformațiile își păstrează aceleași semn după efectuarea diferitelor operații. În schimb în cazul rozetei B se constată valori ca $\varepsilon > 0{,}2\%$, pentru traductorul 38, deci oțelul se găsește în domeniul plastic și se constată schimbarea sensului deformației. Se poate ușor remarca, că, după direcția normală la axa cusăturii de sudură, deformațiile au valori mai mari.

Cu ajutorul relațiilor din tabelul 1.5, poz. 1 au fost calculate, în cazul deformațiilor elastice, valorile tensiunilor remanente principale, deformațiile specifice principale și direcțiile acestora pentru rozeta *A* (tabelul 8.2).

Observație. Se menționează că și alte metode prezentate în cadrul acestui capitol, în special metoda rabotării (§ 8.2.5), pot fi utilizate la determinarea tensiunilor remanente din construcțiile sudate.

Tabelul 8.2

Tensiunile și deformațiile specifice principale corespunzătoare rozetelor din tabelul 8.1.

Rozeta	Traductorul	Tensiunile normale principale normale		Tensiunea de forfecare principală	Deformații specifice principale		tg φ_1	φ_1
		σ_1	σ_2	τ max.	ε_1	ε_2		
		daN/mm²			(%)			
A	14	+0,7935	−6,8517	+3,8226	+0,0224	−0,0421	−1,3446	63°16′
	13	+1,3573	−3,8857	+3,6215	+0,0258	−0,4065	0,3318	9°10′
	12	+2,6356	−7,4087	+5,0227	+0,0449	−0,605	−0,2233	83°45′
		+4,2640	−1,7826	+3,0233	+0,0225	−0,0143	−3,7572	53°2′

8.3.4. UTILIZAREA FRANJELOR MOIRÉ

Primul care a utilizat franjele moiré pentru măsurarea deformaţiilor şi tensiunilor remanente în cazul îmbinărilor sudate a fost Dantu [18]. Detalii în legătură cu tehnica utilizată sînt date la § 5.2.10 .

8.4. METODE NEDISTRUCTIVE

8.4.1. METODA CU ULTRASUNETE

Metoda se bazează pe dependenţa vitezei de propagare a undelor ultrasonore transversale de valoarea tensiunilor ce solicită materialul. Undele ultrasonore transversale, utilizate în tensometrie, se obţin cu ajutorul unor elemente piezoelectrice şlefuite în formă de Y cu dimensiunile de 5×5 sau 10×10 mm. Frecvenţele utilizate sînt cuprinse între 3 şi 6MHz.

Măsurarea vitezei de propagare a ultrasunetelor trebuie să se facă cu multă precizie, eroarea maximă să nu depăşească 0,1—0,2%. Această precizie poate fi asigurată dacă se utilizează pentru măsurarea vitezei una din metodele interferometrice. Guscia [23] a construit un aparat pe principiul autocirculaţiei impulsului, care măsoară viteza de propagare a ultrasunetelor cu o precizie de $0{,}01°/_{00}$, la care undele ultrasonore cu polarizare maximă se obţin la frecvenţă de 5MHz.

Pentru a se obţine o succesiune suficient de mare de ecouri se recomandă ca suprafaţa probei sau structurii să fie prelucrată şi şlefuită pentru a se asigura, astfel, condiţii optime de cuplare a palpatorului.

Direcţia fasciculului de unde ultrasonice trebuie să fie perpendiculară pe direcţia de solicitare a materialului. La măsurarea vitezei undelor transversale se are în vedere : viteza după direcţia solicitării v_1 şi viteza perpendiculară pe aceasta v_2. Diferenţa între vitezele corespunzătoare celor două situaţii extreme şi anume : cînd planul de polarizare este perpendicular şi apoi paralel cu direcţia tensiunilor dă, cu ajutorul unei diagrame de etalonare, valoarea tensiunilor ce solicită materialul.

S-a constatat că, în cazul unei epruvete confecţionată din OLC45, solicitată la întindere — o variaţie a tensiunii de $10\ \frac{\text{da N}}{\text{mm}^2}$ corespunde la o variaţie a vitezei transversale după direcţia solicitării v_1 de 2 m/s în timp ce viteza v_2 rămîne constantă şi nulă, indiferent de valoarea tensiunii*).

Unii cercetători au stabilit relaţii matematice ce exprimă dependenţa dintre viteza de propagare a undelor sonore transversale şi tensiunea la care este solicitat materialul. Dintre aceştia se menţionează Toupin şi Bernştein ; relaţiile stabilite fiind date în lucrarea [64].

---

*) Cercetările au fost efectuate la CCP-Craiova de către un colectiv condus de ing. M. Băltănoiu.

Aplicație. În fig. 8.34 se dau valorile tensiunilor remanente dintr-o îmbinare sudată, prin cusături cap la cap, determinate cu ajutorul ultrasunetelor (linia continuă) și prin tensometria electrică cu traductoare rezistive (linia întreruptă).

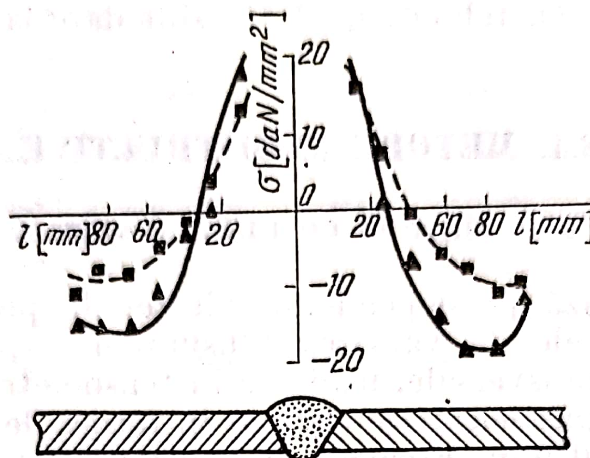


Fig. 8.34.

Se menționează, că, în comparație cu metodele distructive prezentate anterior, metoda bazată pe utilizarea undelor ultrasonice este mai precisă.

8.4.2. METODA ELECTROMAGNETICĂ

Metoda electromagnetică de determinare a tensiunilor este tot o metodă nedistructivă, ea se bazează pe faptul că proprietățile magnetice ale metalelor feromagnetice sînt foarte sensibile la modificările valorii tensiunilor din masa metalului. Primul cercetător care a conceput un tensometru ce se bazează pe variația permeabilității magnetice în funcție de solicitare a fost Reimbert (anul 1946). Cercetările experimentale au arătat că pînă în apropiere de limita de elasticitate a materialului legătura dintre tensiune și permeabilitate, practic, poate fi considerată liniară și depinde de intensitatea cîmpului magnetic [40].

O serie de cercetători au căutat să stabilească relații cantitative între valoarea tensiunii și caracteristicile magnetice ale metalului, dintre aceștia se citează Lagasse [34]. Rezultatele obținute, însă, nu pot fi considerate satisfăcătoare fiind eterogene și incomplete.

În lucrarea [39] se prezintă rezultatul cercetărilor privind determinarea tensiunilor remanente prin depistarea componentelor armonice produse de forța electromotrice a unui traductor electromagnetic. S-a constatat că variațiile amplitudinilor, armonicelor cu soț, corespund variației tensiunii (fig. 8.35) sensibilitatea crescînd cu intensitatea cîmpului magnetic (curbele *1*, *2*, *3*, și *4* corespund cîmpurilor de magnetizare de *1*, *2*, *4* și *6* Œrsted, pentru armonica a doua).

În fig. 8.36 este prezentat schematic dispozitivul de lucru utilizat pentru măsurarea tensiunilor remanente în cazul unei îmbinări sudate prin cusături cap la cap. Blocul traductor constă dintr-un electromagnet *E* în formă de U, cu miez din tole de transformator, și traductorul pro-

Scanned with OKEN Scanner

priu-zis B cu miez din ferită. Aparatura de înregistrare este compusă dintr-un analizor de spectre şi un intrument de înregistrare potenţiometric [39].

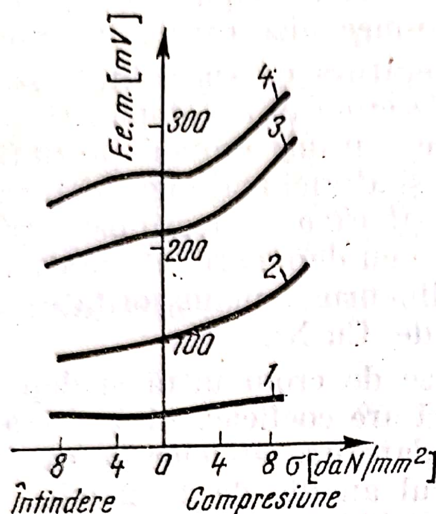


Fig. 8.35.

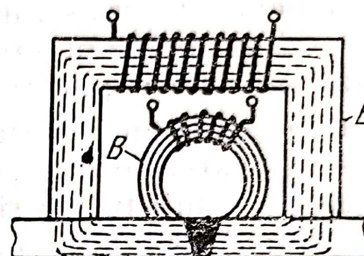


Fig. 8.36.

8.4.3. METODA POMEY

Pomey şi colaboratorii săi au utilizat, pentru evaluarea tensiunilor remanente, legătura dintre valoarea acestora, la suprafaţa piesei, şi duritate. Se utilizează în acest scop, limita elastică de pătrundere a unei bile în suprafaţa piesei. Această limită poate fi pusă în evidenţă cu ajutorul unui microsclerometru construit special pentru acest scop.

Detalii în legătură cu aplicarea practică a acestei metode sînt date în lucrările [25] şi [47].

8.5. MĂSURAREA TENSIUNILOR REMANENTE DIN STRATURILE METALICE DEPUSE ELECTROLITIC

8.5.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Acoperirea unei suprafeţe metalice printr-un alt metal, destinat a da stratului superficial proprietăţi speciale, este un procedeu practic care este foarte mult folosit, la ora actuală, în construcţia de maşini pentru a se atinge anumite scopuri.

Unul din numeroasele procedee tehnice de acoperire folosit în industrie este galvanostegia.

În construcţia de maşini şi în alte domenii ale industriei acest procedeu este aplicat cu scopul de a proteja metalul împotriva coroziunii, de a îmbunătăţii caracteristicile de uzură ale suprafeţelor metalice în contact (cilindrii de la motoare cu ardere internă, unelte şi scule, matriţe etc.),

de a reface părţile uzate ale diferitelor piese cu suprafeţe purtătoare sau de a da unor suprafeţe exterioare un aspect decorativ.

Dintre metalele care pot fi depuse pe cale electrolitică cele mai utilizate sînt cromul şi nichelul, întrucît acestea răspund cel mai bine din punct de vedere al proprietăţilor fizico-mecanice cerute în practică.

Privind depunerile de crom, în literatura de specialitate se vorbeşte de două feluri de depuneri : depuneri de crom dur şi depuneri decorative. Prima denumire este improprie, deoarece însuşi cromul prezintă o duritate foarte ridicată de (400—1 000) HB şi atunci mai logic ar fi ca depunerile de (1—25) μm şi chiar peste 100 μm (în cazul refacerii părţilor uzate) să fie denumite depuneri groase, în opoziţie cu depunerile decorative, care au grosimi de ordinul a 1 μm. Acestea din urmă, în majoritatea cazurilor, se realizează printr-o depunere mixtă de Cu-Ni.

Tot în categoria depunerilor groase de crom intră şi depunerile de crom poros [3], care, pe lîngă faptul că are coeficientul de frecare mic şi este rezistent la temperaturi ridicate, datorită reţelelor de canale ce iau naştere în timpul depunerii prin atacul anodic de 1—2 min. joacă, în acelaşi timp, şi un rol important de ungere. Pe baza acestor proprietăţi, cromajul poros este aplicat pe cilindrii din metale uşoare de la motoarele cu ardere internă.

Depunerile de nichel sînt folosite în majoritatea cazurilor ca depuneri decorative şi ca protecţie împotriva coroziunii. În momentul actual unde este nevoie de grosimi de depunere mai mari, pe baza costului mai mic, este preferat nichelul în locul cromului, deşi nu este aşa de dur.

În straturile metalice depuse electrolitic, în timpul depunerii, iau naştere *tensiuni remanente*. Acţiunea lor se manifestă prin modificări în proprietăţile fizice şi mecanice ale stratului depus. Sub acţiunea acestor tensiuni, straturile de acoperire sînt solicitate la întindere sau la compresiune.

În raport cu efectul tensiunilor remanente, în practică se pot întîlni două cazuri şi anume : în cazul depunerilor pe piese rigide, în stratul metalic depus pot apărea microfisuri sau chiar fisuri, care favorizează producerea atacului corosiv şi distrugerea stratului metalic depus, iar în cazul depunerilor pe piese de grosime foarte mică — cazul filmelor utilizate în calculatoare de mare rapiditate — pot produce distorsionarea secţiunii transversale, făcîndu-le neutilizabile.

Avînd în vedere acţiunea nefavorabilă a tensiunilor remanente din straturile metalice depuse electrolitic asupra duratei de funcţionare a pieselor tratate astfel, pe de o parte, iar pe de altă parte, dorind să găsească originea cauzelor lor, de aproape un secol, au fost întreprinse cercetări pentru determinarea şi studierea lor. Totodată, aceste cercetări sînt îndreptate în direcţia găsirii unor compoziţii de soluţii electrolitice şi regimuri de depunere (temperatură, densitate de curent, etc.) care să conducă la micşorarea tensiunilor remanente în aşa măsură încît acţiunea lor să nu afecteze calităţile stratului de acoperire.

Scanned with OKEN Scanner

8.5.2. METODE PENTRU DETERMINAREA TENSIUNILOR REMANENTE

Pentru determinarea tensiunilor remanente menţionate au fost elaborate mai multe metode, care, în general, pot fi clasificate în :

— Metode bazate pe măsurarea săgeţii benzilor sau plăcilor acoperite unilateral [7], [17], [33], [50], [58]

— Metode bazate pe măsurarea forţei de compensare la benzile acoperite unilateral [26], [19], [59], [28]

În cadrul metodelor bazate pe măsurarea săgeţii, pentru determinarea tensiunii remanente, sînt folosite o serie de formule, care au fost deduse în ipoteza lui Stoney, adică a *momentului încovoietor constant.*

Astfel, folosind fig. 8.37 şi 8.38 se ajunge la relaţia

$$\sigma_0 = \frac{4}{3} \frac{Eh^2 \cdot f}{l^2 \cdot d} \qquad (8.29)$$

unde : σ_0 este tensiunea remanentă ;

E — modulul de elasticitate longitudinală ;

f — săgeata benzii ;

d — grosimea stratului de metal depus şi

h — grosimea benzii.

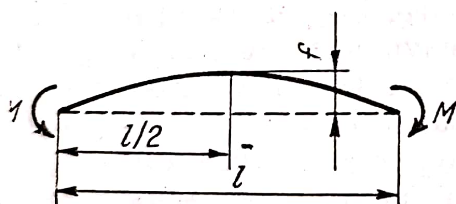


Fig. 8.37.

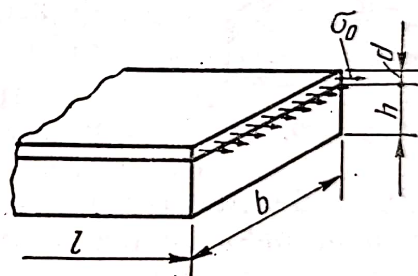


Fig. 8.38.

O variantă a benzii acoperite unilateral este contractometrul lui Brenner şi Senderoff [32] (fig. 8.39), care a fost construit pentru a mări sensibilitatea de măsurare a deformaţiei.

Pentru a-l face mai sensibil la depuneri foarte subţiri, construcţia acestui aparat a fost îmbunătăţită de către Starek, Fry, Morris, Watkins şi Kolk. Îmbunătăţirea a constat în micşorarea frecărilor în lagăre prin montarea unor cuzineţi de o construcţie specială.

Folosindu-se de aceeaşi ipoteză, Brenner şi Senderoff deduc următoarea formulă

$$\sigma_0 = \frac{E\, h^2 p\, \Delta\varphi}{6\, \pi\, b\, D\, d} \qquad (8.30)$$

unde : h este grosimea benzii elicoidale ;

d — grosimea stratului de metal depus ;

b — lăţimea benzii ;

p — pasul elicei ;

$\Delta\varphi$ — unghiul de la centru produs de deplasarea capătului liber al spiralei

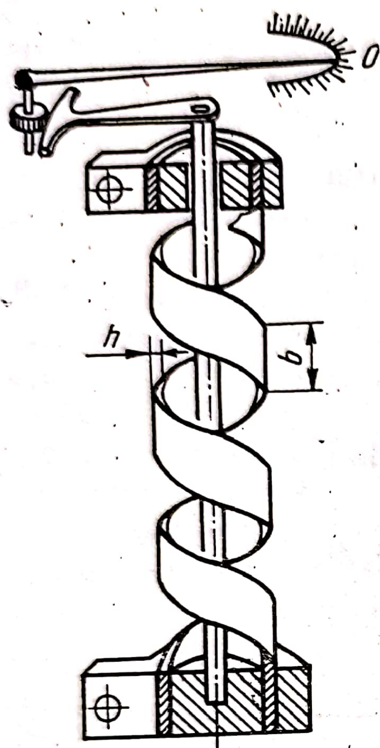


Fig. 8.39.

Ipoteza lui Stoney a fost infirmată de rezultatele cercetărilor lui M.I. Propereka în sensul că săgeata calculată cu ajutorul formulei lui Stoney este mai mare decît cea obţinută pe cale experimentală. Pe baza acestor cercetări Propereka emite ipoteza *întinderii sau compresiunii constante* a stratului de metal depus, care duce la o încărcare a benzii sub formă de momente repartizate (fig. 8.40) a cărei curbură teoretică se suprapune cu cea experimentală,

Făcînd o comparaţie între formula dedusă în ipoteza lui Stoney şi cea dedusă pe baza ipotezei lui Propereka, se constată că, pentru valorile foarte mici ale raportului d/h, adică tocmai pentru cazurile întîlnite în practică, prima formulă dă tensiuni foarte mari (chiar de zeci de ori mai mari) în raport cu cele obţinute cu a doua formulă [30].

În continuare, Propereka arată că ipoteza momentului încovoietor constant (fig. 8.43) nu constituie singura cauză a rezultatelor contradictorii obţinute de diferiţi cercetători ; o altă cauză constă în aceea că, prin încovoierea probelor acoperite unilateral, o parte din tensiunile remanente se relaxează, deci ceea ce se determină în acest caz este o tensiune accidentală, denumită şi tensiune instantanee. Cum, în general, depunerea de metal se face pe piese care nu se deformează datorită tensiunilor remanente, înseamnă că nu are loc fenomenul de relaxare şi, în consecinţă, pentru

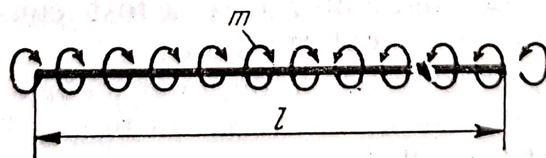


Fig. 8.40.

determinarea tensiunilor remanente trebuiesc folosite metode care să reproducă cît mai fidel condiţiile reale de depunere.

O încercare de a înlătura neajunsurile remarcate în metodele analizate mai sus a fost făcută de Hoar şi Arrowsmith [26] prin adaptarea la capătul

liber al benzii ce tinde să se încovoaie în timpul depunerii a unui dispozitiv „de zero”, care menține cu intermitență capătul benzii în poziția inițială cu o forță crescătoare, denumită *forța de compensare.*

La acest aparat (fig. 8.41) pe partea superioară a benzii de metal *1* ce servește drept catod, se fixează o tijă subțire *2*, în formă de T. La capătul de sus al piesei *2* se montează oglinda *3*, care reflectă raza de lumină *e*

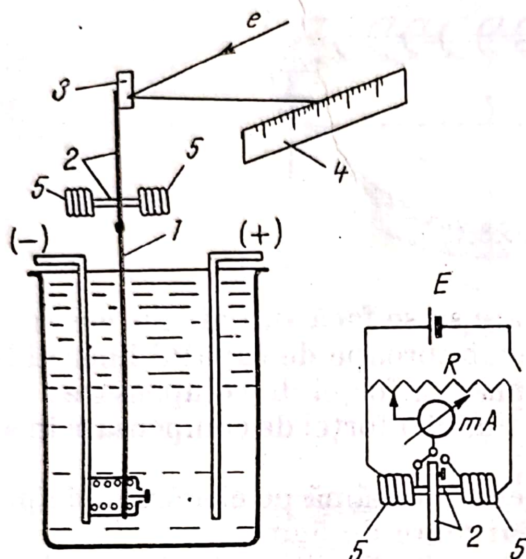


Fig. 8.41.

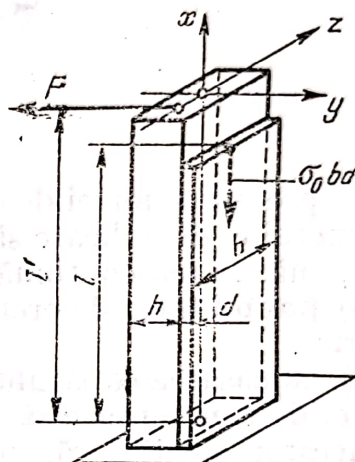


Fig. 8.42.

pe o scală gradată *4*, ce servește pentru aducerea la zero. Pe cele două ramuri ale piesei în T se fixează bobinele *5*, care servesc ca electromagneți, astfel că la o trecere a curentului se exercită o anumită forță de atracție pe unul din capetele tijei în T. După ce s-a stabilit poziția de zero a indicatorului, curentul se reglează în timpul depunerii în așa fel că forța ce ia naștere prin împiedicarea deplasării să fie compensată de forța de atracție dată de una din cele două bobine. Reglarea curentului se face cu ajutorul reostatului *R*.

Raționînd pe baza fig. 8.42, Hoar și Arrowsmith deduc următoarea formulă pentru calculul tensiunilor remanente

$$\sigma_0 = \frac{2Fl}{bhd} \tag{8.31}$$

unde : F este forța de compensare.

La deducerea formulei (8.31), s-a considerat că l' este foarte apropiat de l, adică punctul de acționare al forței de compensare se confundă cu extremitatea lungimii de depunere. În realitate, această diferență este apreciabilă, conducînd la valori eronate pentru σ_0.

Stalzer [59] realizează un aparat care are posibilitatea să preia forța de compensare foarte aproape de nivelul electrolitului.

Scanned with OKEN Scanner

Se demonstrează că în cazul în care lungimea de depunere este egală cu lungimea braţului forţei de compensare (fig. 8.43), banda rămîne nedeformată [28].

Determinarea cît mai precisă a tensiunilor remanente cu ajutorul metodei benzii nedeformate cere ca aparatul folosit pentru măsurarea forţei de compensare să îndeplinească următoarele condiţii :

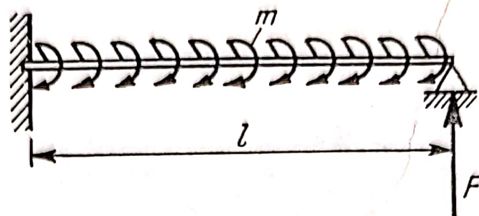


Fig. 8.43.

1) preluarea forţei de compensare să se facă sub nivelul electrolitului, iar punctul ei de aplicare să fie cît mai aproape de capătul liber al benzii ;

2) măsurarea continuă şi automată a forţei de compensare ;

3) posibilitatea de preluare automată a forţei de compensare în ambele sensuri ;

4) deplasarea capătului benzii ce se reazămă pe elementul de preluare a forţei de compensare să nu fie mai mare de 5μm.

Acestor condiţii răspunde cu destulă fidelitate traductorul capacitiv — utilizat în metoda prezentată în lucrarea [28]

Condensatorul traductorului (fig. 8.44) este format din plăcile *1* şi *2*. Placa *1* este sudată pe capătul tijei *9* şi montată cu ajutorul distanţierului *7* şi piuliţa *8* pe sistemul elastic alcătuit din benzile *4*. Acestea sînt lipite pe inelul *6* prin intermediul suportului *5*. La celălalt capăt al tijei *9* se înşurubează piesa cu sonda *10*. La capătul sondei este introdusă o piesă specială, prevăzută cu o crestătură la partea inferioară, ce serveşte pentru prinderea capătului liber al epruvetei pe care se efectuează depunerea. Forma specială a capului sondei este făcută cu scopul de a prelua forţa de compensare sub nivelul electrolitului. Apoi cu ajutorul crestăturii şi a elasticităţii sistemului de la capătul sondei se realizează o prindere punctuală a benzii, care permite preluarea forţei de compensare în ambele sensuri. Placa *2* este fixată în piesa *3*, realizată din material plastic, pentru a realiza izolarea electrică faţă de carcasă şi este legată de aparatul electronic prin cablul ecranat 11.

La această metodă, epruveta pe care se face depunerea trebuie să îndeplinească o condiţie esenţială în ceea ce priveşte dimensiunile ei, adică să aibă o asemenea lăţime încît să se comporte la deformare ca o grindă şi nu ca o placă. Se demonstrează experimental [28] că pentru epruvete de grosimi în jur de 0,1 mm se pot folosi benzi cu lăţimi de 1—3 mm ; influenţa lăţimii asupra mărimii reale a forţei de compensare în acest caz este neînsemnată.

De asemenea, avînd în vedere că la această metodă se permite totuşi o deplasare foarte mică a capătului liber al epruvetei, înseamnă că prin

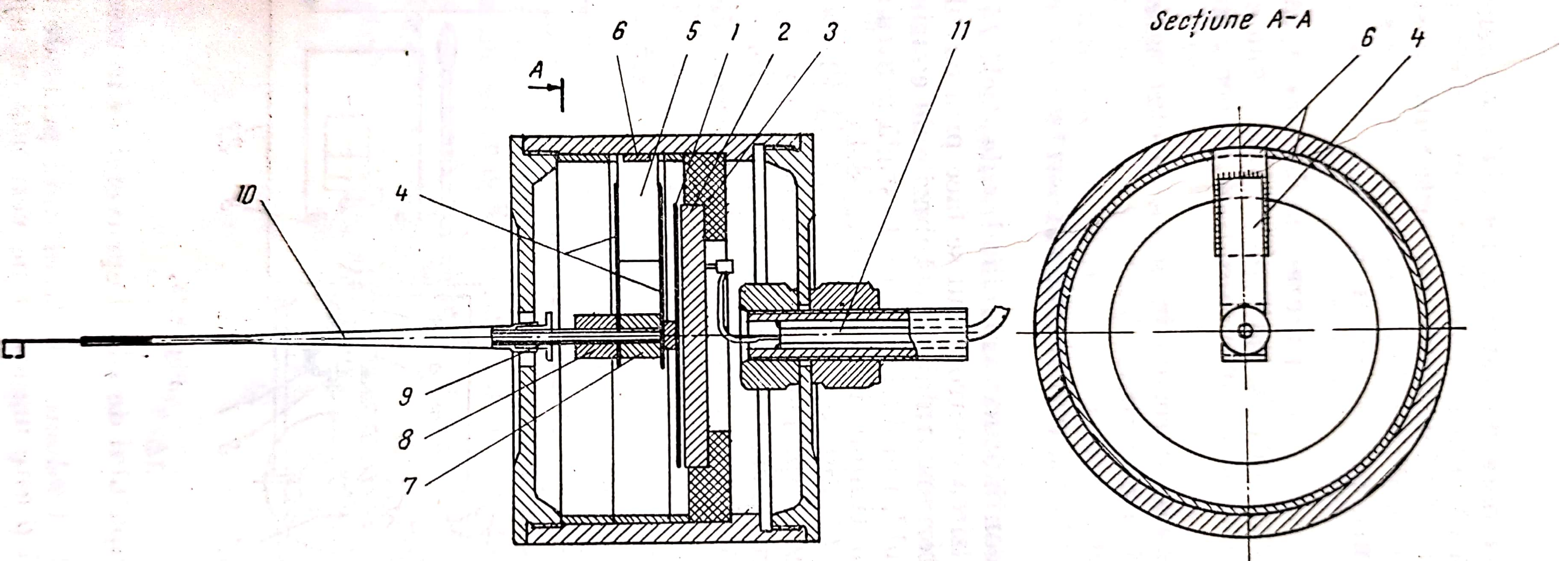


Fig. 8.44.

Scanned with OKEN Scanner

aceasta se introduce o eroare în măsurarea forței de compensare. În lucrarea [28] se demonstrează că eroarea este cu atît mai mică cu cît rigiditatea epruvetei este mai mică față de rigiditatea sistemului de susținere a armăturii mobile. Ca urmare, dimensiunile epruvetei și ale sistemului elastic de susținere a armăturii mobile pot fi calculate în așa fel încît eroarea să fie foarte mică.

Prin urmare, un prim avantaj prezentat de acest traductor constă în aceea că el poate fi construit, de așa manieră, încît valoarea măsurată a forței de compensare să fie cît mai apropiată de cea care se produce în grinda nedeformată.

Cel de-al doilea avantaj rezidă în aceea că etalonarea traductorului se face chiar în poziția de lucru.

8.5.3. INSTALAȚIA FOLOSITĂ*)

Electrolitul este conținut în vasul cilindric de sticlă *15* care este introdus în vasul *16*. Încălzirea electrolitului se face prin circulația apei calde asigurată de pompa termostatului *18* și tuburile de cauciuc *17*. Vasul *16* are pereții exteriori dubli umpluți cu vată de sticlă pentru a menține temperatura constantă în timpul depunerii (fig. 8.45).

Electrozii *11* și *12* sînt solidarizați de bucșa alunecătoare *4* prin intermediul pieselor *9* și *10*. De aceeași bucșă este prins și traductorul capacitiv *1* cu ajutorul pieselor *2* și *3*, care permit realizarea deplasării acestuia pe orizontală și pe verticală. Aceste deplasări ale traductorului

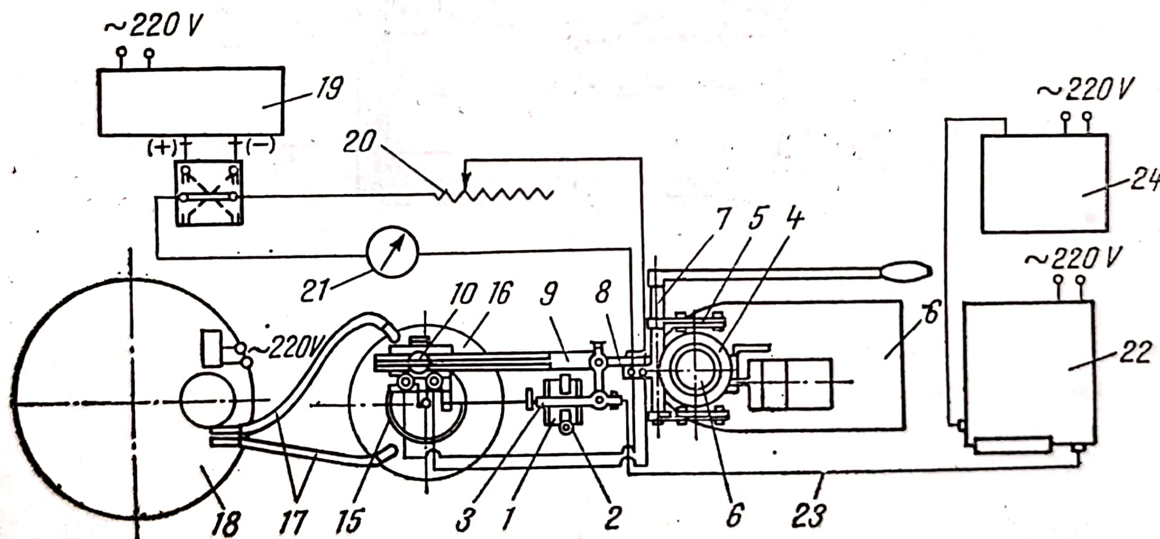


Fig. 8.45.

servesc la prinderea capătului de sus al epruvetei *14* în crestătura capului sondei.

Întregul ansamblu traductor-electrozi fiind prins de bucșa alunecătoare *4* de pe stativul *6* este manevrat pe verticală cu ajutorul manetei

*) Instalația a fost realizată de autor în laboratorul catedrei de Rezistența materialelor de la Institutul politehnic Iași, unde s-au făcut și încercările.

7 şi a mecanismului 5 la introducerea electrozilor în baia de acoperire şi terminarea acoperirii.

Pentru obţinerea intensităţilor de curent continuu, necesar realizării diferitelor densităţi de curent pe suprafeţele de acoperire ale epruvetelor folosite, s-a dovedit a fi suficient un redresor de curent cu seleniu *19* de 0—24 V şi 0—6 A, cuplat cu reostatul *20* de 30 Ω şi 5 A. Măsurarea curentului s-a făcut cu miliampermetrul *21*.

Semnalul dat de variaţia de capacitate, datorită variaţiei distanţei dintre armăturile condensatorului produsă de tendinţa epruvetei de a se deforma sub acţiunea tensiunilor remanente din stratul metalic depus, este transmis amplificatorului electronic *22* prin cablul ecranat *23*. Aici semnalul este tradus într-o variaţie de curent, care se citeşte pe microampermetrul din amplificator. Înregistrarea automată a acestei variaţii de curent se face cu ajutorul milivoltmetrului înregistrator *24*.

8.5.4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Depunerile s-au făcut în băi cu compoziţie clasică. Astfel:

a) depunerile de crom în baie cu
   — 250 g/l anhidridă cromică
   — 2,5 g/l acid sulfuric
b) depunerile de nichel în baia Watts cu
   — 300 g/l sulfat de nichel
   — 55 g/l clorură de nichel
   — 40 g/l acid boric
   — pH = 5,8

Depunerile de crom s-au efectuat la temperaturile de 30°, 40°, 50° şi 60° C, iar cele de nichel la 35°, 45°, şi 55°C

La cromare au fost folosite densităţi de curent de 20, 30, 40, 50, 60 şi 70 A/dm², iar la nichelare densităţi de 2, 3, 4, 5 A/dm².

Acoperirile s-au făcut timp de 6 minute, deoarece s-a observat că după această durată variaţia forţei de compensare a fost mică.

Grosimea stratului de acoperire s-a calculat cu relaţia

$$d_i = \frac{\Delta G_i}{\gamma_v b l} \qquad (8.32)$$

iar

$$\Delta G_i = \frac{G_f - G_0}{t} \cdot \Delta t_i \qquad (8.34)$$

unde: γ_v este greutatea specifică a metalului depus;
l — lungimea de depunere pe epruvetă;
b — lăţimea epruvetei;
G_i — greutatea metalului depus în intervalul de timp t_i

Δt_i — intervalul de timp
G_f — greutatea epruvetei după depunere;
G_0 — greutatea inițială a epruvetei;
t — durata totală de depunere.

La cromare s-au folosit epruvete de oțel de 70 × 2 × 0,35 mm, iar la nichelare epruvete de alamă și de oțel de 50 × 3 × 0,3 mm.

Calculul tensiunii remanente s-a făcut cu formula (8.31) transformată în

$$\sigma_{0i} = \frac{2\gamma_g l}{h} \frac{\Delta F_i}{\Delta G_i} = K \frac{\Delta F_i}{\Delta G_i}. \qquad (8.35)$$

Pentru cele trei categorii de epruvete, coeficientul K are următoarele valori:

$$K_{\text{epruv.cromare}} = 19{,}85 \cdot 10^3$$

$$K_{\text{epruv. nichelare,otel}} = 14{,}85 \cdot 10_4$$

$$K_{\text{epruv. nichel - alamă}} = 13{,}25 \cdot 10^3$$

8.5.5. CONFECȚIONAREA ȘI PREGĂTIREA EPRUVETELOR

Epruvetele au fost confecționate din lame sau benzi, din metalul pe care s-a făcut depunerea, cu dimensiunile astfel alese încît rezultatele experimentale să fie cît mai apropiate de cele reale.

După controlul dimensional epruvetele au fost izolate cu un strat foarte subțire din lac de bachelită (sub 1 μm), atît fața opusă suprafeței de depunere cît și muchiile laterale ale epruvetei. Îmbătrînirea lacului s-a făcut în etuvă la temperaturi crescătoare pînă la maximum 140°C.

În vederea finisării suprafeței neizolate, epruvetele au fost lipite cu schellack pe plăci rigide și perfect plane.

După desprinderea lor de pe plăci, suprafețele de depunere au fost degresate și uscate într-un curent de aer.

8.4.6. METODICA MĂSURĂRII ȘI DETERMINĂRII FORȚEI DE COMPENSARE

Toate măsurările, atît la etalonarea traductorului cît și în timpul depunerilor, s-au făcut după ce aparatul electronic a ajuns la temperatura de regim. Apoi, în momentul în care temperatura dorită a băii a fost atinsă, electrozii cu epruveta fixată între capul sondei și locașul de fixare de la elctrodul marcat cu semnul (—) s-au intodus în electrolit, manevrînd cu maneta *7* (fig. 8.45).

După această operație, se face legătura electrică pentru efectuarea depunerii.

În timpul depunerii variația forței de compensare, prin intermediul traductorului și amplificatorului electronic, este transformată într-o variație de curent, care este înregistrată de milivoltmetrul înregistrator.

Pe hîrtia de înregistrare se obţin curbe de forma celor din figura 8.46, marcate prin puncte la intervale de timp egale. Curbele din figura 8.46*a*, rezultă în cazul cînd în stratul depus iau naştere tensiuni iniţiale de acelaşi semn pe toată durata depunerii, pe cînd cele din figura 8.46, b corespund cazului cînd pe durata depunerii sensul tensiunilor se schimbă.

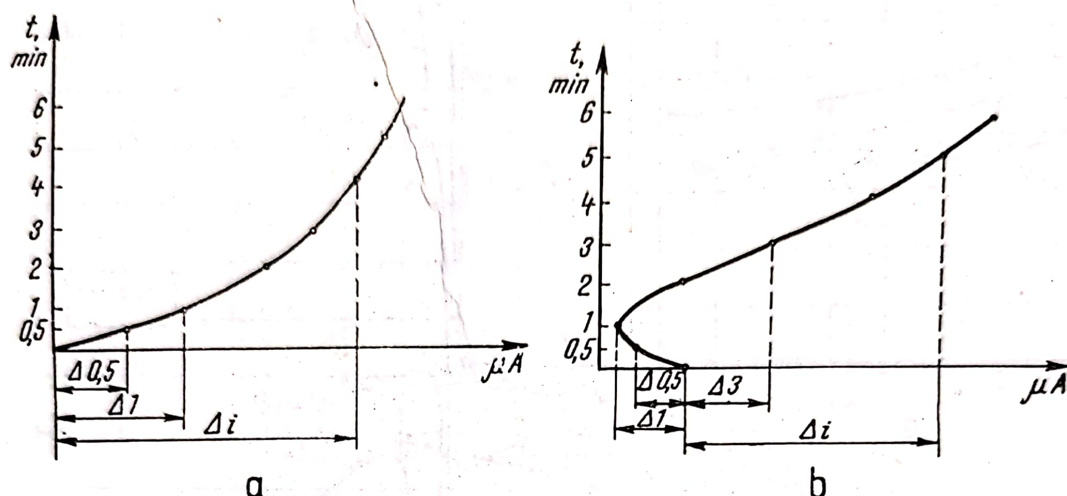


Fig. 8.46

Convertirea microamperilor înregistraţi pe diagramele curbelor obţinute, în timpul depunerii, în mărimi de forţe, se face prin utilizarea curbelor de etalonare în felul următor : distanţele Δi de pe fig. 8.46, corespunzînd diviziunilor de pe scara microampermetrului, sînt transpuse pe diagrama curbei de etalonare. În cazul în care s-a menţinut aceeaşi sensibilitate la aparatul electronic, atît la etalonare cît şi la depunere, convertirea este directă. În caz contrar, se va ţine seama de acest lucru.

a) *Depunerile de crom.* Curbele de variaţie ale tensiunilor remanente sînt reprezentate în figurile 8.47 a, b, c, d.

Din studiul diagramelor de variaţie ale tensiunilor remanente rezultă :

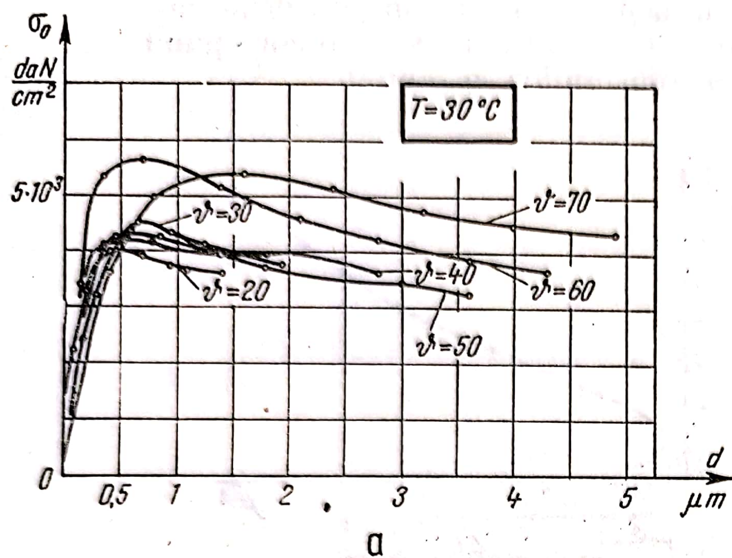
— la temperatura de 30°C, tensiunile remanente cresc odată cu creşterea densităţii de curent δ;

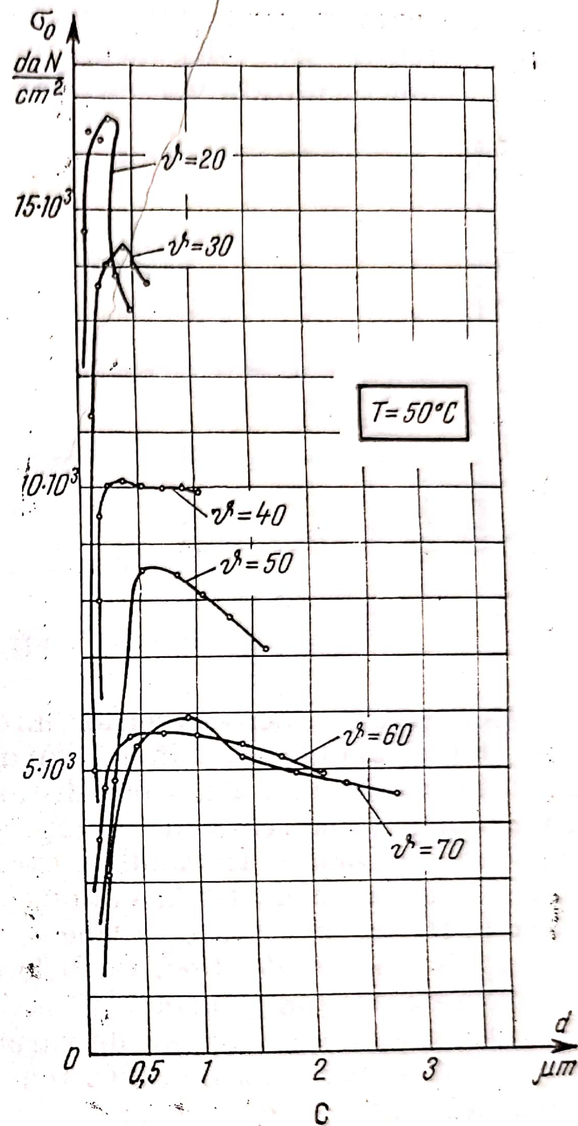
— la temperatura de 40°C, 50° şi 60°C tensiunile descresc odată cu creşterea densităţii de curent;

— calitatea suprafeţei pe care se face depunerea influenţează mărimea tensiunilor remanente, în sensul că acestea cresc odată cu scăderea gradului de finisare a suprafeţei de depunere;

— valorile maxime ale tensiunilor remanente au loc — în depunerile ce se efectuează în băi cu raportul 100 între anhidrida cromică şi acid sulfuric — în jurul temperaturii de 50°C.

— tensiunile normale de întindere ating valorile cele mai mari pentru grosimi de strat de 0,25—1 μm, pe cînd cele de compresiune la grosimi de strat de 0,02—0,25 μm. Primul interval se referă la depunerile efectuate la temperaturile de 30°, 40°, 50° şi 60°C, iar ultimul la cele obţinute la temperatura de 60°C. Apariţia tensiunilor de compresiune la începutul depunerilor este semnalată şi de lucrările [14] şi [19]. În lucrarea [32]





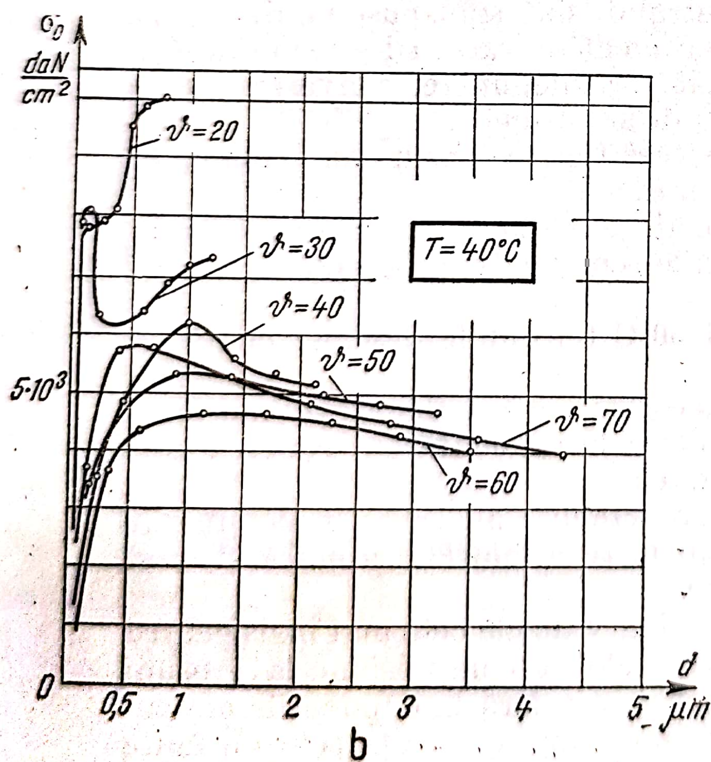


Fig. 8.47

Scanned with OKEN Scanner

cu toate că s-au făcut depuneri de crom la temperaturi mai mari de 50°C, nu se semnalează apariţia acestor tensiuni, probabil din cauza insensibilităţii aparatului lui Brenner şi Senderoff la asemenea forţe mici.

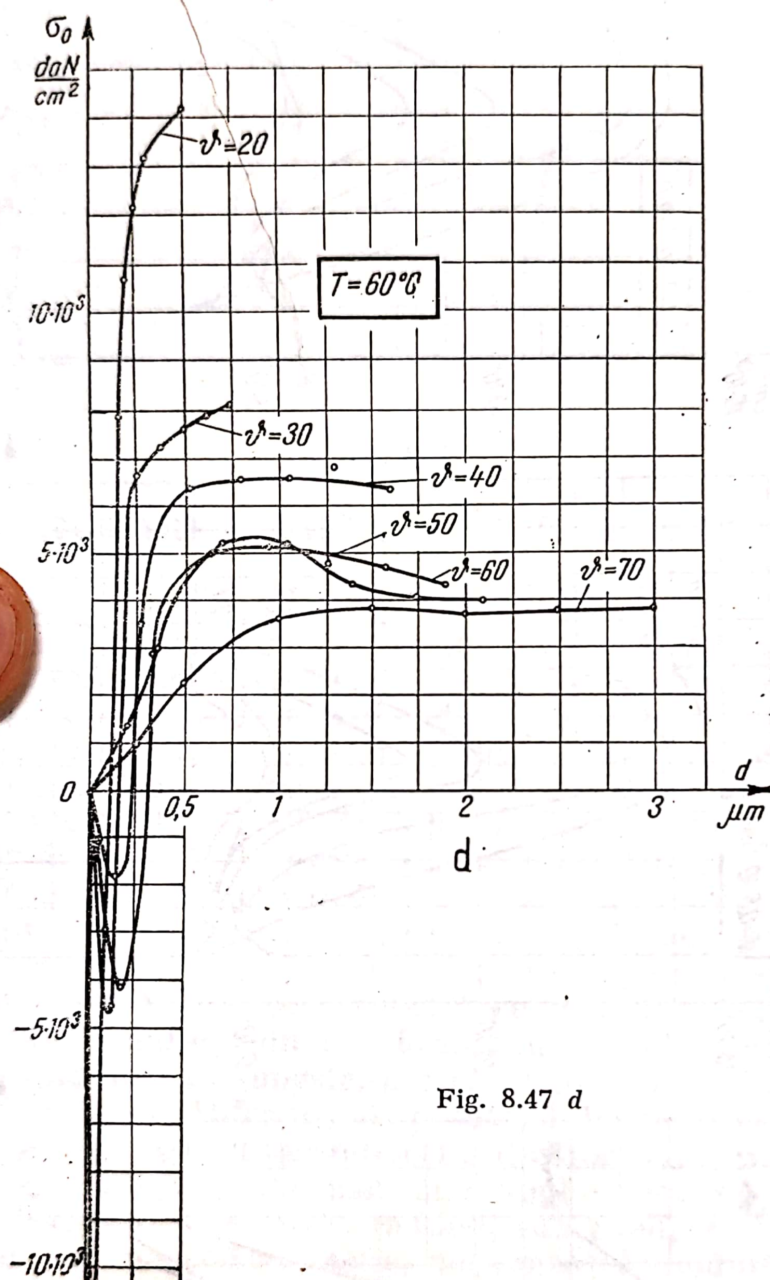
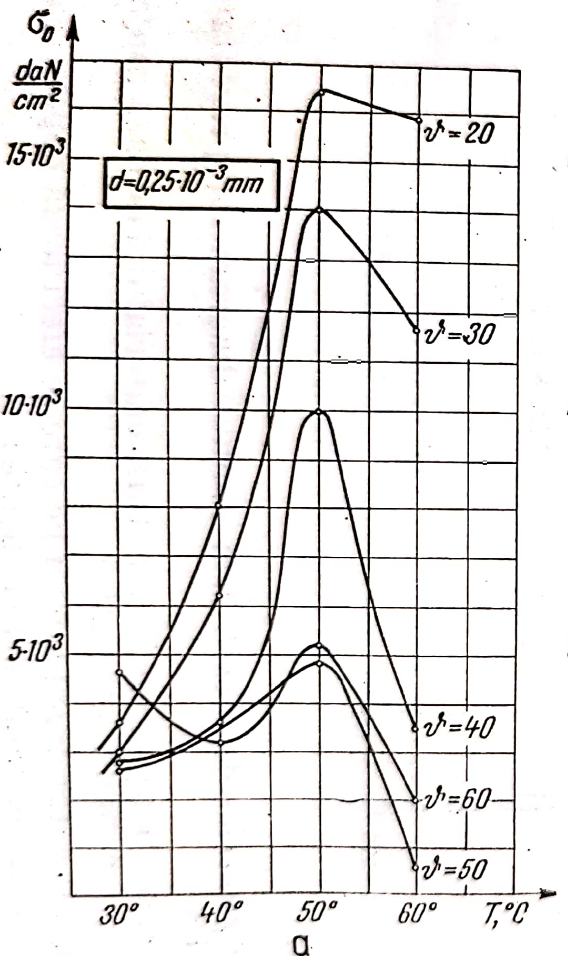


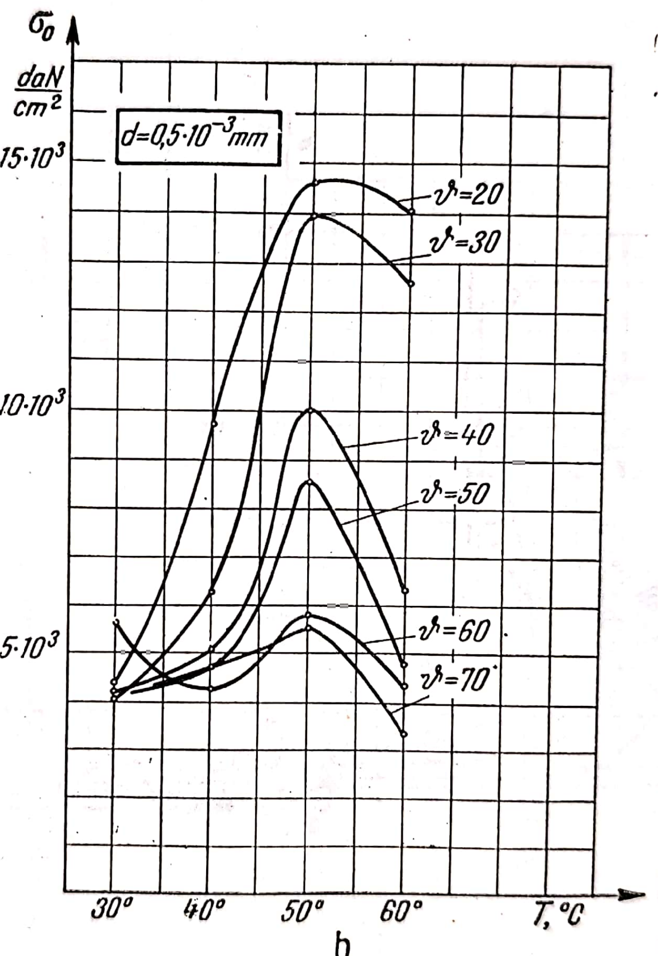
Fig. 8.47 *d*

b) *Depunerile de nichel.* Din studiul diagramelor prezentate în fig. 8.49 rezultă:

— Efectul temperaturii şi a naturii materialului de bază asupra valorii tensiunilor remanente este mic;

— *p*H-ul şi starea suprafeţei pe care se efectuează depunerea influenţează mărimea tensiunilor remanente;





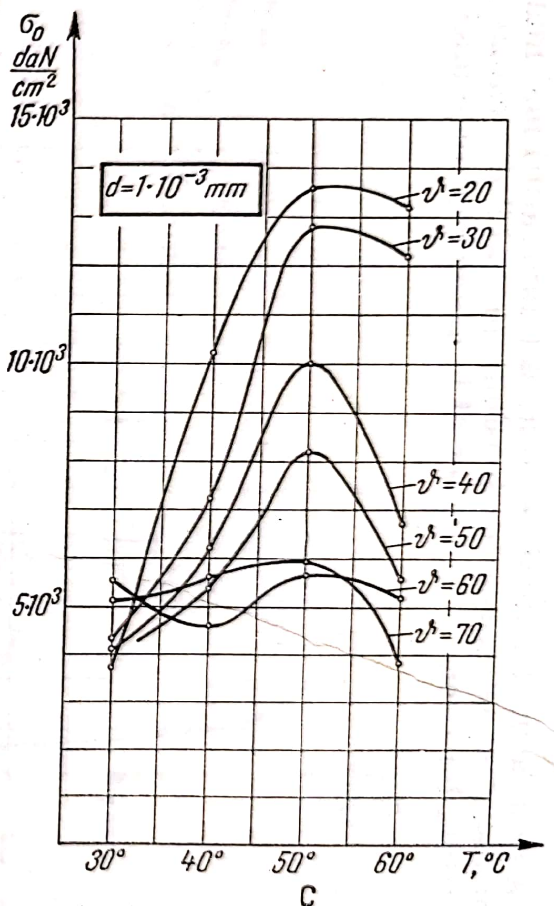


Fig. 8.48

Scanned with OKEN Scanner

— la temperatura de 55°C tensiunile remanente descresc odată cu creşterea densităţii de curent.

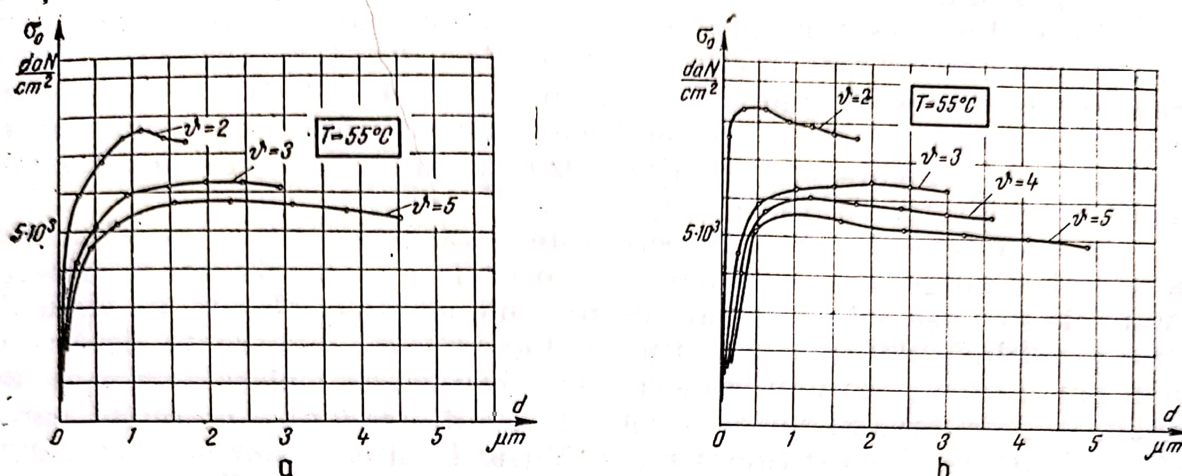


Fig. 8.49

8.6. UTILIZAREA RAZELOR X ÎN TENSOMETRIE

8.6.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Determinarea tensiunilor cu ajutorul razelor Röntgen se bazează pe măsurarea distanţelor dintre planele reţelelor atomice, care se găsesc în constituţia internă a tuturor materialelor cristaline.

Se ştie că razele Röntgen, sau X sînt datorite emisiei de electroni dintr-un fir catodic incandescent, în tuburi Röntgen cu vid — tuburi electronice. Tubul electronic este format dintr-un tub de sticlă cu un vid foarte înaintat de (10^{-6} — 10^{-7}) mm Hg. În tub sînt fixaţi, prin lipire, cei doi electrozi. Catodul este format dintr-un filament de wolfram în formă spirală, încălzit pînă la incandescenţă cu ajutorul unui curent de joasă tensiune. Filamentul este înconjurat de un cilindru care modifică în aşa fel cîmpul, încît electronii se concentrează pe anod sau anticatod într-un focar fin. Anodul sau anticatodul este format dintr-un bloc masiv de metal refractar dens (platină sau tungsten), a cărui suprafaţă plană este înclinată la aproximativ 45°. Diferenţa de potenţial dintre anod şi catod este de (40—200) kV. Filamentul incandescent al catodului emite în vid electronii care obţin o viteză foarte mare în cîmpul electric de mare intensitate, cu care se ciocnesc de catod, radiind, sub anod, raze Röntgen în toate direcţiile. Mantaua de protecţie, postamentul anodului şi tubul de metal sînt legate de pămînt.

Razele Röntgen au proprietăţi analoge proprietăţilor razelor luminoase şi altor radiaţii electromagnetice. Aceste proprietăţi sînt următoarele:

— se propagă rectiliniu;
— traversează cu uşurinţă corpurile opace pentru lumină vizibilă;
— sînt reflectate de planele atomice ale cristalelor;
— impresionează placa fotografică;
— produc fluorescenţa tubului de sticlă care, în zona situată sub anod, ia o culoare verzuie;

— ionizează aerul;
— nu sînt deviate de cîmpul magnetic (fiindcă nu au sarcină electrică).

Unele din aceste proprietăţi fac posibilă determinarea tensiunilor cu ajutorul acestor raze în cazul materialelor cristaline. Deosebirea între corpurile cristaline şi amorfe constă în constituţia cristalelor, în limitarea prin suprafeţe plane sau curbe. De aici derivă proprietăţile importante, între care dependenţa proprietăţilor fizice de direcţie (interferenţă, rezistenţă, solubilitate, viteză de creştere etc.).

Această dependenţă de direcţie este bazată pe constituţia cristalelor de atomi. Configuraţia exterioară este o urmare a constituţiei interioare. Cristalele sînt aşezări neregulate de paticule identice, plasate în vîrfurile unor paralelipipede egale şi alăturate. Particulele constituente ale cristalului pot fi atomi sau ioni, molecule sau grupuri de molecule. Forţele de coeziune în cristal sînt forţele electrostatice dintre ioni. Ansamblul paralelipipedelor egale constituie o reţea. Vîrfurile în care sînt aşezate particulele formează nodurile reţelei. O proprietate importantă a reţelei cristaline este periodicitatea ei spaţială. Aceasta constă în proprietatea reţelei de a coincide cu ea însăşi, prin translaţia cu o anumită mărime numită parametru de translaţie. Parametrii de translaţie ai reţelei pot fi reprezentaţi prin vectori corespunzători translaţiilor.

În spaţiul cu o singură dimensiune, deci pe o dreaptă, dacă se alege un nod al reţelei ca origine, întregul spaţiu poate fi umplut prin alipirea (de o parte şi de alta a originii) de vectori egali cu parametrul reţelei. În spaţiul cu două dimensiuni, deci în plan, această adunare se poate face prin alipirea de paralelograme.

În spaţiul cu trei dimensiuni se pot alege trei parametri reprezentaţi prin trei vectori necoplanari, pe care se poate construi un paralelipiped, numit celula elementară. Întreaga reţea cristalină este formată din alăturarea, pe cele trei direcţii spaţiale, a unor astfel de celule elementare, identice în ce priveşte proprietăţile lor geometrice şi fizice. Mulţimea tuturor nodurilor echivalente care pot fi aduse la suprapunere prin translaţii formează aşa numita *reţea Bravais* a cristalului. Reţeaua Bravais nu cuprinde toate nodurile reţelei cristaline, deci în cristal există mai multe reţele Bravais.

În anumite cazuri trebuie să se precizeze un plan oarecare în reţeaua cristalină. Planele definite prin trei noduri oarecare ale reţelei cristaline se numesc *plane reticulare*. Toate planele reticulare paralele între ele formează o familie de plane. Ele sînt plane de mare densitate reticulară.

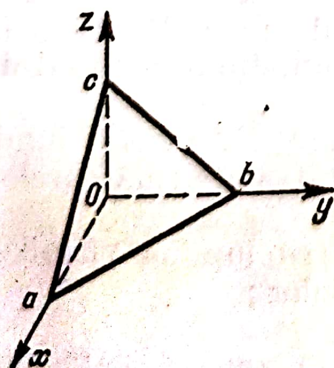


Fig. 8.50

Pentru determinarea planelor cristalografice se utilizează două sisteme de referinţă şi anume:

— Sistemul Weiss şi Rose, sau sistemul parametric — axa Ox dirijată cu sensul pozitiv spre observtor, axa Oy spre dreapta, iar axa Oz verticală cu sensul pozitiv în sus (fig. 8.50);

— Sistemul Miller utilizează indicii hkl. Aceasta este notaţia curent utilizată în calculele cris-

Scanned with OKEN Scanner

talografice. Indicii se obţin din valorile reciproce ale tăieturilor planului de bază pe axele de coordonate, care se înmulţesc cu un anumit număr, astfel ca indicii să fie numere întregi.

De exemplu planul cu indicii (324) taie axele la distanţele $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{4}$; planul (001) taie pe axe distanţele $a = b = \frac{1}{0} = \infty$ şi $c = \frac{1}{1} = 1$.

Planele care taie părţile negative ale axelor au indicii negativi, iar semnul minus se pune deasupra numărului $(\bar{h}\ \bar{k}\ \bar{l})$:

Dispoziţia reglată a nodurilor reţelei constituie simetria structurii cristaline, care la rîndul ei determină o aranjare regulată a feţelor, muchiilor şi colţurilor. Repetarea regulată a acestor forme exterioare constituie simetria geometrică a cristalului. După caracterele lor generale de simetrie, cristalele se împart în şapte sisteme cristalografice. După Weiss, prin sistem cristalografic se înţelege totalitatea formelor poliedrice ale căror feţe pot fi raportate, ca poziţie în spaţiu, la acelaşi sistem de referinţă, adică la aceleaşi axe cristalografice.

Determinarea tensiunilor se bazează pe deformaţia reţelei cristaline, adică pe modificarea distanţei dintre planele reticulare, datorită solicitării. Prin distanţa d a reţelei se înţelege distanţa — măsurată pe perpendiculară — dintre două plane succesive ale aceleiaşi reţele. Deformaţia specifică este

$$\varepsilon = \frac{d_1 - d}{d} \tag{8.36}$$

unde d_1 este dstanţa reticulară după solicitare.

Deci, pentru calculul deformaţiei specifice trebuie să se cunoască distanţa d. Determinarea acestei distanţe se poate face pe cale analitică sau pe cale experimentală.

8.6.2. DETERMINAREA DISTANŢEI RETICULARE PE CALE ANALITICĂ

Se consideră un plan caracterizat de indicii (hkl) şi un nod aşezat în acel plan care are raza vectoare $\bar{R}_{mnp}$, un vector cuprins în plan. *Vectorul unitate* al normalei la plan este

$$\frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}}.$$

Ecuaţia planului se obţine scriind condiţia ca produsul scalar al celor doi vectori să fie nul

$$\bar{R}_{mnp} \cdot \frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}} = 0. \tag{8.37}$$

În funcţie de vectorii-parametri ai reţelei, raza vectoare are expresia

$$\bar{R}_{mnp} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}. \tag{8.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul normalei la plan se poate scrie în funcţie de parametrii reţelei şi în funcţie de indicii planului

$$\bar{H}_{hkl} = \frac{(\bar{b}\times\bar{c})\cdot h}{V} + \frac{(\bar{c}\times\bar{a})\cdot k}{V} + \frac{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot l}{V}. \quad (8.39)$$

Această expresie poate fi scrisă şi în funcţie de *vectorii reciproci* ai reţelei

$$\bar{H}_{hkl} = h\bar{a}^* + k\bar{b}^* + l\bar{c}^*. \quad (8.40)$$

Acest vector este paralel cu normala la planul (hkl) şi se numeşte vectorul reciproc al planului (hkl).

Se introduce această valoare în ecuaţia planului şi se ţine seamă de condiţiile care definesc vectorii reciproci

$$(m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c})\cdot(h\bar{a}^* + kb^* + l\bar{c}^*) = 0;$$

$$hm + kn + lp = 0$$

După cum se ştie, primul plan poate fi obţinut prin translaţie de la 0 la $\frac{a}{h}$ sau la $\frac{b}{k}$ sau la $\frac{c}{l}$. Dacă se mută originea coordonatelor cu un vector $-\frac{a}{h}$, numărătoarea nodurilor rămîne aceeaşi, raza vectoare a nodului (mnp) va fi egală cu

$$\bar{R}_{mnp}\cdot\frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}} = d_{hkl}. \quad (8.41)$$

în care d_{hkl} este distanţa acestui plan la origine, adică distanţa dintre plane. Rezultă deci

$$\left(m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c} + \frac{a}{h}\right)\cdot\frac{(h\bar{a}^* + k\bar{b}^* + l\bar{c}^*)}{H_{hkl}} = d_{hkl}$$

sau

$$d_{hkl} = \frac{1}{H_{hkl}}. \quad (8.42)$$

Vectorul reciproc $\bar{H}_{hkl}$ al planului (hkl) este îndreptat după normala la planul (hkl) şi este egal cu distanţa dintre planele familiei (hkl). Lungimea vectorului $\bar{H}_{hkl}$ se calculează cu formula

$$H_{hkl}^2 = h^2\bar{a}^{*2} + k^2\bar{b}^{*2} + l^2\bar{c}^{*2} + 2hk\bar{a}^*\bar{b}^*\cos\gamma + 2kl\bar{b}^*\bar{c}^*\cos\alpha + 2lh\bar{c}^*\bar{a}^*\cos\beta \quad (8.43)$$

care servește pentru determinarea echidistanței, căci

$$H^2_{hkl} = \frac{1}{d^2_{hkl}}. \tag{8.44}$$

Parametrii reciproci ai rețelei se pot înlocui cu parametrii direcți

$$\begin{cases} a^* = \dfrac{1}{V}\, bc \sin \alpha \\[2ex] b^* = \dfrac{1}{V}\, ca \sin \beta \\[2ex] c^* = \dfrac{1}{V}\, ab \sin \gamma \\[2ex] \cos \alpha^* = \dfrac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\[2ex] \cos \beta = \dfrac{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} \\[2ex] \cos \gamma = \dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \end{cases} \tag{8.45}$$

Expresia echidistanței devine

$$\frac{1}{d^2_{hkl}} = \frac{1}{V^2} [h^2b^2c^2 \sin^2 \alpha + k^2c^2a^2 \sin^2 \beta + l^2a^2b^2 \sin^2 \gamma +$$
$$+ 2hkabc^2(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) + 2kla^2bc(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) +$$
$$+ 2lhab^2c(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta)].$$

Se fac următoarele notații

$$\begin{aligned} S_{11} &= b^2c^2 \sin^2 \alpha \\ S_{22} &= c^2a^2 \sin^2 \beta \\ S_{33} &= a^2b^2 \sin^2 \gamma \\ S_{12} &= abc^2(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \\ S_{23} &= a^2bc(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \\ S_{31} &= ab^2c(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta). \end{aligned} \tag{8.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste notații expresia echidistanței devine

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{V^2}(S_{11}\cdot h^2 + S_{22}\cdot k^2 + S_{33}\cdot l^2 + 2S_{12}\cdot hk + 2S_{23}kl + 2S_{31}lh). \qquad (8.47)$$

Volumul celulei elementare se calculează cu ajutorul determinantului Gram

$$V^2 = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \bar{a}\,\bar{b} & \bar{a}\,\bar{c} \\ \bar{b}\,\bar{a} & b^2 & \bar{b}\,\bar{c} \\ \bar{c}\,\bar{a} & \bar{c}\,\bar{b} & c^2 \end{vmatrix};$$

$$V^2 = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \qquad (8.48)$$

Ținînd seamă de parametrii a, b, c și de unghiurile α, β, γ ale celulei elementare, se va scrie expresia volumului și a distanței dintre planele reticulare. Sistemele cristalografice sînt:

Sistemul triclinic. Înglobează cristalele lipsite de elemente de simetrie și cele care au cel mult un centru de simetrie. Axele cristolografice de referință se aleg după trei muchii principale ale cristalului, care se întîlnesc într-un colț. Parametrii rețelelor pe cele trei direcții sînt diferiți și unghiurile dintre axe sînt diferite

$$a \neq b \neq c;$$

$$V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Sistemul monoclinic sau clinorombic în care parametrii au lungimi diferite și unul este perpendicular pe ceilalți doi

$$a \neq b \neq c; \quad \alpha = \gamma = 90°; \quad \beta \neq 90°;$$

$$V = abc\sin\beta; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2\sin^2\beta} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2\sin^2\beta} - \frac{2\,hl\cos\beta}{ac\sin^2\beta}. \qquad (8.49)$$

Sistemul rombic (paralelipipedic) în care parametrii au lungimi diferite și formează între ei unghiuri drepte

$$a \neq b \neq c; \qquad \alpha = \beta = \gamma = 90°;$$

$$V = abc; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2. \qquad (8.50)$$

Sistemul hexagonal în care, dintre cei trei parametri, doi au valori egale și fac între ei 120°, fiind perpendiculari pe al treilea

$$a = b \neq c; \qquad \alpha = \beta = 90°; \qquad \gamma = 120°$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2c; \qquad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4}{3}\,\frac{h^2 + k^2 + hk}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}. \qquad (8.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

Caz particular: sistemul ortohexagonal

$$a_0 = a\sqrt{3}\,; \quad b_0 = a\,; \quad c_0 = c\,; \alpha = \beta = 90°\,; \quad \gamma = 120°\,; \qquad (8.52)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c\,; \qquad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2.$$

Sistemul romboedric în care parametrii au valori egale și fac între ei unghiul α.

$$V = a^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}\,;$$

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{(h^2 + k^2 + l^2)\sin^2\alpha + 2(hk + kl + lh)(\cos^2\alpha - \cos\alpha)}{a^2(1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha)}. \qquad (8.53)$$

Sistemul tetragonal (*pătratic*) în care doi dintre parametri au valori egale și toate unghiurile sînt drepte

$$a = b \neq c\,; \qquad \alpha = \beta = \gamma = 90°\,;$$

$$V = a^2 c\,; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}. \qquad (8.54)$$

Sistemul cubic (*teseral*) în care parametrii au valori egale și unghiurile sînt drepte

$$a = b = c\,; \qquad \alpha = \beta = \gamma = 90°\,;$$

$$V = a^3\,; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}. \qquad (8.55)$$

Din aceste relații rezultă că, în funcție de indicii planului reticular și de parametrii rețelei, se poate calcula distanța dintre planele reticulare pentru fiecare sistem de cristalizare.

8.6.3. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A DISTANȚEI RETICULARE *D*

Determinarea experimentală a distanței *d* se face utilizînd formula Bragg-Wulf.

Se presupune o rețea de plane reticulare, deci o familie de plane, situate la aceeași distanță. Se consideră două plane vecine P_1 și P_2. Planele atomice ale cristalului reflectă razele X (fig. 8.51).

Planul P_1 reflectă raza incidentă *I*, dînd o rază reflectată R în direcția reflexiei regulate. În virtutea proprietății razelor X de a trece prin

material, fasciculul paralel de raze traversează planul P_1 și va fi reflectat de planul P_2 în direcția reflexiei regulate. Deci razei incidentale I' îi corespunde raza reflectată R'. Planele P_1 și P_2 fiind paralele, razele reflectate de ele sînt, de asemenea, paralele și, în general, defazate. Pentru ca să fie în fază, trebuie să fie satisfăcută condiția ca diferența de drum dintre razele reflectate R și R' să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă.

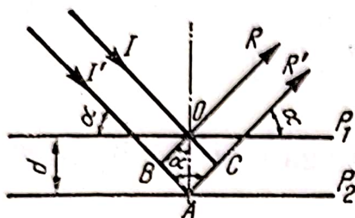


Fig. 8.51

Din figura 8.51 rezultă diferența de drum

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2 \cdot \overline{OA} \sin \alpha = 2d \sin \alpha.$$

Aceasta trebuie să fie egală cu $n\lambda$, adică

$$2d \sin \alpha = n\lambda \tag{8.56}$$

în care n este un număr întreg.

Expresia (8.56) reprezintă formula Bragg-Wulf, din care se poate calcula distanța d dintre planele reticulare, dacă se cunoaște lungimea de undă λ a unui fascicul monocromatic de raze X și dacă se măsoară unghiul α

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \alpha}. \tag{8.57}$$

Metoda röntgenografică este limitată la materialele cristaline, la metale. Se utilizează raze X cu lungimi de undă foarte mari (1,5—2,5) Å și cu forță de pătrundere mică — numai cîteva sutimi de milimetru. Datorită acestui fapt ele sînt proprii pentru determinarea tensiunilor la suprafața piesei. Suprafața radiată e mică (1—3) mm diametru, deci se pot cerceta tensiunile localizate. Se determină numai deformațiile elastice și nu — ca la măsurarea mecanică a deformațiilor — suma deformațiilor elastice și plastice. Metoda röntgenografică include starea absolută de solicitare, de aceea este potrivită pentru *determinarea tensiunilor remanente*. Metoda este utilizată cu precizie satisfăcătoare la metalele cu granulație fină, care dau dungi fine și mai puțin utilizabilă la metale cu granulație grosolană, unde erorile sînt mai mari din cauza grosimii neuniforme a dungilor.

8.6.4. DETERMINAREA UNGHIULUI α

Determinarea unghiului α se face prin metoda Debye-Scherrer, în camera cilindrică, sau prin metoda razelor inversate, în camera plană. Cristalele reflectă razele X în toate direcțiile. Cristalele care satisfac legea Bragg-Wulf dau reflexii care se adună și produc înnegrirea filmului sub formă de inele. Fiecare inel corespunde razelor reflectate de către planele cristaline cu anumiți indici h, k, l.

În funcție de scopul analizei se folosesc camere de diferite tipuri. O astfel de cameră este cea de tipul Debye-Scherrer, care constă dintr-un cilindru de alamă cu diametrul interior de 80 mm (fig. 8.52). Într-un canal al peretelui interior este așezat filmul care este apăsat cu două resoarte

Scanned with OKEN Scanner

puternice. O așezare bună a filmului este o garanție a măsurării precise a diametrului inelului. Capacul camerei este bine închis pentru a împiedica pătrunderea razelor de lumină. În partea de jos a camerei este un con centrat cu precizie, care servește la fixarea epruvetei de cristal. Epruveta

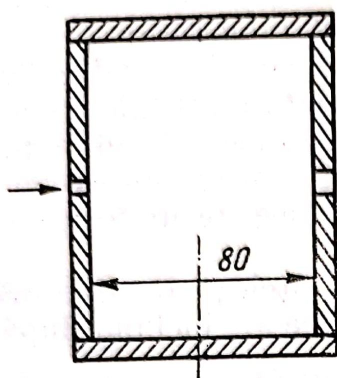


Fig. 8.52

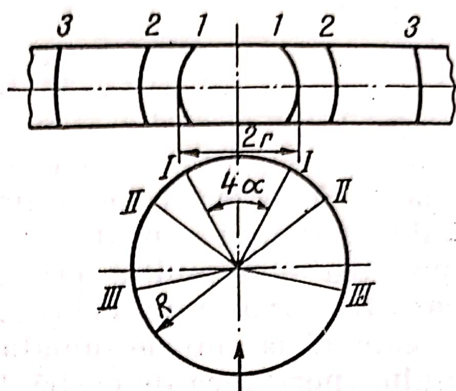


Fig. 8.53

este confecționată din materialul ce se analizează și are forma cilindrică, lungă de 10 ... 12 mm și diametrul de 0,8 ... 1 mm. Ea trebuie să fie așezată în centrul de curbură al filmului cilindric și axa ei trebuie să fie paralelă cu axa de rotație, căci altfel se obțin inele nesimetrice. Tubul de adaos din spatele camerei îndeplinește un rol dublu. Cînd se așează la un bec aprins și se caută poziția luminozității maxime a radiației, umbra barei trebuie să fie în mijlocul suprafeței luminate. Pin tubul de adaos razele primare pot părăsi camera fără a trece prin peretele metalic, căci altfel pe lîngă o radiație secundară difuză, s-ar putea produce și interferențe care pe filmul de la tubul Röntgen ar da inele suplimentare. Din același motiv înainte de așezare se face în film o deschidere circulară pentru ieșirea radiațiilor primare.

Printr-un orificiu mic (colimator) se dirijează un fascicul de raze X monocromatic spre epruvetă în direcția radială a camerei (fig. 8.53). După legea lui Bragg-Wulf, razele monocromatice sînt reflectate de către planele atomice ale cristalelor pe care cad sub un unghi determinat de relația

$$\sin \alpha = \frac{n d}{2d} \tag{8.58}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Datorită faptului că epruveta policristalină este alcătuită dintr-un număr mare de cristale mici, se va forma un sistem întreg de plane reflectoare iluminate de razele incidente. Razele reflectate formează o suprafață continuă în formă conică, avînd la vîrful conului, între generatoarele opuse, un unghi egal cu 4α. Conul de raze intretaie filmul și îi produce înnegrirea în formă de linii curbe sau inele. Fiecare inel corespunde razelor

reflectate de lungimea λ de către planele cristaline cu anumiţi indici: h, k, l. Liniile de intersecţie ale conului de interferenţă cu filmul cilindric aşezat în jurul lui 0 sînt curbe de gradul 4. Ele sînt aproximativ cercuri pentru valorile mai mici şi mai mari ale lui α şi degenerează în linii drepte pentru $2\alpha = 90°$.

Fiecare inel Debye-Scherrer de pe filmul desfăşurat corespunde astfel reflexiei cu lungimea de undă λ la un anumit fel de plane de reţea. Inelele sînt uniform înnegrite cînd cristalele sînt aşezate neregulat şi dacă mărimea lor nu depăşeşte 1/100 mm. La orientarea regulată a cristalelor se produc îngrămădiri de inele. Cînd cristalele sînt mai mari decît 1/100 mm, inelele sînt reduse la unele înnegriri punctiforme. Prin rotirea epruvetei cristaline în timpul experienţei se poate ajunge la o înnegrire uniformă a liniilor prin suprapunerea mai multor cristale.

Prin diametrul $2r$ al unui inel (fig. 8.54) se înţelege distanţa măsurată de la raza incidentă la ambele jumătăţi simetrice ale inelului după desfăşurarea filmului (porţiunea de curbă *1—1*).

Pentru o rază R a camerei, rezultă unghiul de reflexie

$$2r = R \cdot 4\alpha$$

sau

$$\alpha = \frac{r}{2R}. \tag{8.59}$$

Deci unghiul de reflexie α se poate determina din relaţia (8.59) cunoscînd raza camerei R şi măsurînd de pe film diametrul $2r$ al unui inel. Cunoscînd lungimea de undă λ a razelor X utilizate, din relaţia Bragg-Wulf se poate determina distanţa dintre plane.

Cu cît este mai mare diametrul inelului, cu atît este mai mare unghiul de reflexie şi cu atît este mai mică distanţa dintre planele reţelei cristaline,

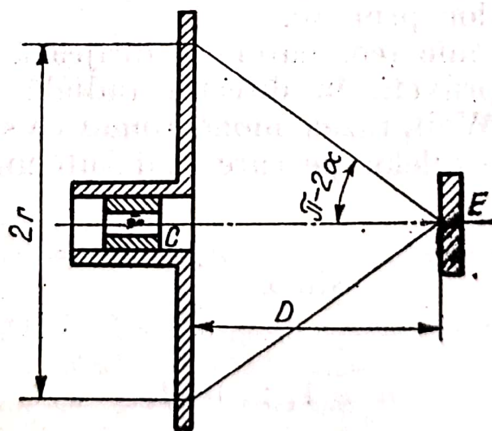


Fig. 8.54

la lungime de undă dată. Inelele cu unghiuri mici sînt, în general, cele mai intense. Poziţia şi raportul intensităţii inelului la o rază dată a camerei sînt dependente de structura cristalului şi de lungimea de undă a razelor Röntgen.

Scanned with OKEN Scanner

De mare importanţă este puritatea radiaţiei. Afară de radiaţia dorită nu trebuie să intervină altă radiaţie. Este recomandabil ca din timp în timp să se cerceteze puritatea radiaţiei cu un material cu reţea simplă şi cunoscută.

În multe cazuri se utilizează camera plană. Aceasta este formată dintr-un disc metalic găurit, pe care se pune filmul acoperit cu un disc negru, opac. Camera se fixează pe aparat. Printr-un colimator C (fig. 8.43) razele Röntgen ies din aparat, lovesc epruveta de care sînt reflectate spre cameră şi impresionează filmul. Razele care satisfac legea Bragg-Wulf produc pe film nişte înnegriri în formă de cercuri. Din aceste cercuri se determină unghiul α. De pe fig. 8.54 se poate scrie relaţia

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{r}{D} \tag{8.60}$$

D este distanţa epruvetă-film, $2r$ — diametrul cercului.

Diametrul cercului se măsoară cu microscopul comparator sau cu fotometrul. La măsurarea cu microscopul comparator diametrul $2r$ se socoteşte între mijloacele dungilor înnegrite, iar la măsurarea cu fotometrul între dungile cu înnegrire maximă.

8.6.5. DETERMINAREA PARAMETRILOR REŢELEI

Sistemul cristalografic cu cele mai multe elemente de simetrie este sistemul cubic sau teseral. În acest sistem cristalizează unele metale: fierul, cuprul, aluminiul, argintul etc. Pentru acest sistem calculele sînt mai simple, fiind determinat printr-un singur parametru a — muchia cubului celulei elementare.

În lucrarea [65] se prezintă modul de determinare a parametrului „a" pentru o sîrmă de fier cu grosimea de 0,9 mm*).

Distanţele pe film au fost măsurate cu microscopul. S-a făcut şi o corecţie cu formula dată de Hadding

$$\begin{aligned} 2r_c &= 2r - \rho(1 + \cos 2\alpha) \\ r_c - r &= \Delta = \frac{\rho}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned} \tag{8.61}$$

unde ρ este raza sîrmei.

Cunoscînd lungimea de undă a radiaţiei Röntgen se găseşte distanţa reticulară d_i. În funcţie de raportul d_i^2/d_1^2 se găsesc în tabelele de structura [20] indicii planelor reticulare hkl. În funcţie de aceşti indici din formula pătratică se calculează parametrul a al reţelei. Pentru sîrma de fier s-a găsit $a = 2{,}862$ Å faţă de 2,8606 Å cît se dă în tabelele din lucrarea [24].

*) Determinările au fost făcute de autor la ISPTT-Bucureşti.

Scanned with OKEN Scanner

S-a procedat la fel cu sîrma de cupru cu diametrul de 0,5 mm.

Măsurarea distanţelor pe film s-a făcut cu fotometrul. Rezultatele sînt date în tabelul din lucrarea [66].

S-a obţinut $a = 3{,}59759$ Å faţă de 3,6080 din tabele. Dacă se neglijează prima şi a patra valoare care sînt mai depărtate de medie se obţine $a = 3{,}60894$ valoare mai apropiată de cea găsită în tabele.

8.6.6. DETERMINAREA SUMEI TENSIUNILOR PRINCIPALE

Se pleacă de la legea lui Hooke generalizată exprimată prin relaţia (1.24). Dacă

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2 \text{ şi}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0, \text{ se obţine}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_\perp = -\mu(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{E}$$

sau

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\mu}\varepsilon_\perp$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\mu}\frac{d_\perp - d}{d} \qquad (8.62)$$

Din relaţia (8.62) se vede că pentru determinarea sumei tensiunilor trebuie să se cunoască distanţa d între planele reţelei cristaline în starea fără tensiuni şi distanţa $d_\perp$ ce se obţine printr-o fotografiere perpendiculară. *Prin această metodă se pot determina tensiunile remanente.*

Aplicaţie. Epruveta E este fixată într-un cadrul şi legată în serie cu un dinamometru D. Prin intermediul piuliţei cu aripioare P, epruveta este solicitată la întindere (fig. 8.55). Materialul epruvetei este fier sau cupru.

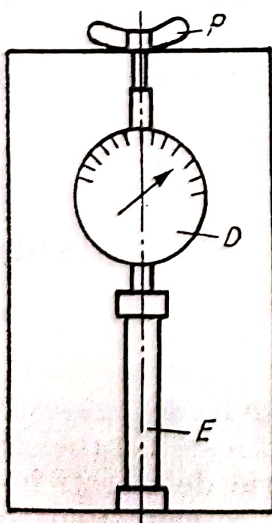


Fig. 8.55

Aparatul Röntgen utilizat la determinarea tensiunilor este un aparat special; poate fi utilizat şi un aparat pentru cercetarea structurii materialelor.

La cercetările făcute de autor s-a utilizat camera plană.

Epruveta s-a pus în faţa colimatorului la distanţa indicată în cartea aparatului (ex. $D = 80$ mm).

Din relaţia (8.60) se calculează unghiul $(\pi - 2\alpha)$, apoi α în radiani şi α°. Acest calcul este aproximativ, fiindcă distanţa D nu s-a măsurat cu aceeaşi precizie ca şi distanţa r. Pentru a determina şi distanţa D cu aceeaşi precizie, se utilizează un material etalon, care poate fi pulbere de aur, argint sau, în lipsă, pulbere de aluminiu pur. Pulberea se lipeşte cu un liant pe suprafaţa de reflexie a epruvetei. În acest caz pe film vor apare două cercuri, unul corespunzător materialului etalon şi altul materialului epruvetei. Se măsoară diametrele celor două cercuri cu microscopul comparator sau cu fotometrul. Se face calculul arătat mai sus pentru materia-

lul etalon. Corespunzător valorii aproximative a unghiului α, se ia din manuale [20] valoarea exactă. Aceasta se introduce în relația (8.60) și se recalculează distanța exactă D. Avînd distanța exactă D, se calculează unghiul α pentru materialul epruvetei. Se calculează apoi $\sin\alpha$. Egalînd valoarea lui d din formula Bragg-Wulf cu cea din formula pătratică, rezultă

$$\sin\alpha = \frac{n\lambda}{2a}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \tag{8.63}$$

În loc de a calcula cu ordinul n este mai simplu de a înmulți indicii hkl. În acest fel s-au întocmit tabelele de structură separat pentru materialele cu fețe centrate sau cu volum centrat. Corespunzător valorii lui $\sin\alpha$, din tabelul de structură se află planul de reflexie cu indicii hkl. Din formula Bragg-Wulf se calculează distanța d, iar din formula pătratică muchia celulei elementare. Operația se face de două ori, întîi pentru epruveta nesolicitată, determinîndu-se distanța d, iar apoi pentru epruveta solicitată, determinîndu-se din nou distanța d. Se observă că în ambele cazuri radiațiile sînt perpendiculare, iar camera este rotită. Cu formula (8.62) se calculează suma tensiunilor. Verificarea determinării pe cale röntgenografică se face cu formula

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}. \tag{8.64}$$

Sarcina P se măsoară cu dinamometrul, iar dimensiunile secțiunii A cu micrometrul.

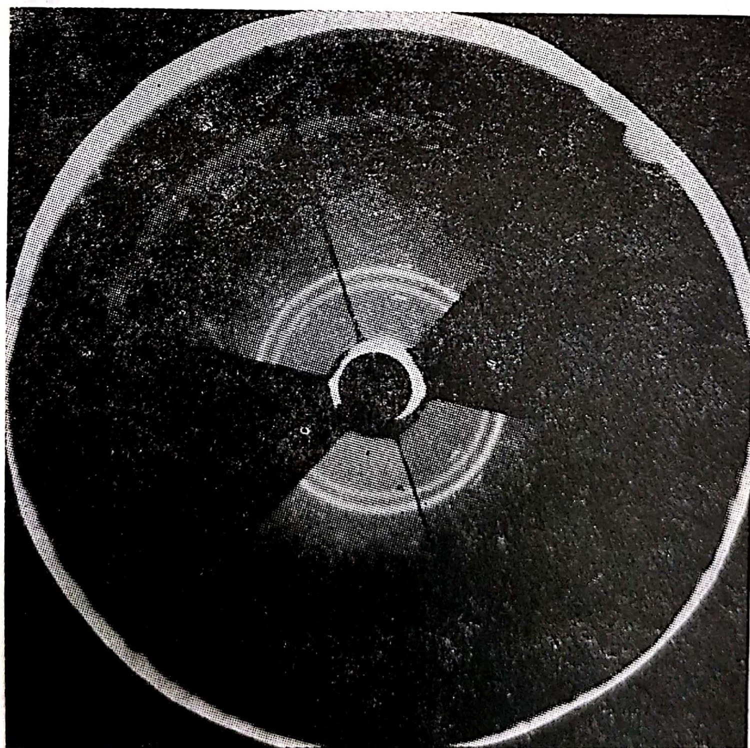


Fig. 8.56

S-a folosit această metodă [65] pentru determinarea tensiunilor în epruvete de tablă, de cupru și de fier (fig. 8.56, fig. 8.57).

Pentru determinarea distanţei epruvetă-film, la metoda razelor inversate s-a utilizat ca material-etalon pulbere de aluminiu pur. Măsurarea distanţelor pe filme a fost făcută cu microscopul comparator şi cu fotometrul. Rezultatele sînt prezentate în lucrarea [65]. Valorile obţinute sînt în limitele erorilor date în literatura de specialitate. Comparaţia a fost făcută cu un dinamometru.

8.6.7. METODA I PENTRU DETERMINAREA TENSIUNII

În planul format de normala *PO* la planul σ_1, σ_2 şi σ_x, deformaţia pe direcţia ρ, ψ este (fig. 8.58) :

$$\varepsilon_{\varphi,\psi} = \varepsilon_{\perp} \cos^2 \psi + \varepsilon_x \sin^2 \psi \tag{8.65}$$

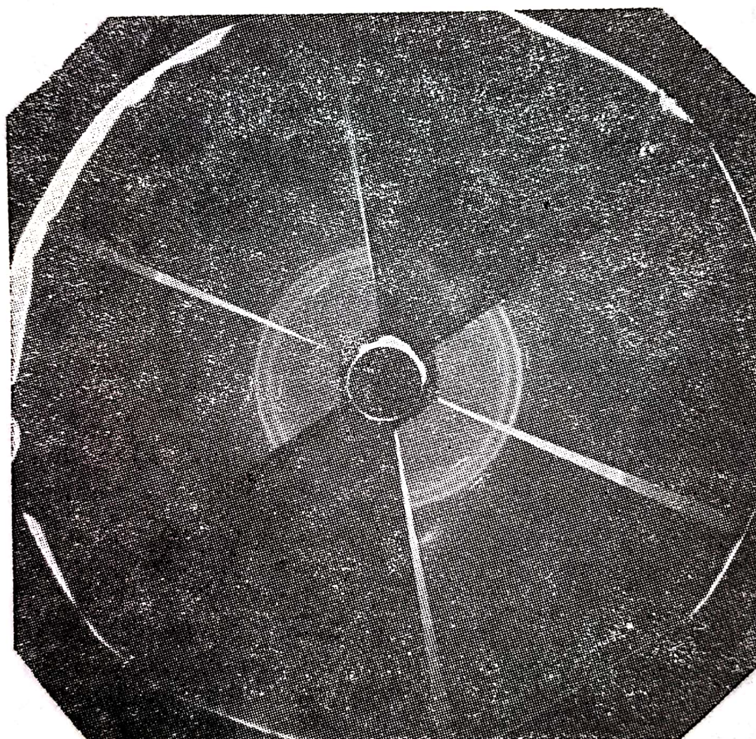


Fig. 8.57

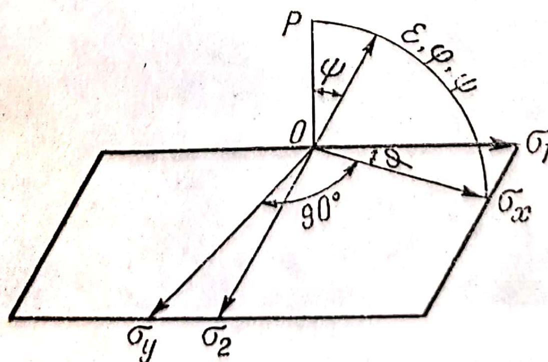


Fig. 8.58

Ținînd seama de relațiile care expimă legea lui Hooke generalizată, se obține

$$E\varepsilon_{\varphi_1,\psi} = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)\cos^2\psi + (\sigma_x - \mu\sigma_y)\sin^2\psi$$

$$E\varepsilon_{\varphi_2,\psi} = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)(1 - \sin^2\psi) + (\sigma_x - \mu\sigma_y)\sin^2\psi \quad (8.66)$$

$$E\varepsilon_{\varphi_3,\psi} = \sigma_x[(1 + \mu)\sin^2\psi - \mu] - \mu\sigma_y$$

Se observă că $\varepsilon_{\varphi_1\psi}$ e funcție de unghiul ψ, deci se va nota ε_ψ. Pentru eliminarea efectului componentei σ_y, se exprimă diferența între alungirile ε_ψ și $\varepsilon_\perp$

$$E(\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp) = \sigma_x(1 + \mu)\sin^2\psi$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu)\sin^2\psi}(\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp) \quad (8.67)$$

Din relația (8.67) rezultă că pentru determinarea tensiunii de la suprafață sînt necesare două măsurători de alungiri, una perpendiculară pe suprafață, iar alta în planul ce trece prin σ_x și normala pe suprafață. Unghiul ψ față de normala la suprafață se poate lua oricum, însă valorile favorabile pentru rezultatele măsurărilor sînt cele corespunzătoare unghiului de 45°.

Deformațiile ε_ψ și $\varepsilon_\perp$ se pot exprima în funcție de distanțele dintre planele rețelei cristaline, astfel

$$\varepsilon_\psi = \frac{d_\psi - d}{d} \quad \text{și} \quad \varepsilon_\perp = \frac{d_\perp - d}{d} \quad (8.68)$$

Diferența lor este

$$\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp = \frac{d_\psi - d}{d} - \frac{d_\perp - d}{d} = \frac{d_\psi - d_\perp}{d} \quad (8.69)$$

La numitor se poate înlocui cu suficientă aproximație $d = d_\perp$.

Expresia tensiunii devine

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu)\sin^2\psi} \cdot \frac{d_\psi - d_\perp}{d_\perp} \quad (8.70)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (8.70) rezultă că determinarea tensiunii σ se poate face in două fotografieri, una perpendiculară și una înclinată la 45°. La fotografierea perpendiculară filmul se rotește, iar la cea înclinată oscilează. Măsurătorile pe film și calculele se fac ca și la paragraful 8.5.6. Se observă că nu e nevoie să se cunoască distanța d pentru epruveta nesolicitată.

A fost determinată tensiunea într-o epruvetă din tablă de cupru (7 × 0,5 mm) cu ajutorul relației (8.72).

Liniile 1, 2 și 3 din tabelul 8.3 conțin elemente de calcul pentru $d_\perp$, iar liniile 4, 5 și 6 pentru d_ψ, ψ fiind ales de 45°. S-a găsit :

$$\sigma_x = \frac{1{,}1 \times 10^6}{(1 + 0{,}33)\sin^2 45°} \cdot \frac{0{,}92978 - 0{,}92889}{0{,}92889} = 1584 \ \text{daN/cm}^2.$$

8.6.8. METODA II PENTRU DETERMINAREA TENSIUNII

Tensiunea σ_x se mai poate exprima ca diferența a două alungiri pe două direcții σ_1 și ψ_2, cu care oczie se anulează efectul tensiunii σ_y. Se scrie expresia celor două deformații și se face diferența lor

$$\begin{cases} E\varepsilon_{\varphi1\psi1} = \sigma_x\,[(1+\mu)\sin^2\psi_1 - \mu] - \mu\,\sigma_y \\ E\varepsilon_{\varphi2\psi2} = \sigma_x\,[(1+\mu)\sin^2\psi_2 - \mu] - \mu\,\sigma_y \end{cases} \tag{8.71}$$

$$E(\varepsilon_{\psi1} - \varepsilon_{\psi2}) = \sigma_x(1+\mu)(\sin^2\psi_1 - \sin^2\psi_2). \tag{8.72}$$

Faptul că tensiunea poate fi exprimată în funcție de diferența a două deformații are o consecință importantă și anume aceea că nu e necesar să se cunoscă distanța d între planele rețelei cristaline în starea inițială (fără tensiuni). Într-adevăr

$$\varepsilon_{\psi1} - \varepsilon_{\psi2} = \frac{d_{\psi1} - d_{\psi2}}{d_\psi} - \frac{d_{\psi2} - d}{d} = \frac{d_{\psi1} - d_{\psi2}}{d_{\psi1}}. \tag{8.73}$$

La numitor se poate pune cu destulă aproximație : $d = d_{\psi1}$. Se observă că la măsurarea röntgenografică a deformațiilor trebuie să se țină seamă că direcția alungirii măsurate nu este identică cu direcția de radiație, ci cu direcția normalei pe planul de rețea care produce reflexia. Aceasta formează cu direcția radiației un unghi : $\eta = 90° - \alpha$.

Introducînd în expresia (8.72) valoarea diferenței deformațiilor din (8.73,) se obține

$$E\,\frac{d_{\psi1} - d_{\psi2}}{d_{\psi1}} = \sigma_x(1+\mu)(\sin^2\psi_1 - \sin^2\psi_2) \tag{8.74}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8.3

Calculul tensiunii în tabla de Cu.

Nr. crt.	D, mm	γ, mm	tg (π − 2α))	(π − 2α), rad	α, rad	α°	sin α	hkl	d, Å	a, Å	Observații
1	85	26,70	0,31412	0,30436	1,41862	81°16′51″					Incidența 90° (aluminiu) aproximativ
2	82,51	26,70	0,32358	0,31295	1,41432	81°02′05″	0,98780	024	0,90454	0,04510	Incidența 90 (aluminiu) exact
3	82,51	51,03	0,61847	0,55389	1,29385	74°07′56″	0,96190	004	0,92889	3,71556	Incidența 90° (Cu) exact
4	85	26,68	0,31388	0,30415	1,41872	81°17′11″					Incidența 45° (aluminiu) aproximativ
5	82,45	26,68	0,32358	0,31295	1,41432	81°02′05″	0,98780	024	0,90454	4,04510	Incidența 45° (aluminiu) exact
6	82,45	50,62	0,61395	0,55061	1,29049	73°56′23″	0,96097	004	0,92978	3,71912	Incidența 45° (Cu) exact

Scanned with OKEN Scanner

Pentru fiecare din cele două jumătăţi ale filmului, unghiul respectiv este

$$\psi_1 = \psi_0 + \eta$$

$$\psi_2 = \psi_0 - \eta \qquad (8.75)$$

Relaţia (8.76) dvine

$$E\,\frac{d_{\psi 1} - d_{\psi 2}}{d_{\psi 1}} = \sigma_x(1+\mu)[\sin^2(\psi_0 - \eta) - \sin^2(\psi_0 - \eta)] \qquad (8.76)$$

Pentru :

$$\psi_0 = 45°$$

$$E\,\frac{d_{\psi 1} - d_{\psi 2}}{d_{\psi 1}} = \sigma_x(1+\mu)\,[\sin^2(45° + \eta) - \sin^2(45° - \eta)] \qquad (8.77)$$

Relaţia (8.76) se simplifică

$$E\,\frac{d_{\psi 1} - d_{\psi 2}}{d_{\psi 1}} = \sigma_x(1+\mu)\sin^2\eta$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)\sin 2\eta}\cdot\frac{d_{\psi 1} - d_{\psi 2}}{d_{\psi 1}}. \qquad (8.78)$$

Tensiunea, după această metodă, se obţine dintr-o singură fotografie pe epruveta solicitată şi înclinată la 45°. Valorile distanţelor $d_{\psi 1}$ şi $d_{\psi 2}$ se deduc prin măsurări separate pe cele două jumătăţi ale inelului de reflexie. Calculul distanţelor se face ca şi la metodele precedente, iar tensiunea se calculează cu formula (8.78).

Verificarea se face ca şi la metoda de la paragraful 8.5.6.

Pentru determinarea tensiunii într-o epruvetă din tablă de fier (7 × × 0,46 mm) s-a utilizat relaţia (8.78) de la metoda II-a. Calculele şi rezultatele pentru tabla de fier sînt date în tabelul 8.4. Valorile obţinute sînt în limita erorilor date în literatura de specialitate (2—3 daN/mm²).

Tabelul 8.4

Calculul tensiunii în tabla de Fe. Anoda Co, radiaţia 45°

Nr. crt.	D mm	r mm	tg $(\pi-2\alpha)$	$(\pi - 2\alpha)$ rad	α rad	$\alpha°$	sin α	hkl	d, Å	
1	75,209	24,336	0,32358	0,31295	1,41452	81°02′05″	0,98780	024	0,90454	Al exact
2	75,209	45,731	0,60805	0,54631	1,29764	74°20′57″	0,96292	301	0,92791	Fe
3	75,209	46,049	0,61228	0,54940	1,29610	74°15′40″	0,96251	301	0,92830	Fe

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)\sin 2\eta}\cdot\frac{d\Psi_1 - d\Psi_2}{d\Psi_1} = \frac{2{,}1\cdot 10^6}{1{,}3\cdot 0{,}54956}\cdot\frac{0{,}92830-0{,}92791}{0{,}92830} = 1239 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru determinarea distanţelor epruvetă-film s-a utilizat pulbere de aluminiu pur ca material etalon.

Măsurarea distanţelor pe film s-a făcut cu microscopul comparator şi cu fotometrul.

8.6.9. APLICAŢII PRIVIND MĂSURAREA TENSIUNILOR REMANENTE

1°. *Determinarea tensiunilor remanente în plăcuţe de oţel moale.* În lucrarea [11] se prezintă modul de determinare a tensiunilor în plăcuţe de oţel moale extrase din inima unui profil HEA 100, cu dimensiunile 70 × 50 × 7 mm. Epruvetele au fost polizate electrolitic. Epruvetele *A* au rămas brute, iar epruvetele *B* au suferit un tratament de recoacere la 600°C pentru detensionare. Două epruvete *C* au fost încălzite în mod diferenţial. Măsurările au fost făcute în centrul epruvetelor şi în direcţia laminării. Rezultatele sînt trecute în tabelul 8.5.

Tabelul 8.5

Epruveta	1A	2A	3A	4A	5A	6A
N/mm²	+31	−115	−85	−106	−134	−146
Epruveta	1B	2B	3B	1C	2C	
N/mm²	0	+5	0	+ 23	+ 33	

2°. *Determinarea tensiunilor remanente în aripile unui profil HEA 140.* În aceeaşi lucrare [11] se prezintă modul de repartiţie a tensiunilor remanente în aripile unui profil HEA 140, determinate cu ajutorul razelor X. O bucată din profil cu lungimea de 30 cm. a fost polizată electrolitic pe o bandă cu lăţimea de 2 cm. pe toată lăţimea aripii. Apoi profilul a fost tăiat în fîşii pe care s-a măsurat deformaţia între starea iniţială şi starea după tăierea în fîşii, cu ajutorul unui extensometru cu precizia de 1/1000 mm. În fig. 8.59 se dau diagramele de repartiţie a tensiunilor determinate cu ajutorul razelor X şi prin metoda secţionării în fîşii.

Dacă se notează cu σ_r tensiunea remanentă şi cu A aria secţiunii nete a profilului, evident că trebuie să existe relaţia

$$\int_A \sigma_r \, \mathrm{d}A = 0.$$

Această ecuaţie fiind obligatoriu verificată într-o secţiune oarecare, implică faptul că la trecerea dintre inimă — aripă există un foarte mare gradient de tensiune, astfel că tensiunile maxime depăşesc chiar limita elastică.

Acest rezultat pune în evidenţă faptul că un profil laminat ar putea flamba înainte de a se atinge limita de încărcare prescrisă de norme.

Scanned with OKEN Scanner

Prin aceasta se vede importanța cunoașterii tensiunilor remanente în cazul fenomenelor de instabilitate a profilelor comprimate.

Atît la determinarea tensiunilor remanente în plăci, cît și a celor din profilul HEA 140 cu ajutorul razelor X, eroarea a fost de cca 1 daN/mm².

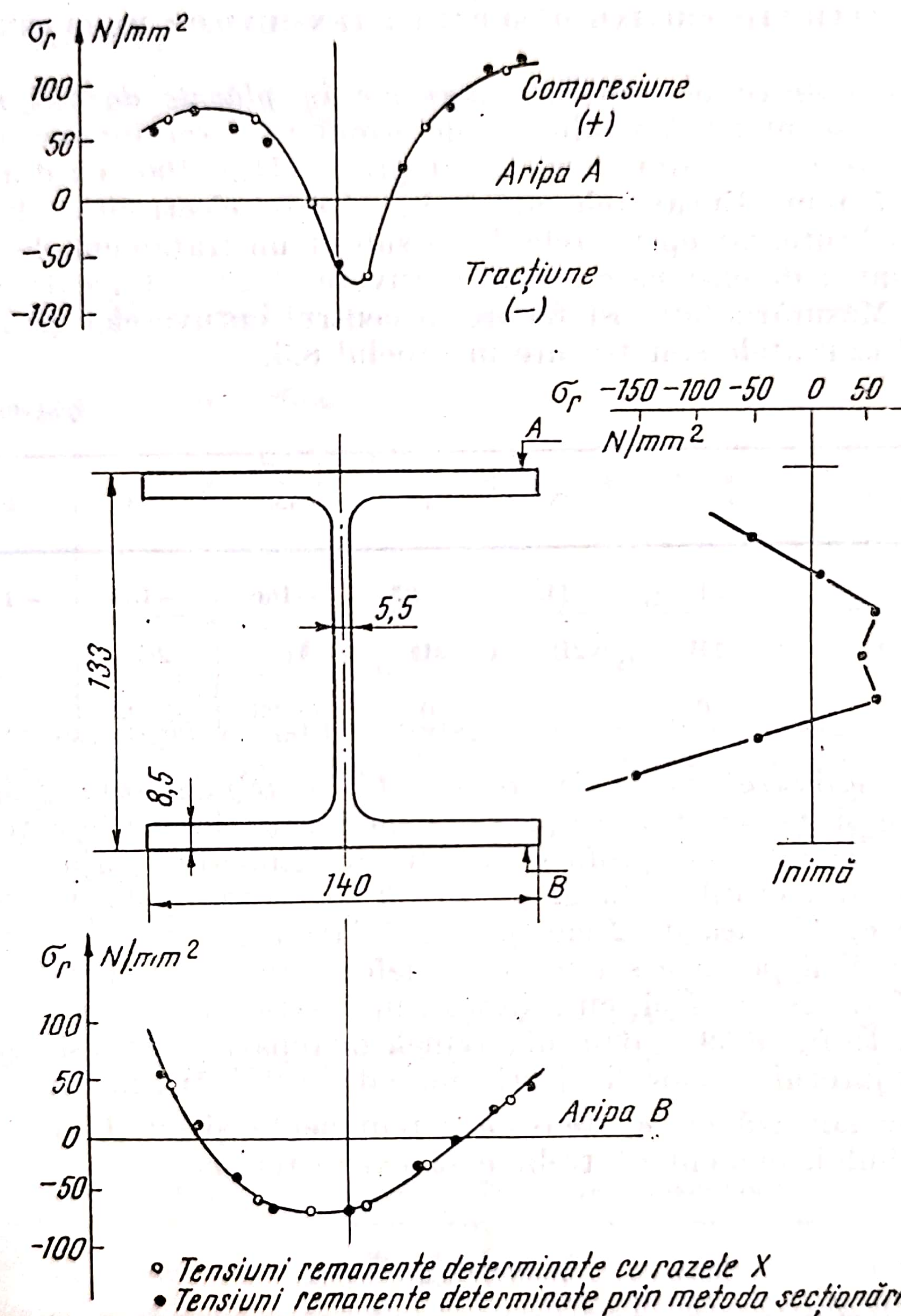


Fig. 8.59

8.6.10. CONSIDERAȚII ASUPRA ERORILOR METODEI

De la început se observă o contradiție între ipotezele admise. Pe de o parte s-a considerat că metalul este corp solid omogen, continuu și izotrop căruia i s-au aplicat formulele din teoria elasticității, pe de altă parte,

Scanned with OKEN Scanner

s-a determinat distanța între planele reticulare ale rețelei cristaline. Se știe că structura cristalină este discontinuă și anizotropă. Se înlătură parțial această contradicție, ținînd seama că materialele cristaline sînt formate din agregate de microcristale cu orientare oarecare. Cu toate acestea o sursă de erori provine din aplicarea ecuațiilor din teoria elasticității pentru a lega tensiunile de deformațiile măsurate. Modulul de elasticitate E și coeficientul de contracție transversală μ, determinați pe cale röntgenografică pentru anumite cristale, pot să aibă valori mult diferite de valorile medii determinate pe cale mecanică. Materialele policristaline nu sînt izotrope decît prin compensație, din cauza orientării diferite a cristalelor. Rezultatele măsurătorilor röntgenografice însă nu sînt mult diferite de cele obținute prin metode mecanice.

O altă sursă de erori este lățimea spectrală a benzii. Aceasta are cauze multiple. Întîi este un factor geometric, colimatorul, asupra căruia se poate acționa (colimator fin). Un alt factor asupra căruia se poate acționa mai greu este lungimea de undă λ, care nu este perfect definită, așa cum s-a considerat. De altfel, se știe că benzile apar sub formă de dublet K_α și K_β. Fiecare componentă a dubletului are o anumită lățime. Ținînd seama de acestea, din formula Bragg-Wulf, se poate calcula variația unghiului de reflexie.

Diferențiind expresia (8.56) rezultă

$$2d \cos \alpha \cdot \Delta\alpha = n \cdot \Delta\lambda.$$

Prin împărțirea acestei expresii cu (8.56), se obține

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{8.79}$$

Dacă epruveta este confecționată dintr-un material cu structură fină cu cristale mici, banda este cu o înnegrire uniformă și mijlocul ei se poate determina cu suficientă precizie. Dacă materialul are o structură grosolană (cristale mari), banda este înlocuită printr-o serie de pete mici, care în general nu sînt situate pe un inel bine definit. Datorită acestui fapt, metalele cu structură grosolană nu se pretează la determinarea tensiunilor cu ajutorul acestei metode. Sînt cazuri cînd chiar materiale cu structură fină dau benzi cu lățimi destul de mari, datorită stării de cristalizare a materialului.

O altă sursă de erori este datorită faptului că distanța se măsoară nu normal pe suprafața piesei, ci normal pe planul de reflexie.

În cazul fotografierilor oblice, oscilația filmului în jurul direcției de radiație este de asemenea o sursă de erori. Există metode și formule de corecție.

Atît la fotografierile perpendiculare pe suprafață, cît și la cele oblice, la calculul tensiunii σ_x s-a neglijat influența tensiunii σ_y. Schaaber a dat o rezolvare matematică riguroasă a problemei, în care se determină separat prin măsurători tensiunile σ_x și σ_y.

Scanned with OKEN Scanner

Adîncimea de pătrundere a razelor este diferită în cazul radiației oblice față de radiația perpendiculară. După observațiile lui Schaaber, măsurători cu fotografieri perpendiculare și oblice nu dau aceleași rezultate.

În calculele făcute pentru determinarea tensiunilor cu ajutorul razelor Röntgen s-a admis starea plană de tensiuni. Sînt cazuri cînd e nevoie să se țină seamă de o stare spațială de tensiuni, cînd tensiunea $\sigma_3 \neq 0$ și are valori importante chiar în stratul de la suprafața piesei, străbătută de razele Röntgen.

8.6.11. Concluzii

S-au arătat mai sus cîteva surse de erori. Cu toate acestea, o serie de măsurători efectuate de Bollenrath, Hayk, Oswald, Glocker și Schaaber, Müller și Martin au arătat că în multe cazuri este o concordanță între valorile obținute prin metoda röntgenografică și cea mecanică, iar în alte cazuri diferențele care există sînt în limite acceptabile (1—3 daN/mm^2). Rezultatele sînt mai precise în cazul tensiunilor cu valori mari.

Metoda prezintă următoarele caracteristici:

— este singura care permite să se determine *starea de tensiuni absolută* într-un metal fără ca să fie nevoie să se facă măsurători pe epruvete nesolicitate,

— poate fi utilizată, cu succes, la determinarea *tensiunilor remanente*

— se pot măsura numai deformațiile elastice, nu și cele plastice,

— radiațiile se fac pe o suprafață cu un diametru de aproximativ 3 mm, deci se pot determina tensiunile locale,

— poate fi aplicată cu bune rezultate numai la metale cu structură fină,

— este limitată la straturile de la suprafața piesei.

Instalația Röntgen se compune din generatorul de înaltă tensiune, tuburile Röntgen și camera reflectoare pentru luarea fotografiei pe film. După natura materialului, trebuie să se utilizeze tuburi Röntgen cu diferiți anozi. Pentru fier se potrivește anodul de cobalt, pentru aliajele de aluminiu anodul de cupru. Instalația Röntgen pentru măsurări de tensiuni trebuie să fie ușor transportabilă și să prezinte o protecție totală față de tensiunea înaltă și de pericolul razelor. Tuburile Röntgen trebuie să se poată aranja ușor în diferite direcții și să aibă o pată luminoasă netă și așezată uniform. Camera reflectoare trebuie să fie stîns legată de tuburi.

Operarea cu raze Röntgen este vătămătoare sănătății. Principiile tuturor măsurilor de protecție contra radiațiilor le formează izolarea de dozele mari de raze Röntgen mai intense astfel ca acestea să nu poată dăuna sănătății omului care ar lucra mai mult timp cu ele.

BIBLIOGRAFIE

1. BARBIER, J., LAUGUERN, *Mesure des contraintes superficielles par diffractometrie X.*, Sciences et Techniques de l'armament tom. 45— 1971.
2. BARRETT, C. S., *Structure des metaux*, Paris, Ed. Dunod, 1957.
3. BARTL D. MURDOCH, O., *Tehnologia himicescoi i electrohimicescoi obrabotki poverhnostei metalov*, Masghiz, Moscova, 1961.
4. BELEAEV, N. I., *Lucrări de laborator la rezistența materialelor*, Moscova — Leningrad traducere din l. rusă 1952.
5. BOITEN. R. G., TEN CATE, W., *A routine method for the measurement of residual stresses in plates*, Appl. Scient. Research, La Haye 1952.
6. BORCHERT L., *Chrome dur* — iunie 1964 pag. 11
7. BRENNER A, SENDEROFF, Journal of Research Natural Bureau of Standards, SUA, 1949, 42.
8. CAMPUS, F., *Methods for measuring elastic and plastic deformations and distorsions of stul welds*, RILEM Buletin nr. 6, sept. 1951.
9. CHIH — CHUM HSIAO, *The distribution of residual stresses*, Proc. Experimental Stress Analysis, vol. VI, nr. 2, 1948.
10. COCHARD, A. W., *A method of measuring magnetostriction*, J. Applied Physics, Ian. 1954.
11. CASTEX. L., MASO, J. C., *Etude des contraintes residuelles par difractometrie X, dans des profiles lamines d'acier doux*. Construction metalique, nr. 2, 1975.
12. COUTINHO, A., *Théorie de la determination expèrimentale des contraintes par une mèthode n'exigeant pas la connaissance précise du module d'elasticité*, Int. Ponts et Charpantes, vol. IX, 1949.
13. CSOKAN O., Galvano, France, 1960. p. 281.
14. DENNIS J. K., Trans. Inst. Metal Finishing — Anglia, aprilie 1965.
15. DIRUY, M., *Edute experimentale des phénomènes différés dans les ouvrages en beton pré-contraint*, Raport de Recherche, nr. 50 Decembre 1975, Laboratoires de Pont et Chaussées, Paris.
16. DURELLI, A. J., TSAO, G. H., *Quantitative evaluation of residual stresses by the stresscoat drilling technique*, Stress Analysis vol. X, nr. 1, 1952
17. FIROIU, I. C., Rev. Chimiei, nr. 9, 1957.
18. FISCHER G., Galvanotechnik — RFG, 53, nr. 7, iulie 1962
19. GABE D. R., WEST J. M. TRANS. Inst. Metal Finishing — Anglia, vol. 40, 1963.
20. GLOCKER, R., *Materialprüfung mit Roentgenstralen*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer Verlag, 1958.
21. GREER, E., *Stress determination by grittle coatings*, Mechanics Engineering, July, 1947.
22. GUINIER, A., *Théorie et technique de la radiocristallographie*, Paris, Ed. Dunod, 1956.
23. GUSCIA, O. J., *Măsurarea tensiunilor remanente cu ajutorul ultrasonetelor* (traductoare din l. rusă), Rev. Sudare, tăiere, lipire, nr. 5, 1969.
24. HAUSSEGUY, L., MARTINOD, H. *Nouveau procédé non distructive pour la determination des contraintes residuelles superficielles*, Recherches aeronautique, Janv — Fevr. 1954.
25. L'HERMITE, *Methodes générales d'essai et de controle en laboratoire*, Eyrolles, 1959.
26. HOAR T. P., ARROWSMITH D. I. Trans. Inst. Metal Finishing-Anglia, 1954, 1957, vol. 30 1958, vol. 36.
27. HOLISTER, J., *The determination of in situ stresses in rock and concrete*, Appl. Mat. Research Jan. 1966.

28. HORBANIUC D. *Contribuţii la determinarea şi studiul tensiunilor iniţiale în acoperiri metalice depuse electrolitic*, Teză de doctorat 1970, Institutul Politehnic Iaşi.
29. HORGER, J. O., ş.a., *Residual Stresses and fatique studies*, Stress Analysis, vol. 1, nr. 1, 1943.
30. KACIANOV, N. N. şi MIRKIN, L. L., *Röntgenostrukturînii analiz (polikristallov)*, Moscova, Masghiz, 1960.
31. KITAIGORODSKI, N., *Analiza structurală cu raze Röntgen* (traducerea Academiei R.P.R., 1958).
32. KONISHI S., Metal Finishing — SUA, 61 aprilie 1963, şi oct. 1963.
33. KUSHNER J. B., Proc. Am. Electroplaters Society — SUA, 45, 1958, Metal Progres — SUA, 81, febr. 1962; Metal Finishing- SUA, v. aprilie 1958.
34. LAGASSE, P. E., *Mesures magnetiques au curs de la traction*, Rev. Metalurgie, Jan. 1955.
35. MATEESCU, D. SARLĂU, C., *Calculul structurilor sudate*, Partea I, Institutul Politehnic Timişoara.
36. MATHAR, J., *Determination of initial stresses by measuring the deformation around drilled holes*, Trans. Au. Soc. Mechanics Engineering, vol. 56, 1934.
37. MILLER, M., MANTEL, E., COLEMAN, W., *An evoluation of the X — ray dissection methods of residual stress measurement in hardened steel*, Proc. Soc. Experimental Stress Analysis, vol. XV, nr. 1, 1957.
38. MIRKIN, L. L., *Sparavocinik po röntgenostrukturnoum analizu polikristallov*, Moscova, 1961.
39. MOCANU, D. R., *Determinarea experimentală a tensiunilor remanente din construcţiile sudate*, Cursuri de perfecţionare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
40. MOCANU, D. R., BUGA, M. GEORGESCU C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor, 1966.
41. MOCANU, D. R., TRIPA, M., *Determinarea eforturilor unitare în construcţiile feroviare cu ajutorul razelor Reontgen*, Ed. Căilor Ferate, Bucureşti, 1959.
42. MOCANU, D. R., ILIESCU, Gh., ŞERBAN VL., *Controlul sudurilor cu ajutorul ultrasunetelor*, Institutul de Documentare Tehnică 1965.
43. MÜLLER, E. A. W., *Handbuch der zerstörungsfreien*, Materialprofung R. Oldenbourg — München, 1970.
44. NICOLAEV, A. G., *Rezistenţa construcţiilor sudate* (traducere din limba rusă), Rev. Sudarea şi lipirea metalelor, nr. 5, 1968.
45. NISIDA, M., *A method of Measuring Stress on the Surface Photoelasticaly*, Scientific Papers of the Institute of Physical a Chemical Research, Tokyo, vol. 5, nr. 2, 1965.
46. OROWAN, E., *Clasification and nomenclature of internai stresses* , Rev. Metalurgique, nov dec. 1947.
47. POMEY, J., GOUTEL, F., ABEL, L., *Determination des contraintes residuelles dans les piéces cementées*, Actes colloques, Poitiers, 1950, Soc. Doc. Aeronautique, Paris 1952.
48. PONOMARIOV, S. D. şi COL., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. 1 şi 2 (traducere din l. rusă), Ed. tehnică Bucusşti, 1960.
49. POPOVICI VL., BĂLTĂNOIU, M., *Din experienţa Uzinei Electroputere privind determinarea experimentală a deformaţiilor remanente la îmbinări sudate*, Cursuri de perfecţionare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
50. PROPEREKA M. Ia., *Zavodskaia laboratoria*, URSS, 1957, nr. 6, şi 1958, nr. 24.
51. RENDLER, N. J., VIGNESS, J., Hola *Drilling Strain Gage Method of Measuring Residual Stress*, Experimental Mechanics, dec. 1966.
52. REDNEV, S., *Measurement Techniques and data Reduction for Thermal Stress and Residual Stress, using Photoelastic coating*, SESA meeting, Detroit, 1966.
53. RUMELHART, D. BHUAND, C., *Contribution à l'analyse des contraintes residuelles par la methode du trou et de la rosette*, R.F.M., 1970.
54. SACHS, G., ESPAY G., *A new method for determination of stress distribution in thin weldin tubing*, Engineering, nr. 10, 1941.
55. SCHAAL, A., *Metode şi exemple de aplicare a măsurării eforturilor unitare prin röntgenografie.* În: Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik, iulie 1953.
56. SCULARI, P. *Cercetarea tensiunilor interne cu ajutorul razelor Röntgen*, Hutnike Listy, 8/1954 .

Scanned with OKEN Scanner

57. SOETE, W. VANCROMBRUGE, R., *En quasi non destructive werkwyze voor heat be plan van sigen spanningen*, Rev. Soudure, nr. 4, 1947 Belgique.
58. SPÄHN H., Metalloberfläche — R.F.G. 16, aprilie 1962.
59. STALZER M., Metalloberfläche — R.F.G. 18 oct. 1964.
60. SARLĂU, C., *Tensiuni remanente datorită sudării*, Cursuri de perfecționare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
61. TEODORESCU, C.C., MOCANU, D. R., BUGA, M., *Îmbinări sudate*, Editura tehnică, 1972.
62. TEODORESCU, N. *Metode vectoriale în fizica matematică*, Vol. I București, Editura tehnică, 1954.
63. TIETZ, H. D., *Spanungsmessung mit ultraschall*, Wissenschatliche Zeitschritf der Techn Magdeburg, Heft 5, 1966.
64. TOUPIN, R. A., BERNSTEIN, B., *Sound waves, in deformed perfectylastic materials*, Journal Acoustic Soc. American, vol. 33, nr. 2, 1961.
65. TRIPA, M., HARNAGEA, GH., *Determinarea eforturilor unitare cu ajutorul razelor Roentgen*, Construcția de mașini, București 4/1963.
66. TRIPA, M., HARNAGEA, GH., *Metode pentru determinarea eforturilor unitare în piese cu ajutorul razelor Roentgen*, Contrucția de mașini, București, 8/1964.
67. TREUTING. R. G., REOD, W. T., *A mechanical determination of biaxial residual stresses in street materials*, J. Appl. Pysics, febr. 1951.
68. TYCHOWSKI, F., *Mesure optique des contraintes*, Prace Institutu Tecjniki Budowlanej Warszawa, 1951.
69. VIDAL, G., LAMUSSE, P., *Influence comparative des efforts de traction et de compression sur les caracteristiques magnetiques de l'acier doux*, C. R. Acad. Sciens, oct. 1953.
70. PHOTOLASTIC INC., BULETIN TDG — 55, ,,Measurement of residual stresses by blind hole drilling method'', may 1971.
71. PHOTOLASTIC INC., BULLETINN SFC — 200, ,,Photolastic stress analysis'', Techniques and products.

9

UTILIZAREA ANALOGIILOR ELECTRICE ÎN TENSOMETRIE

Dr. ing. N. ILIESCU

Determinarea stării de tensiune din corpuri pe cale analitică este condiționată, în multe cazuri, de rezolvarea unor ecuații diferențiale cu derivate parțiale, cu condiții date pe contur. Analiza matematică dă soluții numai pentru cîteva cazuri simple, în care domeniul studiat are o formă regulată. Pentru soluționarea problemelor în care intervin domenii mărginite de contururi neregulate, se apelează la alte metode cum ar fi : metodele numerice de calcul, sau metodele experimentale de modelare electrică. Soluțiile obținute și într-un caz și în celălalt deși sînt aproximative permit obținerea unor informații suficient de precise privind starea de tensiune din domeniul analizat. Precizia determinărilor în ambele cazuri poate fi îmbunătățită în mod simțitor prin adoptarea unor scheme de calcul potrivite, sau a unor dispozitive experimentale care să permită efectuarea determinărilor într-un număr mare de puncte.

În ultimii ani analogiile electrice au fost aplicate cu succes în soluționarea unui mare număr de probleme inginerești. Utilizarea calculatoarelor analogice universale cu structuri complexe a simplificat foarte mult rezolvarea acestor probleme, oferind totodată posibilități largi de generalizare. Analogiile electrice sînt folosite în prezent atît ca mijloace de investigație, cît și ca mijloace de simulare în diferite domenii inginerești cum sînt : transmisia căldurii, teoria elasticității, mecanica corpurilor deformabile, studiul vibrațiilor, reologie etc. În cele ce urmează se va insista asupra utilizării analogiilor electrice ca tehnică experimentală pentru investigarea stării de tensiune în anumite probleme inginerești.

9.1. ELEMENTE DE TEORIA MODELĂRII

9.1.1. FENOMENE SIMILE ȘI ANALOGE

Legile fizicii în forma lor cea mai generală reprezintă o serie de relații **între lucruri, fenomene** sau procese care decurg din natura lor internă. **Aceste legi pot fi exprimate** prin relații matematice diferențiale (locale) **sau integrale** (globale). Relațiile diferențiale, la rîndul lor pot fi de mai

Scanned with OKEN Scanner

multe feluri : ordinare, cu derivate parţiale, cu diferenţe finite etc. *Totalitatea fenomenelor care sînt generate de aceeaşi lege formează o clasă de fenomene.* Dacă fenomenele unei clase fac parte din acelaşi domeniu al fizicii se numesc *simile*, iar dacă fac parte din domenii diferite se numesc *analoge*. Clasa fenomenelor analoge este mult mai largă decît clasa fenomenelor simile. Micile oscilaţii ale pendulului, oscilaţiile libere ale unui oscilator mecanic liniar, sau oscilaţiile unui circuit electric cu inductanţa L şi

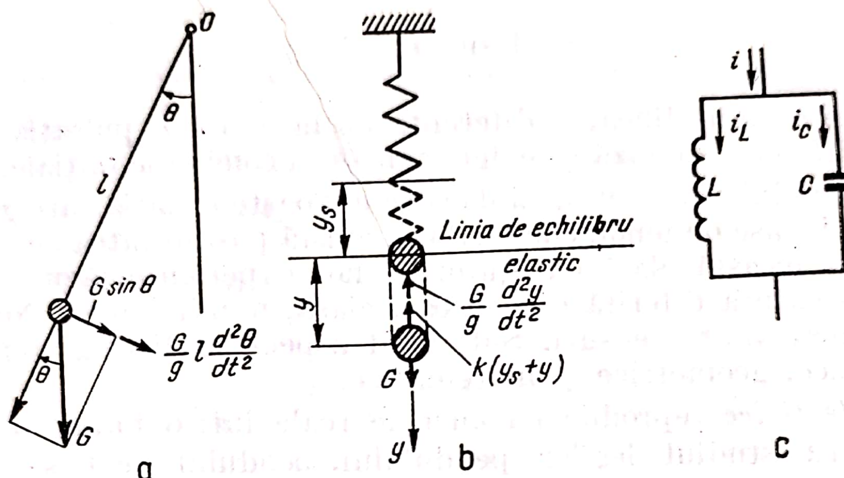


Fig. 9.1.

capâcitatea C legate în derivaţie, deşi sînt fenomene care fac parte din domenii diferite ale fizicii, fiind descrise de ecuaţii diferenţiale de aceeaşi formă, sînt fenomene analoge. Astfel legea de mişcare a unui pendul matematic (fig. 9.1, a) este reprezentată de următoarea ecuaţie diferenţială

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{9.1}$$

unde cu g s-a notat acceleraţia gravitaţională.

Dacă un oscilator mecanic liniar este scos din poziţia de echilibru elastic (fig. 9.1, b), începe să oscileze. Mişcarea greutăţii G în acest caz este dată de următoarea ecuaţie

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \tag{9.2}$$

unde ω este pulsaţia oscilaţiilor proprii ale oscilatorului. Evoluţia în timp a unui circuit cu capacitatea C şi inductanţa L, legate în derivaţie (fig. 9,1,c), este descrisă de următoarea ecuaţie diferenţială

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{LC} q = 0 \tag{9.3}$$

unde q este sarcina electrică.

Scanned with OKEN Scanner

După cum se poate observa, cele trei fenomene sînt descrise de aceeași ecuație diferențială care are următoarea formă generală

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este de forma

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

unde A este amplitudinea, φ diferența de fază, iar ω pulsația. Amplitudinea A și diferența de fază φ se determină din condițiile inițiale.

Din exemplul dat rezultă că dacă se cunoaște ecuația care guvernează evoluția unei clase de fenomene analoge, există posibilitatea de a studia un fenomen din această clasă cu ajutorul unor experiențe făcute pe un alt fenomen de natură diferită din aceeași clasă, numit model. Noțiunea de model are mai multe sensuri. Sub acest aspect se disting trei tipuri de modele : fizice, geometrice și matematice.

Modelele fizice reproduc fenomenele reale într-o formă simplificată. Astfel pentru studiul legilor pendulului, pendulul real se înlocuiește printr-un model care de fapt este tot un pendul alcătuit dintr-o masă concentrată suspendată de un punct fix printr-un fir inextensibil.

Modelele geometrice reproduc fenomenul studiat în mod identic, însă la altă scară. Spre deosebire de modelele fizice, la modelele geometrice se păstrează aceeași scară pentru toate elementele. Asemenea modele se utilizează pentru studiul construcțiilor sau în studiile de aero și hidrodinamică.

Modelele matematice fac parte din aceeași grupă de fenomene cu fenomenul studiat, însă sînt de altă natură. Astfel comportarea unui oscilator mecanic liniar atunci cînd este scos din poziția de echilibru elastic poate fi studiată pe un circuit cu inductanță și capacitate legate în derivație. Modelele matematice pot fi de naturi diferite. În prezent în analogii se utilizează în exclusivitate ca modele matematice, modelele electrice la care diferitele mărimi fizice sînt modelate prin semnale electrice care se manipulează ușor și se măsoară cu precizie ridicată.

9.1.2. NOȚIUNI DE TEORIA SIMILITUDINII

La baza studiilor care se fac pe modele, stă teoria similitudinii care studiază proprietățile sistemelor analoge, stabilind condițiile în care rezultatele obținute prin experimentările făcute pe model pot fi transferate fenomenului modelat. De exemplu, se consideră două corpuri cu masele m_1 și m_2 aflate în mișcare rectilinie cu accelerațiile a_1 și a_2. Mișcările celor două corpuri constituie două fenomene similare, guvernate de

Scanned with OKEN Scanner

legea fundamentală a dinamicii. Scriind legea a doua a dinamicii în cele două cazuri se obține

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$
$$F_2 = m_2 a_2 = m_2 \frac{dv_2}{dt} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}. \tag{9.4}$$

Împărțind aceste două relații membru cu membru, rezultă

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{t_2^2}{t_1^2}. \tag{9.5}$$

În expresia (9.5) intervin rapoartele

$$\frac{F_1}{F_2} = k_F, \quad \frac{m_1}{m_2} = k_m, \quad \frac{a_1}{a_2} = k_a$$
$$\frac{v_1}{v_2} = k_v, \quad \frac{x_1}{x_2} = k_x, \quad \frac{t_1}{t_2} = k_t$$

unde k_F, k_m, k_a, k_v, k_x și k_t, poartă numele de factori de scară. În general factorii de scară nu pot fi aleși toți în mod arbitrar. Cunoscînd factorii de scară, rezultă că se poate deduce evoluția în timp a unuia din fenomene, studiind celălalt fenomen. Se observă că factorii de scară nu sînt independenți între ei. Astfel

$$k_F = k_m\, k_a, \qquad k_F\, k_t = k_m\, k_v, \qquad k_F\, k_t^2 = k_m\, k_x.$$

Aceste relații mai pot fi scrise sub forma

$$\frac{k_F}{k_m k_a} = 1, \quad \frac{k_F\, k_t}{k_m k_v} = 1, \quad \frac{k_F\, k_t^2}{k_m k_x} = 1. \tag{9.6}$$

Introducînd în relațiile de mai sus, în locul factorilor de scară, dimensiunile mărimilor care figurează ca indici, se obțin de asemenea, termeni care au dimensiunea egală cu unitatea. Aceste relații între factorii de scară sînt specifice fenomenelor simile, constituind o proprietate foarte importantă a acestora.

Utilizarea similitudinii în modelarea fenomenelor fizice se face în baza postulatelor și legilor acesteia. Nu se insistă asupra legilor și postulatelor de similitudine deoarece nu sînt legate direct de problemele tratate în acest capitol. O prezentare a acestor legi se găsește în capitolul X și în lucrarea [11].

9.2. MODELAREA ELECTRICĂ A CÎMPULUI FIZIC

9.2.1. PRINCIPALELE ECUAȚII DIFERENȚIALE CARE CARACTERIZEAZĂ CÎMPUL FIZIC

În activitatea de cercetare și proiectare se întîlnesc numeroase probleme în care intervin ecuații diferențiale cu derivate parțiale cu condiții date pe contur. Printre cele mai întîlnite tipuri de ecuații diferențiale se numără ecuațiile de tip Laplace, Poisson, Fourier și Pokkels. Astfel în studiul cîmpurilor staționare termice, electrice, magnetice cum și într-o serie de probleme ale cîmpului de tensiune din corpuri, mărimile fizice care caracterizează aceste cîmpuri sînt soluții ale ecuației lui Laplace care sub formă generală se scrie astfel

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{9.7}$$

sau sub formă simbolică

$$\Delta U = 0 \tag{9.8}$$

unde $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, este operatorul lui Laplace (laplaceianul), $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, este operatorul nabla, iar U este funcția necunoscută, numită și funcție armonică sau de potențial [5].

În probleme referitoare la domenii care conțin surse interioare, funcția armonică U, satisface ecuația lui Poisson

$$\Delta U = f(\bar{r}) \tag{9.9}$$

unde $f(\bar{r})$ este o funcție cunoscută.

În teoria elasticității, în anumite cazuri de solicitare, cîmpul de tensiune din corpuri este descris de ecuații diferențiale de tip Laplace sau Poisson. Astfel este cunoscut că în cazul particular al stării plane de tensiune [18] suma tensiunilor principale satisface ecuația lui Laplace

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \tag{9.10}$$

De asemenea, funcția de tensiune Φ, în cazul torsiunii barelor cu secțiune necirculară [18], verifică ecuația lui Poisson

$$\Delta\Phi = -2\,G\theta \tag{9.11}$$

unde G este modulul de elasticitate transversal, iar θ este răsucirea specifică.

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunile tangenţiale sînt legate de funcţia de tensiune prin următoarele relaţii

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ şi } \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{9.12}$$

În cazul cel mai general al stării plane de tensiune, funcţia de tensiune Φ, numită şi funcţia lui Airy, satisface următoarea ecuaţie biarmonică

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{9.13}$$

Cunoscînd funcţia de tensiune Φ, se pot determina cele trei tensiuni din plan cu relaţiile

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\, \partial y}. \tag{9.14}$$

Ecuaţia generală a plăcilor plane încărcate cu sarcină distribuită de intensitate p, poate fi scrisă sub formă asemănătoare

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D} \tag{9.15}$$

unde w este săgeata într-un punct din planul plăcii, iar

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{9.16}$$

este rigiditatea la încovoiere a plăcii [2]. În relaţia (9.16), s-a notat cu h grosimea plăcii, iar cu μ coeficientul lui Poisson.

Ecuaţia (9.15) poate fi descompusă în două ecuaţii de tip Poisson [15] astfel

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \tag{9.17}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}$$

în care

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\mu} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{9.18}$$

unde M_x şi M_y sînt momentele încovoietoare din planul plăcii.

Scanned with OKEN Scanner

Acestea sînt cîteva exemple de probleme din teoria elasticității în care pentru determinarea stării de tensiune este necesar să se rezolve una din ecuațiile (9.8) sau (9.9)

Operatorul lui Laplace intervine, de asemenea, ca termen într-o serie de ecuații care caracterizează și alte fenomene, cum sînt fenomenele de propagare. Astfel, în cazul propagării undelor elastice sau electromagnetice în medii omogene și izotrope, ecuația undelor are următoarea formă

$$\Delta U = A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{9.19}$$

Fenomenele de transfer de căldură din termodinamică sau cele de difuzie întîlnite în electromagnetism, sînt guvernate de ecuația lui Fourier [5], în care intervine de asemenea operatorul lui Laplace

$$\Delta U = B \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{9.20}$$

Operatorul lui Laplace intervine și în ecuația lui Pokkels [3] întîlnită în unele probleme de vibrații

$$\Delta U = C\, U. \tag{9.21}$$

Funcțiile A, B și C din ecuațiile (9.19), (9.20) și (9.21) sînt funcții de punct cunoscute.

9.2.2. CONDIȚII INIȚIALE ȘI DE CONTUR

Ecuațiile diferențiale din problemele prevăzute mai sus sînt valabile într-un anumit domeniu dat. După cum se știe pot fi găsite numeroase funcții care să satisfacă aceste ecuații diferențiale. Pentru ca o astfel de funcție să fie soluție unică a ecuației diferențiale trebuie să satisfacă și condițiile de unicitate [5]. De obicei aceste condiții se dau sub formă de condiții inițiale și de contur. În problemele de determinarea cîmpului fizic condițiile de unicitate se reduc la condiții de contur. În rezolvarea ecuațiilor fizicii matematice [5], se întîlnesc mai multe tipuri de condiții de contur.

a) *Condiția lui Dirichlet.* În acest caz funcția are o valoare cunoscută pe conturul domeniului

$$U(\bar{r})\big|_c = f(\bar{r}) \tag{9.22}$$

unde $f(r)$ este o funcție cunoscută care fixează poziția punctelor pe conturul care mărginește domeniul dat.

b) *Condiția lui Neumann.* Această condiție precizează valoarea derivatei funcției după normala la contur

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_c = f(\bar{r}) \tag{9.23}$$

unde $f(\bar{r})$ este de asemenea o funcție cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

c) *Condiții mixte de contur.* Într-o serie de probleme condițiile de contur cuprind laolaltă cele două condiții de mai sus sub forma

$$\left(f_1(\bar{r})\cdot U(\bar{r}) + f_2(\bar{r})\frac{\partial U}{\partial n}\right)\Big|_c = f_3(\bar{r}) \tag{9.24}$$

unde $f_3(\bar{r})$ este o funcție cunoscută.

92.3. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE CU CONDIȚII PE CONTUR

Ecuațiile diferențiale cu condiții pe contur, care descriu cîmpul de potențial într-un domeniu dat, pot fi rezolvate pe cale analitică doar în cîteva cazuri particulare în care intervin domenii mărginite de contururi foarte simple. În majoritatea problemelor practice contururile domeniilor studiate au forme complicate și metodele analitice de calcul sînt practic inabordabile. Pentru soluționarea problemelor, în asemenea situații, se face apel la metodele aproximative de soluționare a ecuațiilor diferențiale. Din categoria acestora fac parte metodele numerice, asupra cărora nu se va insista, și metodele analogice.

În literatura de specialitate [7] se cunosc numeroase analogii pentru determinarea stării de tensiune în diferite probleme inginerești. Analogiile electrice care utilizează sisteme electrice cu constante distribuie sau concentrate, constituie un mijloc comod și suficient de precis pentru determinarea stării de tensiune în problemele în care cîmpul de tensiune este descris de o ecuație de tip Laplace sau Poisson.

9.2.4. MODELAREA ELECTRICĂ A CÎMPULUI FIZIC PRIN CONSTANTE DISTRIBUITE

Se consideră un domeniu conductor D (fig. 9.2) de conductivitate electrică

$$\gamma(r) = \frac{1}{\rho} \tag{9.25}$$

unde ρ este rezistivitatea materialului.

Dacă în domeniul considerat se definește o repartiție de curent electric, regimul permanent va fi caracterizat prin cîmpul de potențial $U(r)$. Notînd cu **J** densitatea curentului care se stabilește în regim permanent, în domeniul considerat, legea lui Ohm [14] se poate scrie astfel

$$J = \gamma E = -\gamma \nabla U \tag{9.26}$$

unde cu E s-a notat intensitatea cîmpului electric.

În absența surselor interioare, fluxul vectorului **J** este conservativ (**J** = ct) și prin urmare

$$\nabla J = 0 \tag{9.27}$$

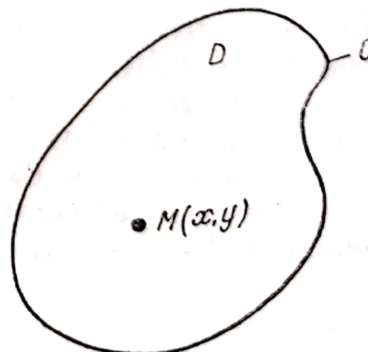


Fig. 9.2.

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\nabla(\gamma \; \nabla U) = 0. \tag{9.28}$$

Ecuaţia (9.28) mai poate fi scrisă astfel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0. \tag{9.29}$$

Ecuaţia (9.29) stă la baza modelării cîmpului fizic prin analogie electrică de potenţial. În felul acesta, orice funcţie Φ (x, y, z) care satisface într-un domeniu dat D_1 o ecuaţie de forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{9.30}$$

şi condiţiile de contur, poate fi identificată cu funcţia de potenţial $U(x, y, z)$ din domeniul conductor D, care are aceeaşi formă geometrică cu domeniul D_1 şi a cărui conductivitate $\gamma(r)$, variază în funcţie de punct, ca şi $\lambda(r)$.

Prin urmare se poate scrie

$$\lambda(\bar{r}) = k \cdot \gamma(r) \tag{9.31}$$

unde k este factorul de scară.

Ţinînd seama de analogia care există între ecuaţiile (9.29) şi (9.30), determinarea funcţiei $\varphi(x, y, z)$ în domeniul D_1 se reduce la măsurarea potenţialului $U(x, y, z)$ din domeniul conductor, după ce s-au realizat constructiv condiţiile de contur impuse.

Pentru soluţionarea unor probleme practice de determinare a stării de tensiune, se folosesc două cazuri particulare ale ecuaţiei (9.28):

1°. *Cazul conductorului omogen.* În acest caz conductivitatea $\gamma = ct$ şi prin urmare ecuaţia (9.28) devine

$$\nabla^2 U = \Delta U = 0. \tag{9.32}$$

Rezultă deci că ecuaţia lui Laplace poate fi integrată într-un anumit domeniu, modelînd domeniul respectiv printr-un conductor omogen şi aplicînd condiţiile de contur.

2°. *Cazul conductorului cvasiplan.* Se consideră un conductor format dintr-o placă subţire cu grosimea uşor variabilă (fig. 9.3) şi o suprafaţă elementară de arie ds, corespunzătoare unei grosimi $h(x, y)$.

Considerînd conductivitatea γ constantă, curentul dI care trece prin elementul de suprafaţă are următoarea expresie [1]

$$\mathrm{d}I = J \,\mathrm{d}s = -\,\gamma \, h(x, y) \, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n} \, \mathrm{d}s. \tag{9.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

Densitatea γ fiind constantă, în absența izvoarelor interioare $\nabla(\mathrm{d}I) = 0$, sau în coordonate carteziene,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0. \tag{9.34}$$

Ecuația (9.34) este analogă cu ecuația (6.29) scrisă în plan, cu deosebirea că în acest caz conductivitatea γ este înlocuită prin grosimea h. De aici

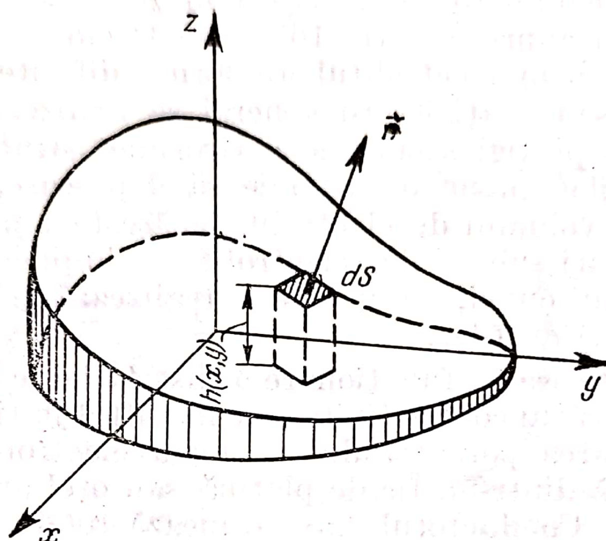


Fig. 9.3.

rezultă posibilitatea de a modela cîmpuri de potențial descrise de ecuația (9.29) prin utilizarea unui mediu conductor omogen cu grosimea variabilă.

9.2.5. REALIZAREA PRACTICĂ A ANALOGIEI ELECTRICE CU CONSTANTE DISTRIBUITE

Analogia electrică cu constante distribuite se realizează folosind medii conductoare solide sau lichide. Ca mediu conductor solid se utilizează foi subțiri de nichel, manganin sau constantan. De asemenea, se mai folosesc și amestecuri semiconductoare aplicate pe diferiți suporți. Astfel hîrtia grafitată este un material potrivit pentru analogii. O hîrtie cu calități foarte bune întîlnită pe piață, este hîrtia Teledeltos, care se livrează sub două calități avînd rezistența specifică de 3 000 Ω/cm^2 și respectiv 12 000 Ω/cm^2.

Modelul electric avînd forma domeniului care urmează să fie studiat se fixează pe un suport izolant cît mai neted, de exemplu pe o bucată de geam. Condițiile de contur se realizează prin aplicarea unor tensiuni pe o serie de ploturi fixate pe conturul modelului cu un adeziv care să permită trecerea curentului.

Modelarea care folosește ca mediu un conductor lichid se realizează în cuva electrolitică. Această metodă de modelare prezintă o serie de avantaje

Scanned with OKEN Scanner

față de modelarea care folosește conductori solizi. Astfel în acest caz se asigură o omogenitate mai bună a mediului modelat, dînd posibilitatea realizării unor modele de dimensiuni mai mari, sporind precizia determinărilor. De asemenea, în acest caz se poate face o modelare spațială a cîmpului de tensiune, punctele din interiorul domeniului fiind ușor de explorat. Modelarea electrică în cuva electrolitică se bazează pe proprietatea electroliților de a conduce curentul electric. Ca electroliți se folosesc soluții slabe ale unor săruri (sarea de bucătărie) sau acizi (acidul sulfuric) în apă. Apa de robinet care conține numeroase săruri s-a dovedit a fi un excelent electrolit avînd rezistivitatea cuprinsă între 10^3 și 10^4 Ω.cm.

Cuvele care conțin electrolitul au forme diferite în funcție de felul modelrăii: plane sau spațiale. În general se realizează sub forma unor cutii cu pereții din plexiglas sau sticlă. Grosimea stratului de electrolit la modelarea cîmpurilor plane nu trebuie să depășească 3—5 cm. Pentru cîmpurile spațiale volumul de electrolit depășește 1 m^3. În cazul cuvelor care folosesc straturi subțiri de electrolit se impune o așezare perfect orizontală a fundului cuvei, lucru care se realizează prin intermediul unor dispozitive de reglaj cu filet.

După mai multe ore de funcționare a instalației se recomandă schimarea electrolitului a cărui conductivitate se modifică în timp.

Pentru măsurarea potențialului în cuva electrolitică se folosește o sondă confecționată dintr-un fir de platină sau oțel argintat cu grosimea de 0,5 ... 0,7 mm. Conductorul care formează sonda se fixează într-un tub de sticlă sau se izolează. Sonda se cufundă în electrolit pe o adîncime de 0,5—1 mm.

Pentru a fixa cu precizie coordonatele punctului din cîmp, în care se stabilește sonda, cuvele electrolitice sînt înzestrate cu un dispozitiv mecanic simplu cu ajutorul căruia se pot trasa separat pe o planșe liniile echi-

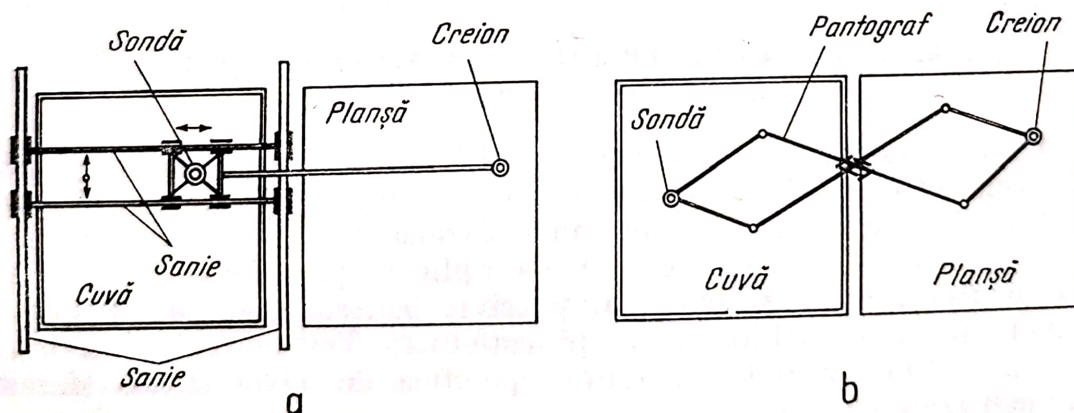


Fig. 9.4.

potențiale. În figura 9.4 sînt prezentate schematic două dispozitive pentru trasarea liniilor de cîmp.

Conturul domeniului modelat se realizează în funcție de condițiile de contur impuse problemei, fie dintr-un element continuu, fie dintr-o serie de electrozi (ploturi) așezați la o anumită distanță unul de altul. Astfel cînd

Scanned with OKEN Scanner

condiţiile de contur sînt de tipul $U = ct$, conturul se realizează dintr-un electrod continuu. În cazul cînd condiţiile de contur sînt de forma

$$U = f(\bar{r}) \text{ sau } \frac{\partial U}{\partial n} = g(\bar{r})$$

conturul se realizează din mai mulţi electrozi, aşa cum se arată în figura 9.5.

Electrozii se confecţionează din cupru sau alamă. Nu este indicat să se folosească electrozi din materiale diferite în aceeaşi cuvă.

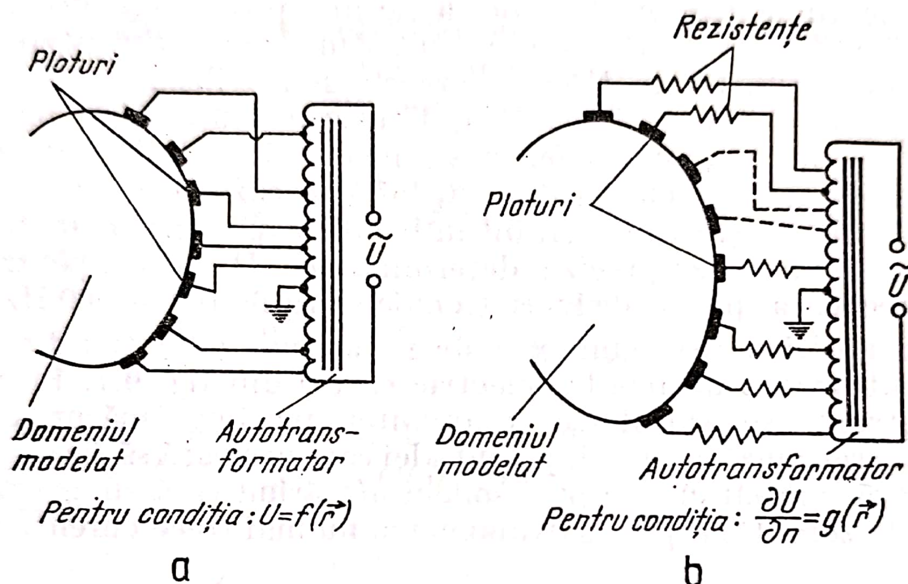


Fig. 9.5.

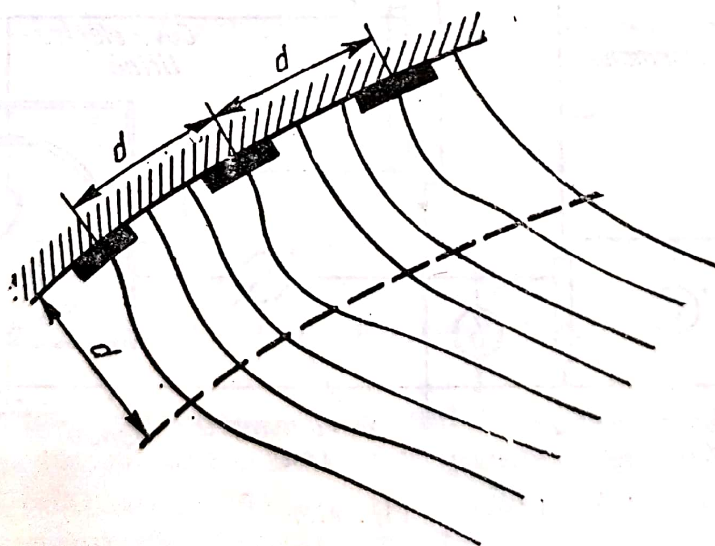


Fig. 9.6.

O problemă importantă în cazul contururilor cu electrozi este aceea a distanţei dintre electrozi. Practic se constată că în apropierea conturului are loc o distorsionare a liniilor de cîmp pe o distanţă d, măsurată de la contur şi egală cu pasul electrozilor (fig. 9.6).

Sînt probleme în care trebuie explorat spațiul din apropierea conturului. În asemenea cazuri pentru a reduce zona în care se distorsionează cîmpul, pasul electrozilor trebuie ales foarte mic. Distanța dintre electrozi nu poate fi micșorată prea mult deoarece în acest caz se realizează punți de trecere a curentului în sens transversal.

Alimentarea electrozilor se face de la rețeaua de curent alternativ prin intermediul unui autotransformator sau divizor de tensiune. Tensiunea maximă de lucru nu trebuie să depășească 40 V, atît din considerente de securitate, cît și pentru a se evita încălzirea electrolitului în zona cîmpului. Tensiunea de alimentare nu trebuie să fie nici prea mică, deoarece scade precizia determinărilor. Frecvența curentului de alimentare este, de regulă, cea obișnuită, 50 Hz. Uneori se recomandă utilizarea unor curenți de frecvență mare (1500 ... 3 000 Hz). Utilizarea curenților de frecvență mare înlătură într-o anumită măsură fenomenul de polarizare produs de componenta continuă a curentului, întîlnită în cazul frecvenței de 50 Hz. În același timp, crește considerabil influența capacităților distribuite ale instalației care afectează precizia determinărilor. De aceea, pentru instalațiile mari frecvența optimă de lucru trebuie să fie de 400 — 500 Hz.

Pentru poziționarea punctelor de un anumit potențial din domeniul studiat se utilizează un montaj electric ca cel din fig. 9.7. Prin reglarea potențiometrului se stabilește o anumită tensiune măsurată cu voltmetrul V_1, corespunzătoare echipotențialei care urmează să fie determinată. Se explorează cîmpul cu ajutorul sondei urmărind ca acul galvanometrului să vină la zero. Cînd prin galvanometru nu mai trece curent, rezultă că

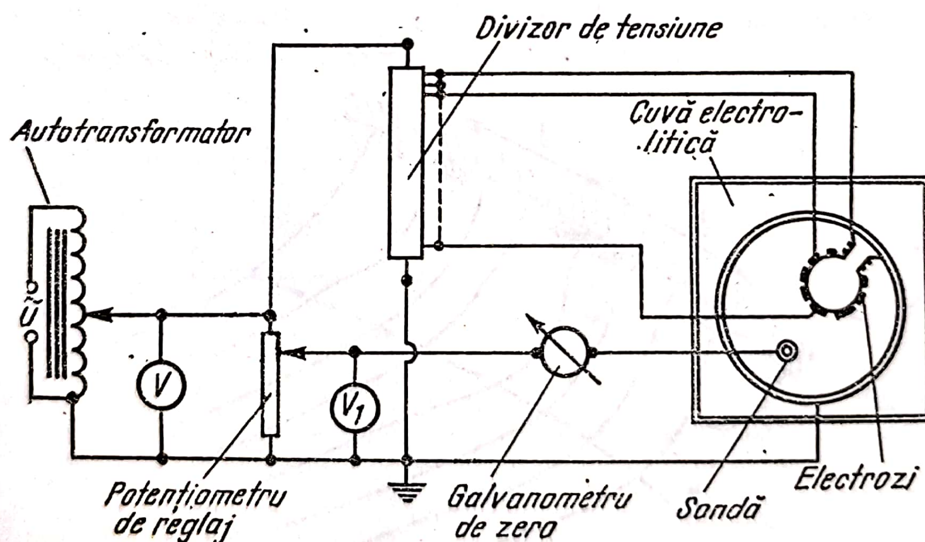


Fig. 9.7.

sonda se află într-un punct care are același potențial cu cel fixat pe potențiometru. Punctul respectiv se află deci pe echipotențiala căutată. În felul acesta se determină o serie de puncte de același potențial, a căror poziție se fixează pe planșe. Unind toate aceste puncte se obține echipotențiala căutată, care reprezintă locul geometric al punctelor din cîmp pentru care

Scanned with OKEN Scanner

funcţia de tensiune are aceeaşi valoare. Repetînd determinările şi pentru alte valori ale tensiunii se obţine spectrul echipotenţialelor din cîmpul studiat.

Înainte de a fi studiată o anumită problemă, în cuva electrolitică, este necesar să se facă o etalonare a instalaţiei, modelîndu-se o problemă simplă pentru care soluţia analitică exactă este cunoscută.

9.2.6. MODELAREA ELECTRICĂ A CÎMPULUI FIZIC PRIN CONSTANTE CONCENTRATE

Modelarea cîmpului de potenţial cu ajutorul constantelor electrice concentrate se bazează pe descrierea matematică a cîmpului cu ajutorul ecuaţiilor cu diferenţe finite. Modelul electric alcătuit dintr-un mediu continuu conductor se înlocuieşte în acest caz printr-o reţea electrică cu rezistenţe. Astfel dacă din mediul conductor se consideră un element de volum cu laturile Δx, Δy, Δz, rezistenţa electrică între două feţe paralele situate în lungul axei Ox, este

$$R_x = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta y \cdot \Delta z}. \tag{9.35}$$

De multe ori este comod să se lucreze cu mărimea inversă rezistenţei numită conductanţă [14] notată cu G. Prin urmare, relaţia (9.35) poate fi scrisă şi astfel

$$G_x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} = \gamma \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x}. \tag{9.36}$$

În mod asemănător poate fi scrisă conductanţa şi pe celelalte două direcţii

$$G_y = \gamma \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \quad G_z = \gamma \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z}. \tag{9.37}$$

unde γ reprezintă conductivitatea electrică.

În felul acesta, elementul de volum din mediul conductor considerat poate fi înlocuit printr-o serie de conductanţe legate, aşa cum se arată în fig. 9.8.

Conductanţa elementelor din schema de înlocuire se determină astfel încît conductanţa totală dintre două feţe paralele ale volumului considerat să corespundă relaţiilor (9.36) şi (9.37). Astfel pentru schema de înlocuire din fig. 9.8, a, conductanţa elementelor este

$$G_{ax} = \gamma \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\frac{\Delta x}{2}} = 2\,G_x, \quad G_{ay} = 2\,G_y, \quad G_{az} = 2\,G_z \tag{9.38}$$

iar pentru schema de înlocuire din fig. 9.8, b este

$$G_{bx} = \frac{1}{4} G_x \quad G_{by} = \frac{1}{4} G_y \quad G_{bz} = \frac{1}{4} G_z \tag{9.39}$$

unde cu G_x, G_y şi G_z s-a notat conductanţa totală pe direcţiile x, y şi z.

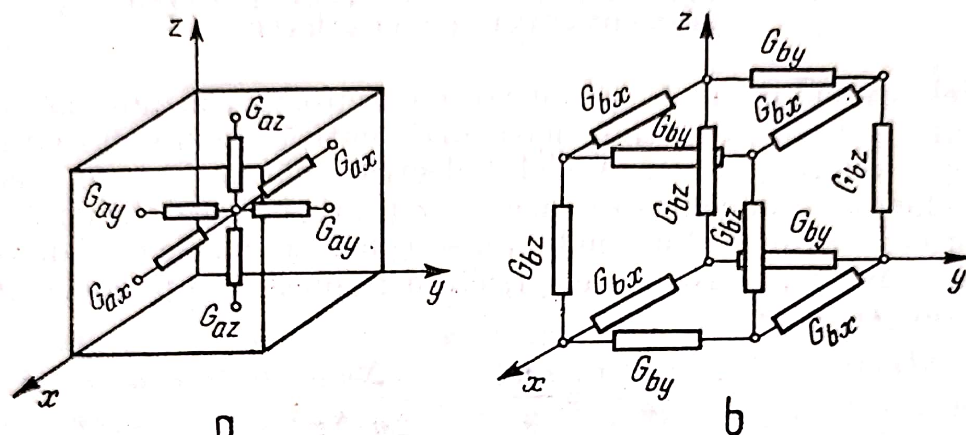


Fig. 9.8.

În cazul modelării cîmpului plan, reţeaua tridimensională se transformă într-o reţea plană. În fig. 9.9 sînt prezentate reţelele plane corespunzătoare celor două scheme de înlocuire din fig. 9.8. Conductanţa elementelor reţelei plane se determină din relaţiile (9.36) şi (9.37) punînd $\Delta z = h$. Astfel pentru elementele stratului plan se obţine

$$G_x = \gamma h \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma_s \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad G_y = \gamma_s \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{9.40}$$

unde $\gamma_s = \gamma\ h$ este conductivitatea specifică a stratului modelat. Pentru schema de înlocuire din fig. 9.9, a rezultă

$$G_{ax} = \gamma_s \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2}} = 2G_x, \quad G_{ay} = 2G_y \tag{9.41}$$

iar pentru schema din fig. 9.9, b se obţine

$$G_{bx} = \frac{1}{2} G_x, \quad G_{by} = \frac{1}{2} G_y. \tag{9.42}$$

De regulă, domeniul studiat se împarte într-o reţea de pătrate elementare avînd $\Delta x = \Delta y$. În felul acesta întreaga reţea plană se realizează din

conductanţe egale. În principiu este posibilă împărţirea domeniului în elemente de orice formă. Astfel pot fi realizate reţele la care nodurile sînt dispuse în vîrfurile unor triunghiuri echilaterale sau hexagoane.

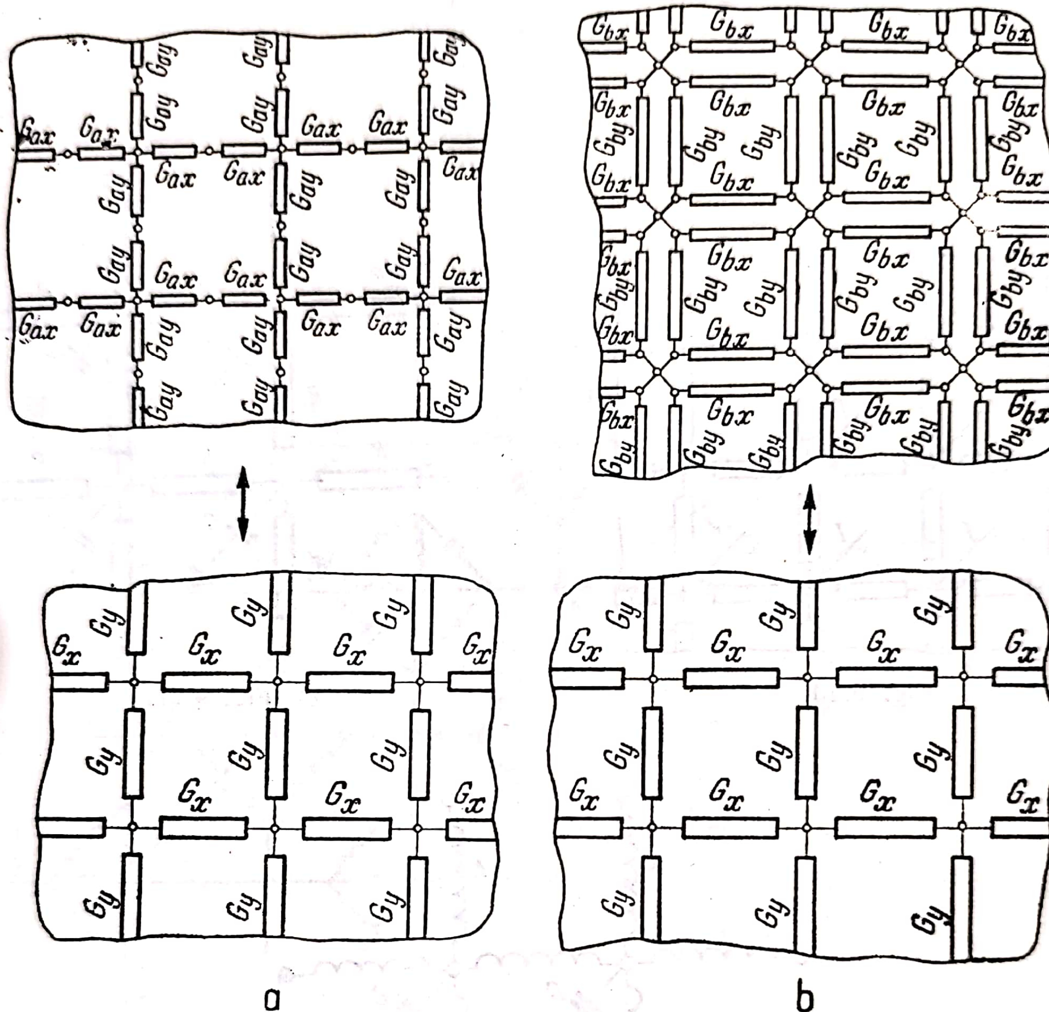


Fig. 9.9.

Conductanţele elementelor care alcătuiesc aceste reţele plane fiind egale, rezultă că distribuţia densităţii de curent este constantă în întreg domeniul (J = ct) şi deci

$$\nabla J = \nabla(\gamma \nabla U) = 0 \tag{9.43}$$

sau

$$\Delta U = 0. \tag{9.44}$$

Prin urmare, reţelele electrice cu constante concentrate pot fi folosite pentru modelarea cîmpurilor laplaceiene. Dacă în nodurile reţelei se introduc surse de curent (fig. 9.10), corespunzătoare unei anumite funcţii de distribuţie $f_1(x, y)$, reţeaua poate fi folosită pentru modelarea cîmpurilor descrise de ecuaţia lui Poisson

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma} f_1(x, y). \tag{9.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă nodurile reţelei alimentate cu surse de curent sînt puse la masă, prin intermediul unor capacităţi C (fig. 9.11), reţeaua va modela ecuaţia lui Fourier

$$\Delta U = C \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{9.46}$$

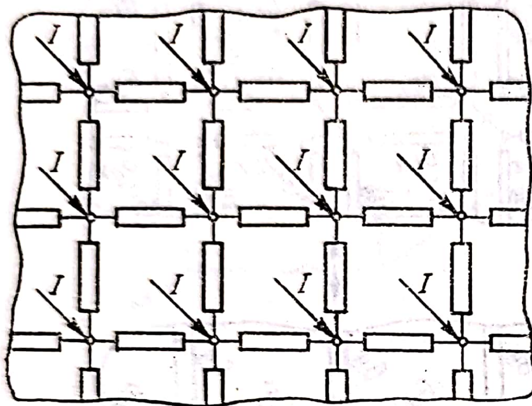


Fig. 9.10.

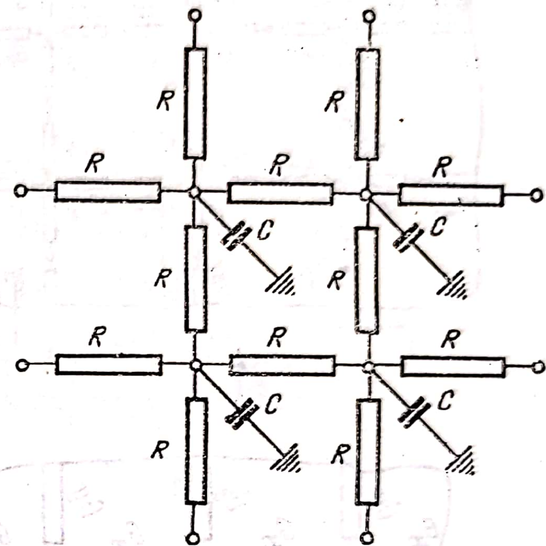


Fig. 9.11.

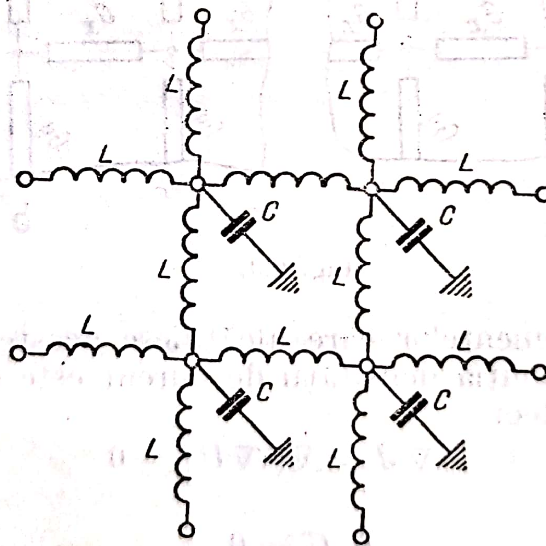


Fig. 9.12.

foarte importantă în problemele de transmisia căldurii. Utilizînd o reţea asemănătoare în care conductanţele sînt înlocuite prin reactanţe inductive L (fig. 9.12), poate fi modelată ecuaţia undelor

$$\Delta U = C \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{9.47}$$

Scanned with OKEN Scanner

În afara acestor rețele relativ simple, pentru soluționarea unor probleme, au fost concepute rețele mult mai complicate cu reactanțe. O asemenea rețea reactivă a fost construită de G. Kron [7] pentru modelarea stării de tensiune. Similitudinea se obține printr-o alegere specială a structurii rețelei, care în acest caz are diagonalele formate din elemente de inducție reciprocă (fig. 9.13) care modelează tensiunile normale și tangențiale prin

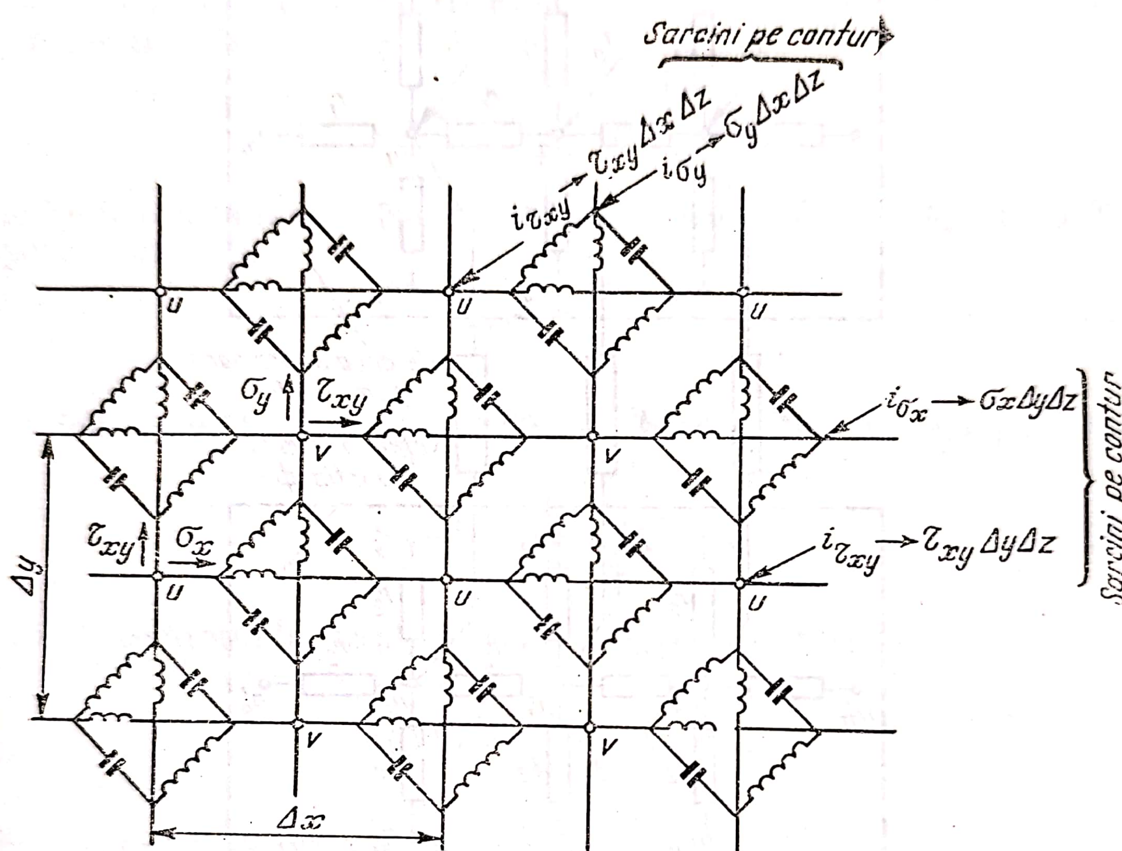


Fig. 9.13.

curenții i_σ și i_τ. Deplasările corpului în diferite puncte pe direcțiile x și y sînt modelate de tensiunile U_x și U_y.

Precizia determinărilor făcute cu aceste rețele reactive alimentate în curent alternativ la frecvențe înalte este relativ scăzută. De aceea, pentru modelarea stării de tensiune din corpuri au fost concepute rețele duble cu rezistențe ohmice care sînt mult mai simple și în același timp oferă o precizie mai ridicată.

După cum s-a arătat în cazul stării plane de tensiune, funcția de tensiune Φ, trebuie să satisfacă ecuația biarmonică (9.13) și condițiile de contur impuse problemei studiate, care pot fi scrise sub forma (9.22) sau (9.23). O ecuație asemănătoare este ecuația (9.15), care conține și membru drept, întîlnită în studiul plăcilor plane subțiri. Pentru modelarea electrică a ecuațiilor de forma (9.13) sau (9.15), cu condiții de contur, se folosește un sistem electric format din două rețele cu rezistori, legate în cascadă [10], [13]. Pentru modelare se consideră domeniul studiat împărțit printr-o

rețea de drepte în pătrate cu latura h. Nodurile acestei rețele coincid cu nodurile celor două rețele cu rezistori. Rețeaua superioară (fig. 9.14) este alcătuită din rezistorii r_1,iar cea inferioară din rezistorii r_2. Nodurile corespunzătoare celor două rețele sînt legate prin rezistorii R, de rezistență

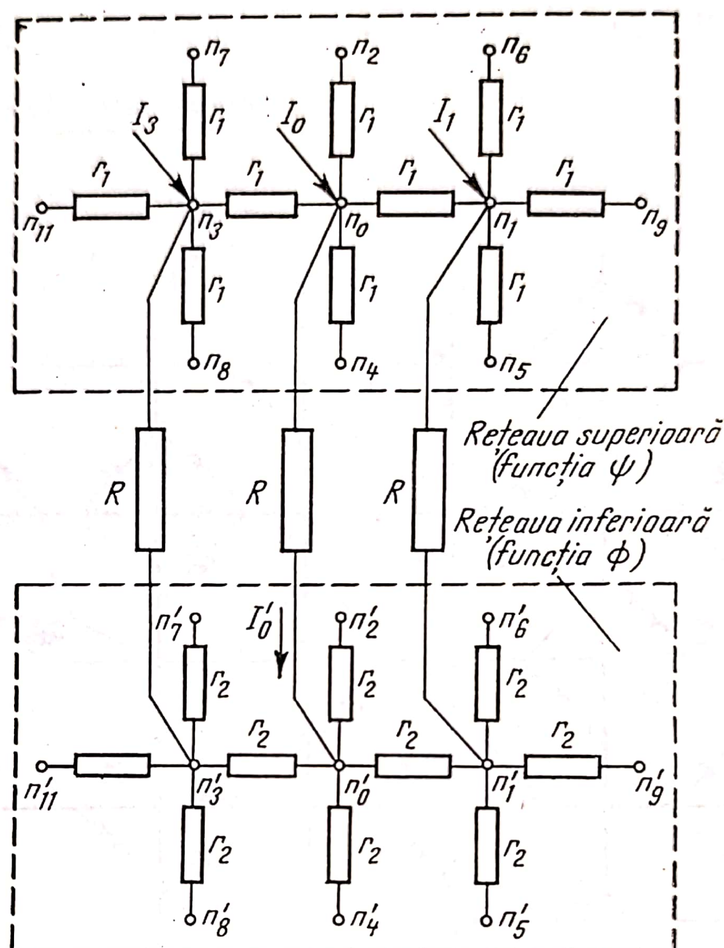


Fig. 9.14.

mult mai mare decît r_1 și r_2. Un nod oarecare n_0 din rețeaua superioară se alimentează cu curentul I_0, a cărui valoare se determină [10] cu relația

$$I_0 = -\frac{h^2 g_0}{r_1} \tag{9.48}$$

unde g_0 este o funcție cunoscută în nodul n_0. În felul acesta în rețeaua superioară se va modela o ecuație de tip Poisson de forma

$$\Delta \Psi = g. \tag{9.49}$$

Rețeaua inferioară va fi alimentată prin intermediul rezistorilor R. Curentul în nodul n'_0 va f [10]

$$I'_0 = -\frac{h^2 g'_0}{r_2} \tag{9.50}$$


Scanned with OKEN Scanner

unde g'_0 este, de asemenea, o funcţie cunoscută. În acest caz, reţeaua inferioară modelează o ecuaţie de forma

$$\Delta \Phi = g' \tag{9.51}$$

Valorile Ψ_0 şi Φ_0 determinate în nodurile celor două reţele sînt proporţionale cu potenţialele electrice ale acestor noduri, astfel încît curentul I'_0 mai poate fi scris

$$I'_0 = k \frac{\Psi_0 - \Phi_0}{R} \tag{9.52}$$

unde k este constantă de proporţionalitate. Deoarece $\Psi_0 \gg \Phi_0$ relaţia (9.52) se poate scrie

$$I'_0 \simeq k \frac{\Psi_0}{R}. \tag{9.53}$$

Înlocuind în (9.51) pe g'_0 din (9.50) şi ţinînd seama de (9.53) se obţine

$$\Delta\Phi = \frac{k}{h^2} \cdot \frac{r_2}{R} \Psi_0. \tag{9.54}$$

Aplicînd operatorul lui Laplace ecuaţiei (9.54) se obţine

$$\Delta(\Delta\Phi) = \frac{k}{h^2} \frac{r_2}{R} \Delta (\Psi)_0. \tag{9.55}$$

Ţinînd seama de (9.49) şi (9.48) rezultă

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{k}{h^4} \frac{r_2 r_1}{R} I_0. \tag{9.56}$$

Deci în cazul cel mai general reţeaua în cascadă rezolvă o ecuaţie de forma

$$\Delta \Delta \Phi = f \tag{9.57}$$

dacă nodurile reţelei superioare sînt alimentate cu curenţi ale căror valori se determină din expresia

$$I = \frac{R h^2}{r_1 r_2} f. \tag{9.58}$$

În cazul particular în care ecuaţia (9.57) nu are membru drept (cazul modelării stării plane de tensiune), nodurile din reţeaua superioară nu se alimentează cu curenţi. În acest caz se modelează condiţiile de contur,

prin aplicarea unor tensiuni corespunzătoare pe contururile celor două rețele. Măsurînd potențialele nodurilor din rețeaua inferioară se determină funcția de tensiune Φ în aceste noduri, iar apoi se calculează tensiunile cu relațiile (9.14) care în diferențe finite se scriu sub forma

$$(\sigma_x)_0 \approx \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}, \quad (\sigma_y)_0 \approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2},$$
$$(\tau_{xy})_0 \approx \frac{\Phi_5 - \Phi_6 + \Phi_7 - \Phi_8}{4\,h^2} \tag{9.59}$$

unde $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_8$ sînt valorile funcției de tensiune în nodurile $n'_0, n'_1, \ldots, n'_8$ din rețeaua inferioară (vezi fig. 9.14).

Rețelele în cascadă pot fi folosite și pentru studiul plăcilor plane subțiri. După cum s-a arătat, ecuația generală (9.15), a plăcilor plane

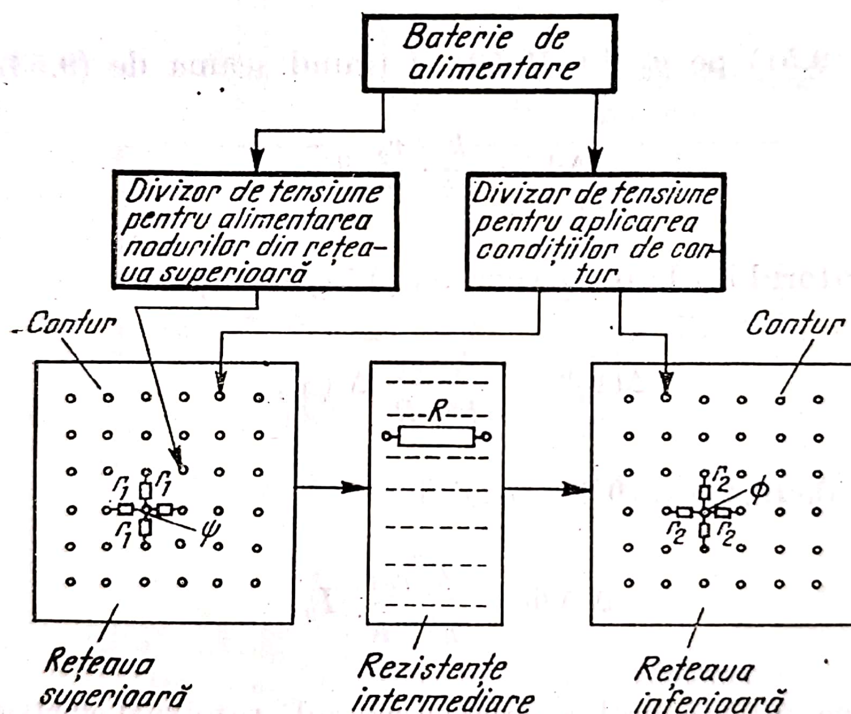


Fig. 9.15.

subțiri se descompune în două ecuații (9.17) de tip Poisson. Rezolvarea acestor ecuații se face cu ușurință cu ajutorul rețelelor în cascadă, unde atît săgeata w cît și momentul M sînt nule pe contur. Pentru aceasta se realizează o primă condiție de contur ($M = 0$), în rețeaua superioară unde nodurile de pe contur se scurtcircuitează și se leagă la masă. În același timp, nodurile rețelei superioare sînt alimentate cu curenți proporționali cu rezultanta încărcării, corespunzătoare nodului respectiv [15]

$$I_i = k_i\, p_i h^2. \tag{9.60}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cea de-a doua condiţie de contur ($w = 0$) se realizează în reţeaua inferioară prin scurtcircuitarea conturului şi legarea la masă. În felul acesta potenţialele nodurilor din reţeaua superioară vor fi proporţionale cu momentele M din punctele corespunzătoare ale plăcii, iar potenţialele din nodurile reţelei inferioare vor fi proporţionale cu săgeţile w, ale plăcii în aceleaşi puncte.

Schema de principiu a instalaţiei folosite pentru determinarea experimentală a stării de tensiune, în probleme în care intervin ecuaţii diferenţiale de forma (9.13) sau (9.15), este prezentată în figura 9.15.

6.3. APLICAŢII

În aplicaţiile care urmează se prezintă cîteva exemple de utilizare a analogiilor electrice pentru studiul stării de tensiune. Exemplele alese sînt relativ simple şi se referă la probleme inginereşti care se rezolvă mai greu prin folosirea altor metode (analitice sau experimentale). Aplicaţiile sînt prezentate într-o formă succintă, insistîndu-se mai mult asupra detaliilor tehnice care să servească celor interesaţi în utilizarea acestei metode.

Aplicaţii. 1°. Studiul stării de tensiune în secţiunea unui arbore de motor [17]. În acest exemplu se studiază starea de tensiune produsă de un moment de torsiune în secţiunea manetonului unui arbore cotit. Manetonul este conceput ca un arbore circular găurit excentric, străbătut de o serie de canale radiale pentru ungere. Studiul stării de tensiune s-a făcut într-o secţiune care conţine şi un canal radial de ungere (fig. 9.16), folosind metoda analogiei electrice de potenţial.

Domeniul modelat (fig. 9.16), fiind simplu conex, funcţia de tensiune Φ, este aleasă ca suma a două funcţii [4], [15]

$$\Phi = \Psi + F \qquad (9.61)$$

definite astfel

$$\Psi = -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2) \qquad (9.62)$$

unde x şi y sînt coordonatele punctului considerat din secţiune.

Funcţia F este o funcţie de potenţial, care satisface ecuaţia lui Laplace

$$\Delta F = 0 \qquad (9.63)$$

şi condiţiile de contur

$$(F)_c = -(\Psi)_c.$$

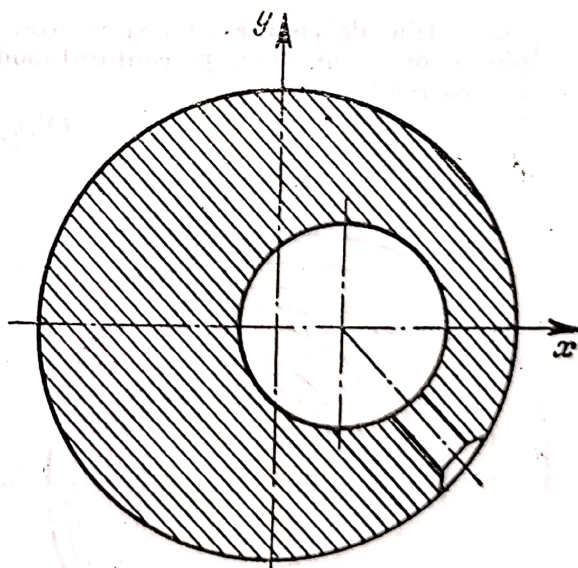


Fig. 9.16.

Funcţia de potenţial F a fost determinată prin modelarea cîmpului de tensiune într-o cuvă electrolitică. În acest scop s-a folosit o cuvă cu dimensiunile 80×80 cm², avînd electrolit apa de robinet.

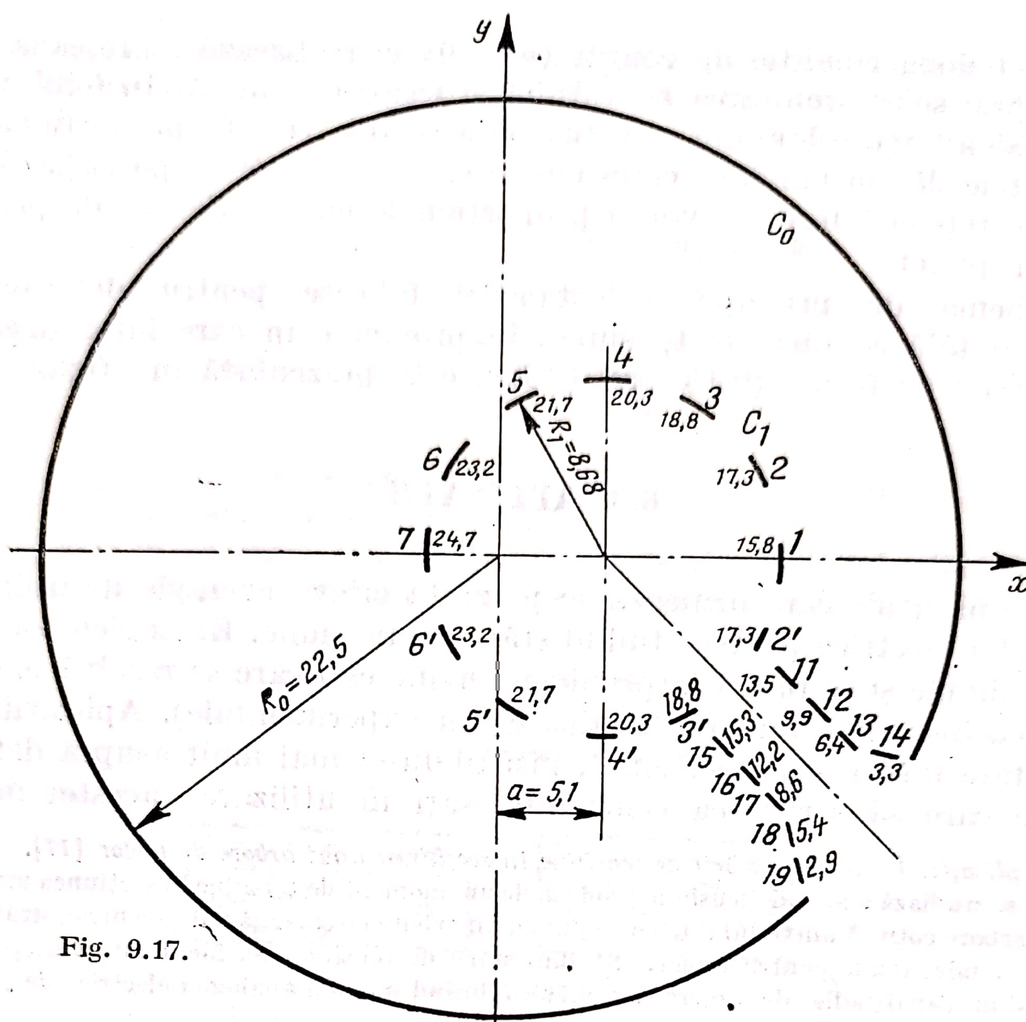


Fig. 9.17.

Condițiile de contur au fost realizate prin aplicarea unor tensiuni prin intermediu unor ploturi de alamă fixate pe conturul modelului (fig. 9.17). Valorile acestor tensiuni au fost calculate cu relația

$$(V_i)_c = k(\Psi_i)_c \tag{9.64}$$

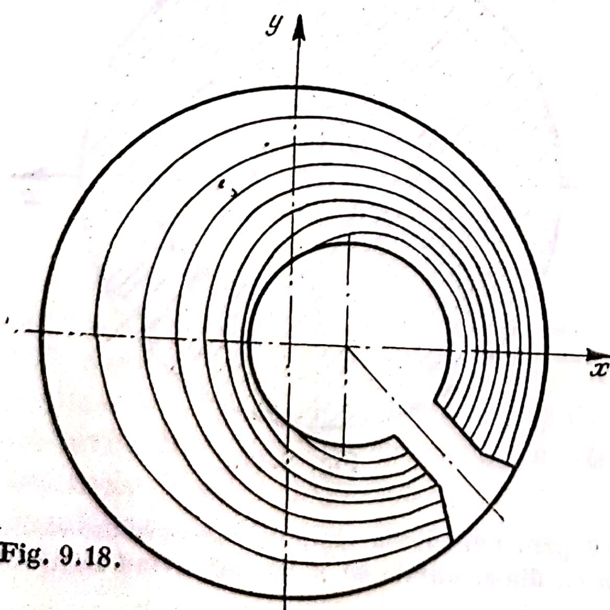


Fig. 9.18.

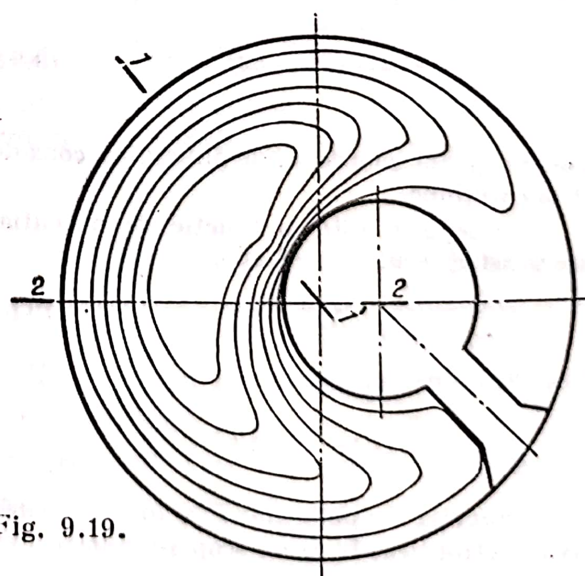


Fig. 9.19.

Scanned with OKEN Scanner

unde k este factor de scară, iar $(\Psi'_i)_c$ se calculează cu expresia (9.62), înlocuind coordonatele punctelor respective de pe contur.

În figura 9.17 s-a notat valoarea tensiunii aplicate pe fiecare plot. După cum se observă tensiunile aplicate au fost cuprinse între zero și 30 V. Alimentarea instalației s-a făcut de la rețeaua de curent alternativ 220 V și 50 Hz, prin intermediul unui autotransformator, folosind montajul electric din figura 9.7. Tensiunile aplicate pe ploturi au fost realizate cu ajutorul unui divizor de tensiune. Trasarea curbelor echipotențiale care reprezintă locul geometric al punctelor în care funcția F are aceeași valoare, s-a făcut prin puncte, stabilind valoarea potențialului căutat cu ajutorul potențiometrului de reglaj. Tensiunile au fost măsurate cu un voltmetru electronic, iar pentru stabilirea punctelor de potențial constant s-a folosit ca instrument de zero un microampermetru. Curbele echipotențiale trasate, sînt prezentate în figura 9.18.

Funcția de tensiune Φ, s-a obținut prin însumarea algebrică a valorilor funcției determinate F și funcției Ψ', în diferite puncte. În acest scop funcția Ψ' dată de relația (9.62) a fost reprezentată la scară cu șablon. Curbele rezultate din însumarea celor două funcții sînt prezentate în figura 9.19.

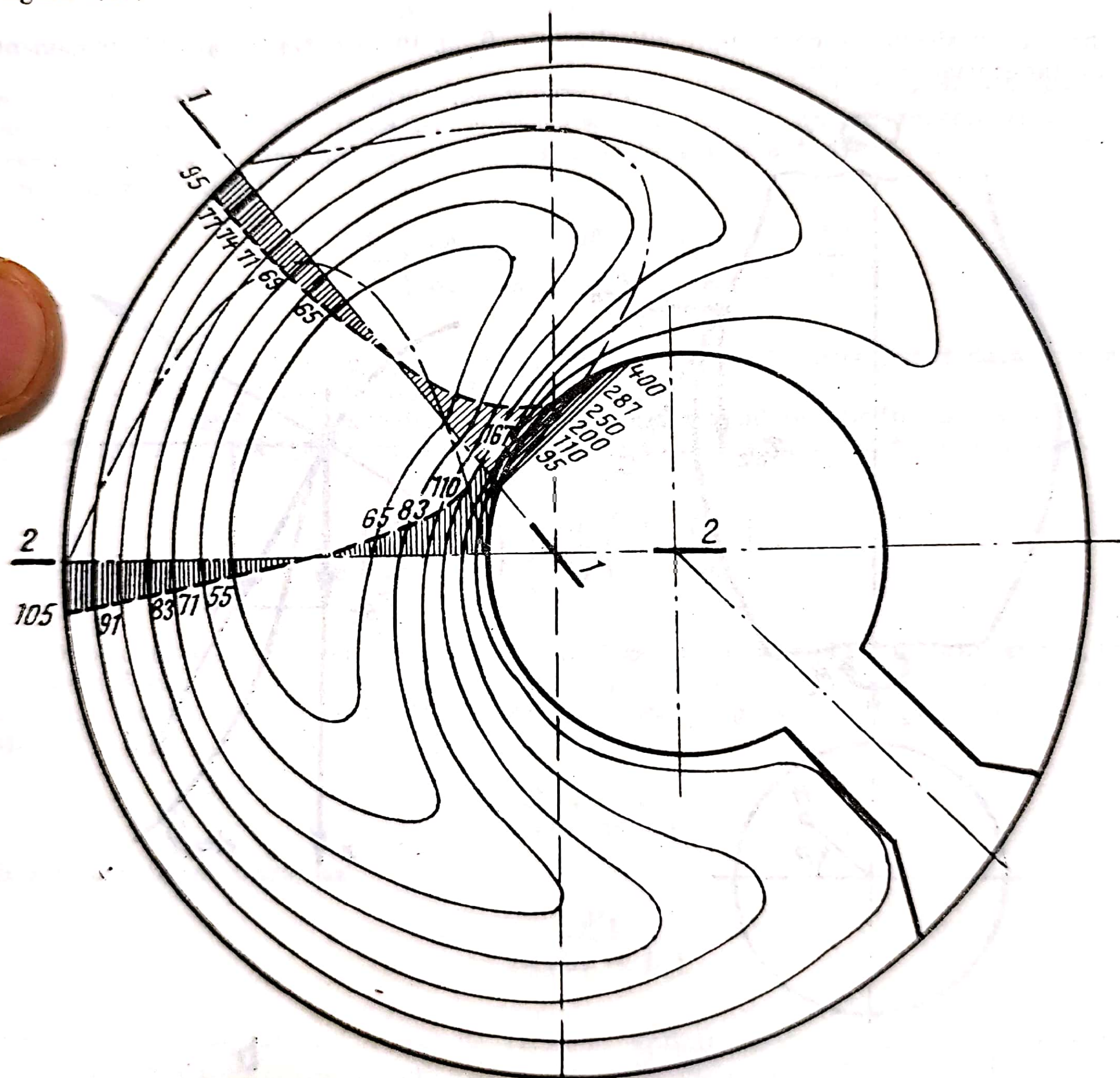


Fig. 9.20.

Utilizînd aceste curbe, prin derivare, s-au determinat tensiunile tangențiale în diferite puncte din secțiune. În figura 9.20 se prezintă variația tensiunilor tangențiale exprimate în daN/cm², pe direcția a două raze. Direcția razei *1—1* a fost aleasă să treacă prin zona în care gradientul tensiunilor este maxim.

2°. *Determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor într-o bară cu secțiune variabilă solicitată la torsiune* [8]. Arborii de transmisie utilizați în construcția de mașini, de multe ori,

Scanned with OKEN Scanner

din motive funcționale, trebuiesc proiectați cu secțiunea variabilă în lung. În condițiile în care momentul de torsiune transmis rămîne constant, în zonele de variație a secțiunii se produce o concentrare a tensiunilor tangențiale. În multe cazuri tensiunile maxime care apar într-un astfel de concentrator depășesc cu mult valorile admisibile prescrise, punînd în pericol funcționarea mașinii respective. De aceea este necesar ca, pentru calculele de verificare, să se cunoască valorile tensiunilor tangențiale în zona concentratorului. Utilizarea metodei analitice de calcul pentru determinarea acestor tensiuni conduce la formulări matematice foarte complicate. În aceste condiții metodele experimentale își dovedesc din nou utilitatea, conducînd la soluții suficient de precise.

În cazul torsiunii unei bare circulare cu secțiune variabilă, ecuațiile de echilibru și de deformații [20], conduc la următoarea ecuație de compatibilitate

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{\theta z}) = 0, \qquad (9.65)$$

scrisă pentru un sistem de coordonate cilindrice (r, θ, z), în care $\tau_{r\theta}$ și $\tau_{\theta z}$ sînt componentele tensiunii tangențiale τ (fig. 9.21 a),

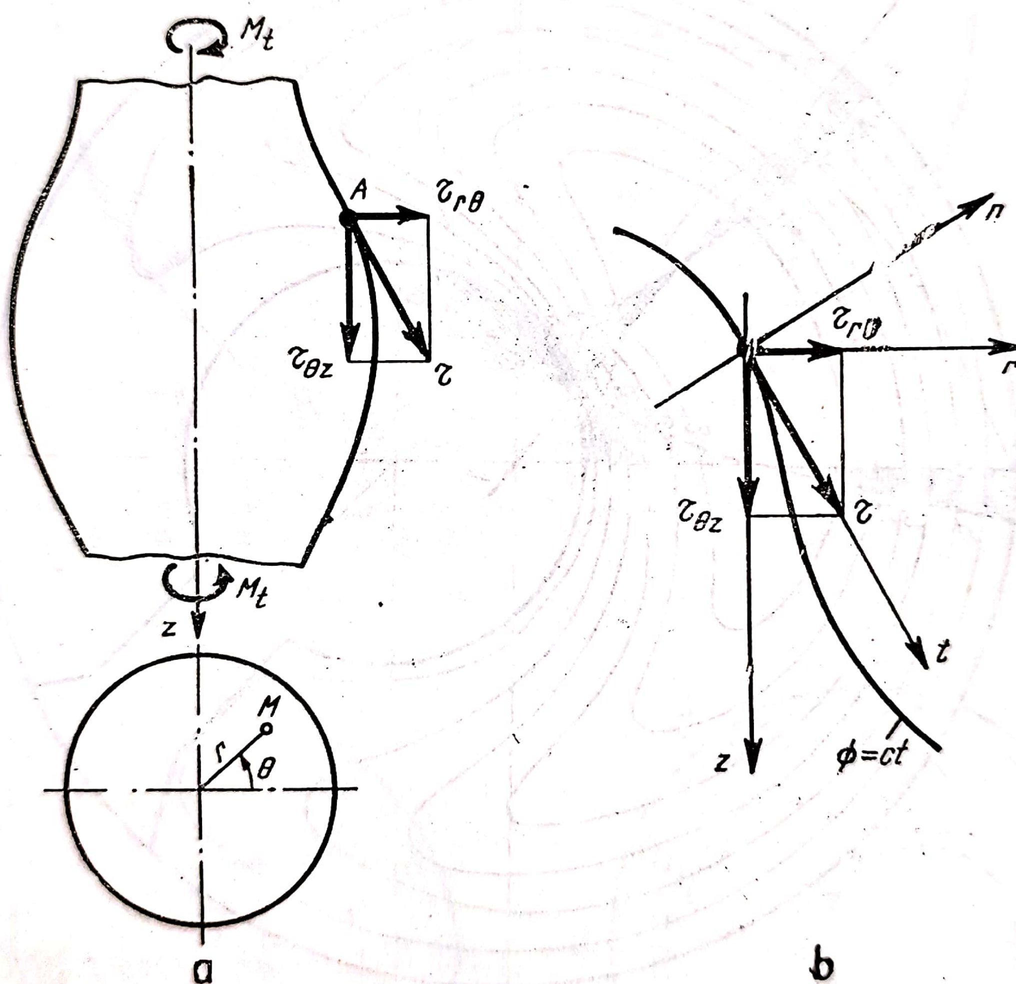


Fig. 9.21.

Se poate considera că ecuația (9.65) este satisfăcută de o funcție de eforturi $\Phi(r,z)$, astfel că

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \qquad (9.66)$$

Această funcţie definită în domeniul considerat, trebuie să satisfacă următoarele condiţii :
— să verifice ecuaţia de compatibilitate (9.65), adică

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=0, \tag{9.67}$$

— să satisfacă condiţia de contur.
În absenţa unor forţe exterioare aplicate pe suprafaţa laterală a barei, tensiunea tangenţială τ este dirijată după direcţia tangentei la contur (fig. 9.21, a).
Deci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=0. \tag{9.68}$$

Funcţia de tensiune $\Phi(r, z)$ este prin urmare constantă în lungul secţiunii longitudinale. Ţinînd seama de ecuaţia (9.67), rezultă că $\Phi(r, z)$ este o soluţie a acestei ecuaţii, reprezentînd o familie de curbe de tensiune constantă, la care tensiunea tangenţială τ este tangentă (fig. 9.21, b). În acest caz se poate scrie

$$\tau=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}n}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}. \tag{9.69}$$

Rezultă deci că tensiunea tangenţială τ poate fi determinată în orice punct dacă se cunoaşte variaţia funcţiei Φ după direcţia normalei.

Dacă în ecuaţia (9.34) care defineşte cîmpul de potenţial electric în cazul unui conductor cvasiplan, se face ca grosimea mediului conductor să varieze după legea $h = k/x^3$ (unde k = ct), se obţine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0. \tag{9.70}$$

După cum se observă ecuaţia (9.70) este analogă cu ecuaţia (9.67) şi, prin urmare, funcţia de tensiune Φ poate fi determinată folosind analogia electrică de cîmp. Cunoscînd funcţia de tensiune în diferite puncte, se poate calcula tensiunea tangenţială în aceste puncte folosind relaţia

$$\tau=\frac{K}{\lambda^3}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} \tag{9.71}$$

unde λ este factor de scară, iar

$$K=\frac{M_t}{2\pi(U_1-U_2)}. \tag{9.72}$$

În expresia (9.72) M_t este momentul de torsiune aplicat barei, iar U_1 şi U_2 sînt tensiunile corespunzătoare la două curbe echipotenţiale vecine. Studiul s-a făcut pentru cazul unui arbore cu secţiunea variabilă de la D = 420 mm la d = 340 mm, racordarea fiind realizată cu o rază r = 40 mm. Funcţia de tensiune a fost determinată prin modelarea secţiunii longitudinale a arborelui într-o cuvă electrolitică cu dimensiunile 80 × 80 cm² folosind electrolit apa de robinet. Modelul electric avînd aceeaşi formă de contur ca şi secţiunea longitudinală a arborelui a fost realizat din electrolit cu grosimea variabilă. În acest scop s-a folosit o piesă prelucrată din lemn cu grosimea variabilă după legea $h = \frac{k}{x^3}$, care a fost impregnată cu parafină şi fixată în cuvă. Secţiunea longitidinală a concentratorului fiind simetrică, modelul electric s-a făcut

numai pentru jumătate (pînă la ax). Conturul exterior și axa longitudinală au fost modelate prin electrozi continui de alamă (fig. 9.22). Conturul exterior s-a legat la masă, iar pe celălalt electrod s-a aplicat o tensiune de 40 V. Montajul general folosit pentru trasarea curbelor echipo-

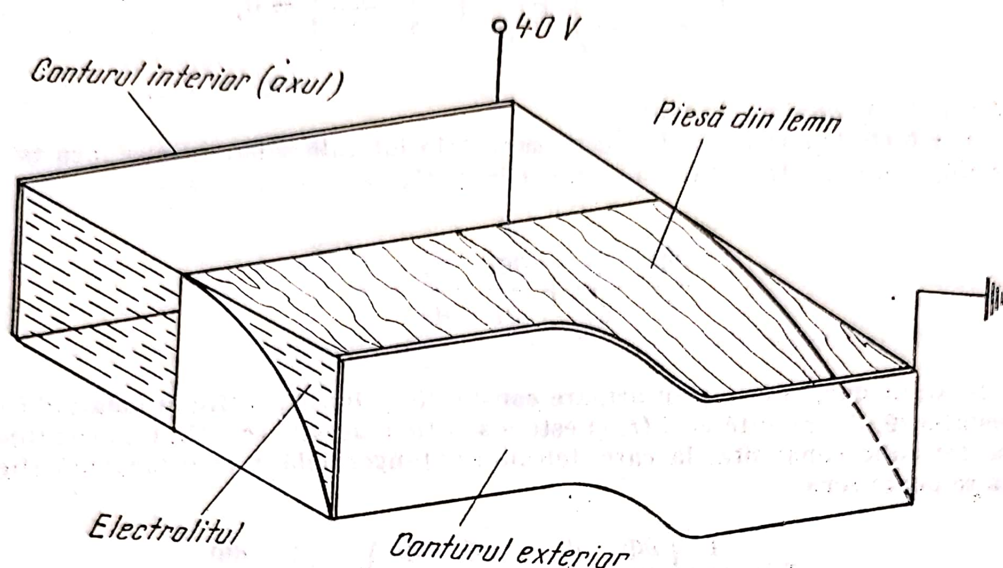


Fig. 9.22.

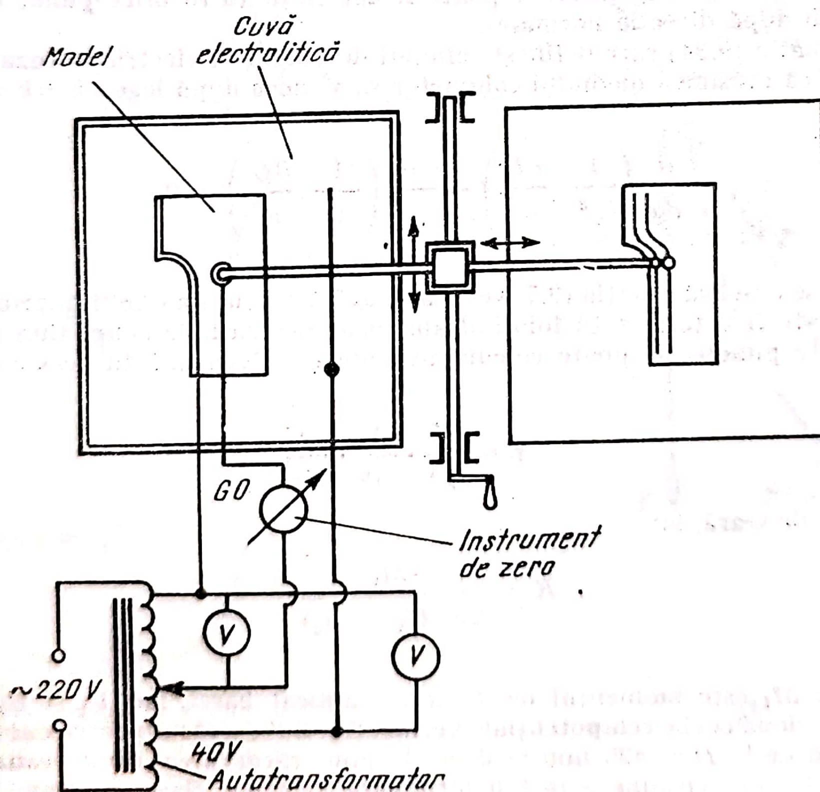


Fig. 9.23.

tențiale este prezentat în figura 9.23. În figura 9.24 sînt prezentate curbele echipotențiale trasate pentru tensiuni cuprinse între zero și 25 V. Folosind aceste determinări, cu ajutorul relației (6.66) au fost calculate tensiunile tangențiale. Variația tensiunilor tangențiale maxime (la periferia arborelui) în lungul zonei cu concentrator este prezentată în fig. 9.25.

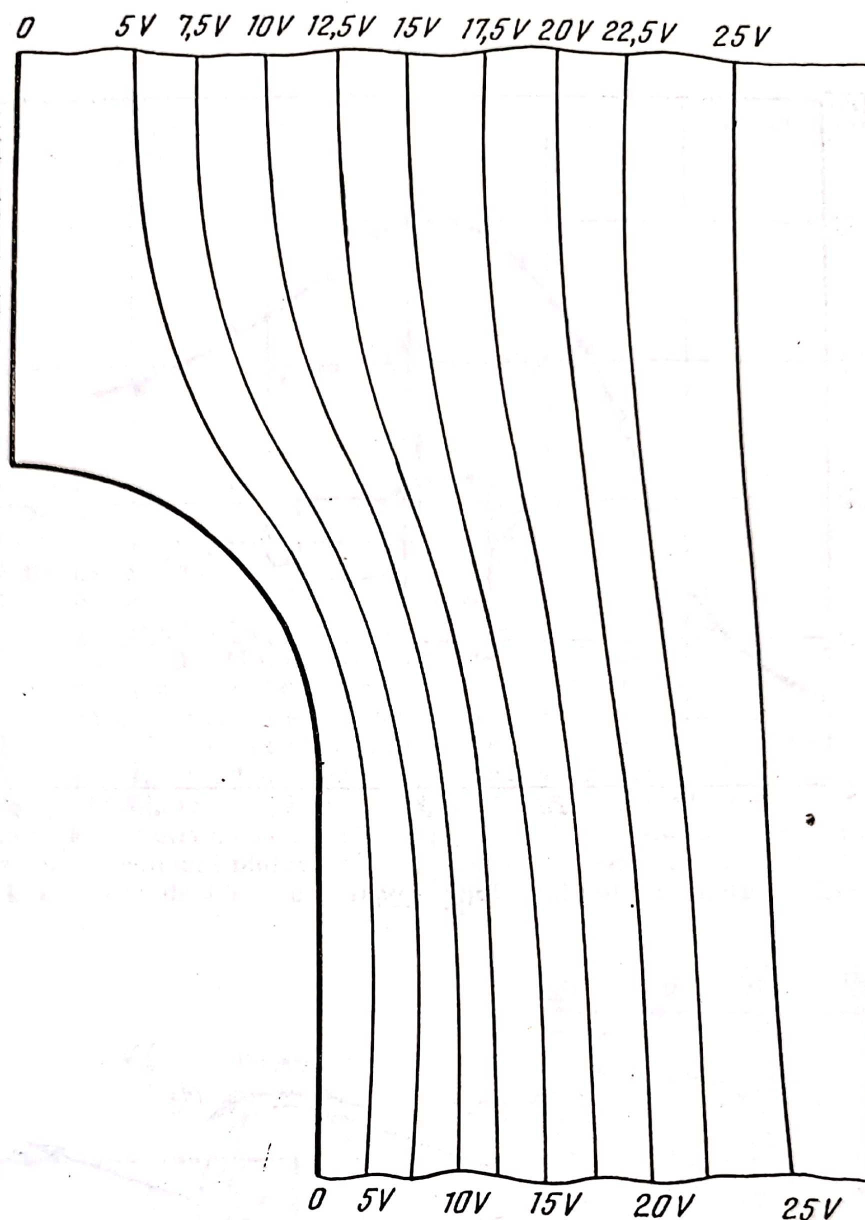


Fig. 9.24

Coeficientul de concentrare a tensiunilor, calculat pe baza determinărilor făcute, a rezultat $\alpha = 1{,}37$. Pentru acelaşi caz, din diagramele date în literatura de specialitate [12], rezultă valoarea $\alpha = 1{,}32$.

3°. *Studiul torsiunii barelor cu secţiune dreptunghiulară* [9]. În cazul torsiunii barelor cu secţiune necirculară, potrivit teoriei lui Saint Venant, cîmpul tensiunilor din secţiune este caracterizat de o funcţie de tensiune $\Phi(z, y)$. Această funcţie satisface următoarele condiţii:

— verifică ecuaţia lui Poisson

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \qquad (9.73)$$

unde z şi y sînt coordonatele unui punct curent din secţiune (fig. 9.26);

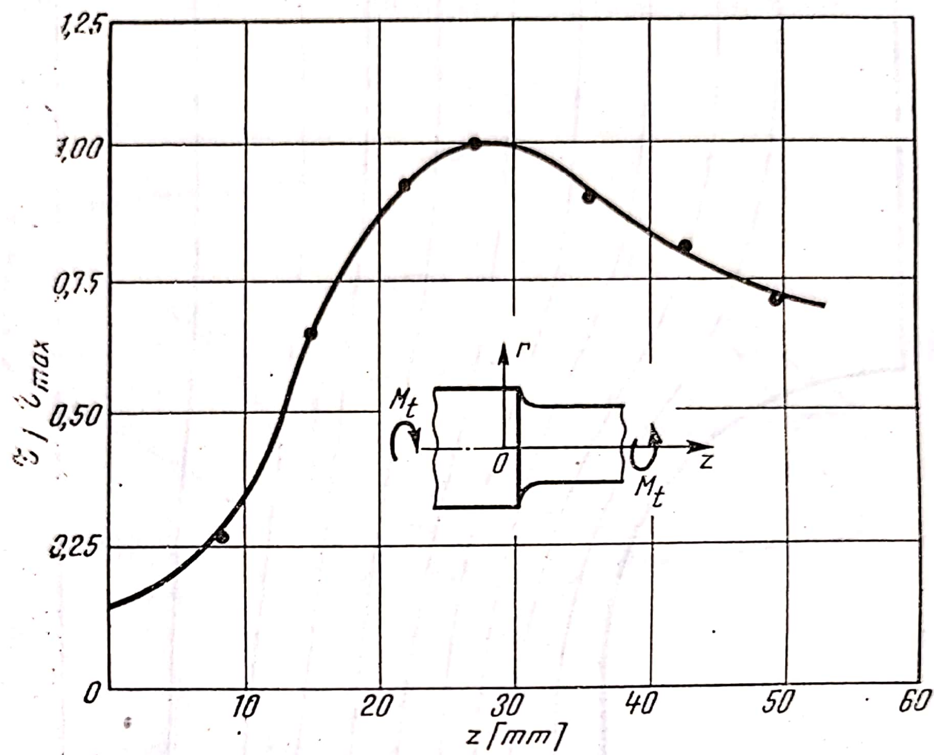


Fig. 9.25

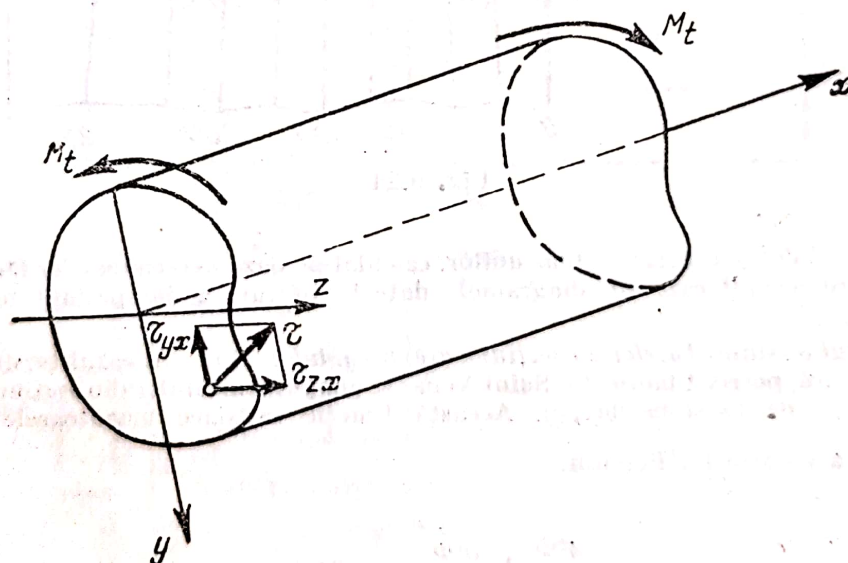


Fig. 9.26.

— satisface condiția de contur

$$(\Phi)_c = \text{ct.} \tag{9.74}$$

De regulă în calcule, valoarea funcției pe contur se ia egală cu zero. Cunoscînd funcția de tensiune $\Phi(z, y)$, tensiunile tangențiale se obțin prin derivare [20]

$$\tau = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}, \tag{9.75}$$

sau

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{9.76}$$

Ecuația (9.73) este analogă cu ecuația (9.45) care caracterizează cîmpul potențialului electric într-o rețea cu rezistori, alimentată în noduri cu curenți. Funcția de tensiune $\Phi(z, y)$ fiind modelată de funcția de potențial electric U, va putea fi determinată prin măsurarea potențialelor electrice din noduri. În acest scop a fost concepută o rețea cu rezistori, cu ajutorul căreia s-a modelat un sfert din secțiunea unei bare cu secțiune dreptunghiulară cu raportul laturilor egal cu 3/4, solicitată la torsiune (fig. 9. 27, a). Rețeaua electrică (fig. 9.27, b) cu care s-a modelat domeniul studiat a fost alcătuită dintr-un număr de 12 ochiuri și 20 de noduri. Între două noduri vecine s-a legat un rezistor cu rezistența $R = 100\ \Omega$. Ținînd seama de simetrie, între nodurile situate pe cele două axe Oz și Oy s-au legat rezistori cu rezistența $2\ R = 200\ \Omega$. Nodurile din interiorul rețelei (*2, 5, 8, 3, 6, 9*) au fost alimentate cu un curent $I = 4$ mA, în timp ce nodurile de pe axe (*1, 4, 7, 11, 12*), ținînd, de asemenea, seama de simetrie, au fost alimentate cu un curent cu intensitatea pe jumătate $I_1 = 2$ mA. Nodul *10*, din originea sistemului de referință a fost alimentat, din aceleași motive, cu curentul $I_{10} = I/4 = 1$ mA. Condiția de contur $(\Phi)_c = 0$ a fost realizată prin scurtcircuitarea ploturilor de pe contur și legarea lor la masă. Alimentarea rețelei s-a făcut de la o baterie de 4,5 V, prin intermediul unui potențiometru. Alimentarea nodurilor

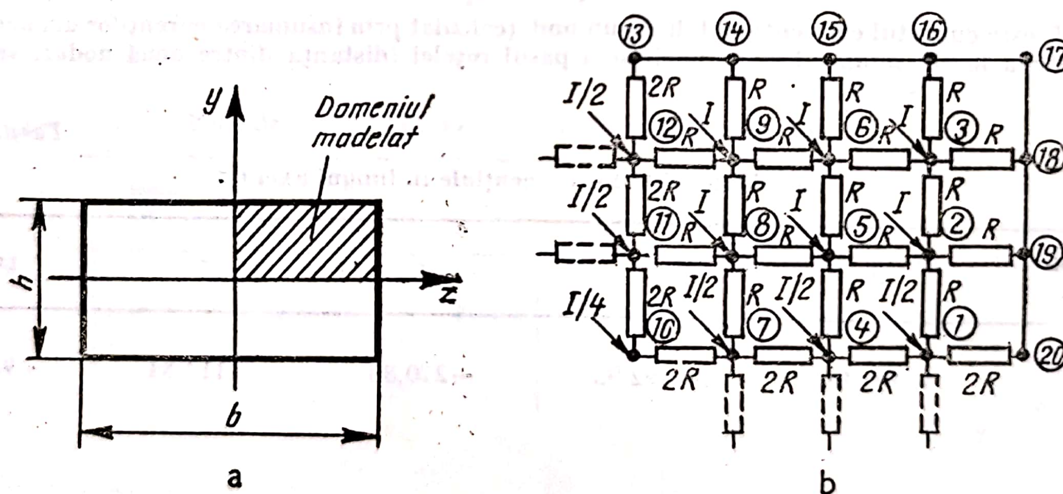


Fig. 9.27.

nu s-a putut face simultan, de aceea s-au alimentat pe rînd măsurîndu-se diferențele de potențial dintre fiecare nod și masă, iar apoi, s-au însumat, determinîndu-se potențialul fiecărui nod. Măsurarea diferențelor de potențial dintre noduri și contur, s-a făcut folosind montajul electric din figura 9.28. Pentru determinarea potențialului într-un nod, se fixează sonda în nodul respectiv și se reglează potențiometrele P_1 și P_2 pînă cînd curentul care trece prin instrumentul de zero (G0) devine egal cu zero. În acest moment se notează tensiunea indicată de milivoltmetru, care este egală cu diferența de potențial dintre nodul respectiv și masă.

Scanned with OKEN Scanner

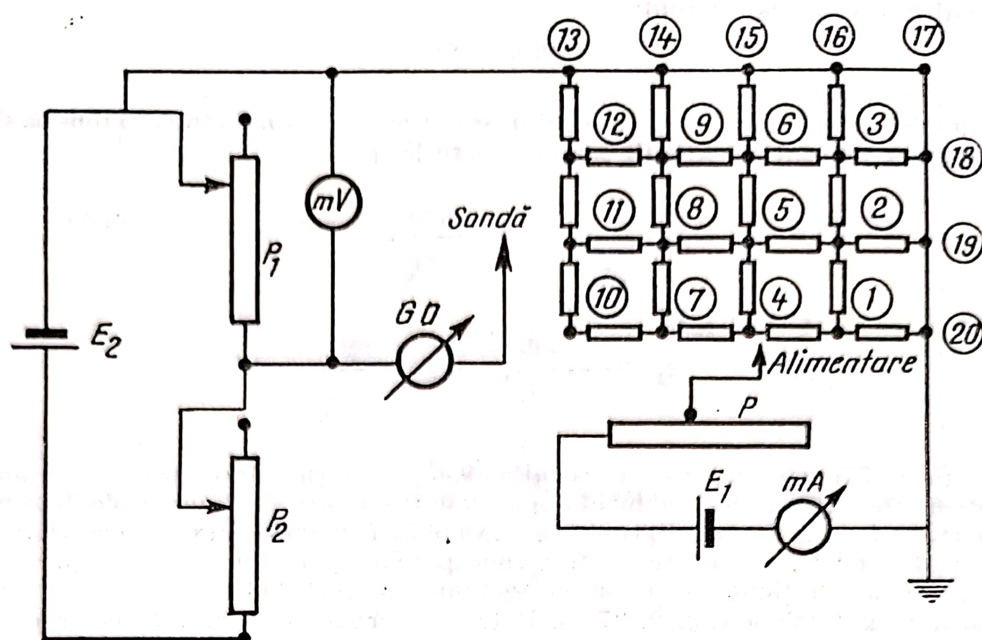


Fig. 9.28.

Cunoscînd potențialul fiecărui nod, funcția de tensiune, în aceste puncte, s-a calculat cu relația

$$\Phi_i = kU_i = \frac{2\,G\,\theta\,h^2}{R\,I_i}\,U_i, \tag{9.77}$$

unde I este curentul convențional dintr-un nod, (calculat prin însumarea curenților din noduri și împărțirea lor la numărul de noduri) și h pasul rețelei (distanța dintre două noduri vecine).

Tabelul 9.2

Valorile tensiunilor tangențiale în lungul axei *Oz*

Nodul nr.	20	1	4	7	10
$\tau_{xy}\dfrac{k}{h}$	−799,18	−492,92	−270,86	−114,84	−9,56

Valorile tensiunilor pe contur și

Nordul nr.	19	18	17	2	3
$\tau_{xz}\dfrac{k}{h}$	—	—	—	117,46	281,27
$\tau_{yz}\dfrac{k}{h}$	−746	−504,38	—	−437,31	−282,44

Potențialele măsurate în noduri și valorile funcției de tensiune

Tabelul 9.1

Nodul nr.	Curentul de alimentare [mA]	Tensiunea măsurată [mV]	$\Phi_i = kU_i$
1	2,0	638,30	374,0
2	4,0	580,40	340,0
3	4,0	385,50	226,0
4	2,0	1013,90	594,0
5	4,0	911,60	534,0
6	4,0	592,20	347,0
7	2,0	1202,30	704,0
8	4,0	1080,55	635,0
9	4,0	689,50	404,0
10	1,0	1261,50	739,0
11	2,0	1126,10	659,0
12	2,0	721,40	423,0

Tabelul 9.3

Valorile tensiunilor tangențiale în lungul axei Oy

Nodul nr.	13	12	11	10
$\tau_{xy}\frac{k}{h}$	895,55	555,15	262,15	16,55

Tabelul 9.4

în interiorul secțiunii

16	5	6	15	8	9	14
498,66	201,56	446,52	747,15	251,54	535,43	848,43
—	−239,56	−142,54	—	−104,8	− 59,38	—

Pentru determinarea expresiei funcţiei Φ, s-a folosit formula lui Newton de interpolare. Cunoscînd expresia funcţiei de tensiune $\Phi(z, y)$, au fost determinate tensiunile τ_{zx} şi τ_{yx} cu ajutorul relaţiilor (9.76).

Potenţialele măsurate în noduri şi valorile corespunzătoare ale funcţiei de tensiune sînt date în tabelul 9.1. Pe baza acestor determinări s-au calculat tensiunile tangenţiale în lungul celor două axe (tabelele 9.2 şi 9.3) precum şi pe contur şi în interiorul secţiunii (tabelul 9.4).

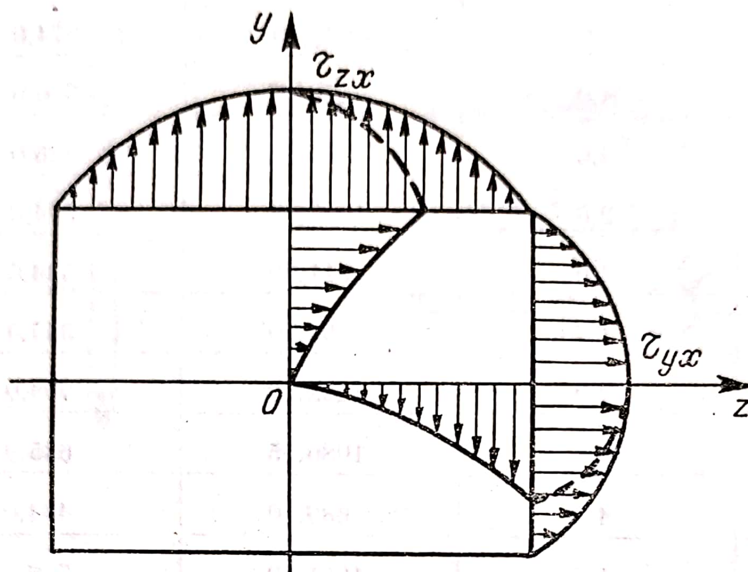


Fig. 9.29.

Valorile tensiunilor obţinute experimental au fost comparate cu cele rezultate din calcul prin aplicarea metodei analitice. Diferenţa dintre valorile determinate experimental şi cele calculate a fost sub 3 %. Pe baza datelor din aceste tabele au fost trasate curbele din fig. 9.29.

BIBLIOGRAFIE

1. BOIANGIU, D., NICOLAU, E., NIŢA, C., *Instrumente, dispozitive şi maşini matematice*, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.
2. BUZDUGAN, GH., *Rezistenţa materialelor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1974.
3. BUZDUGAN, GH., FETCU, L., RADES, M., *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1975.
4. BIEZENO, C. G., KOCH, J.J., *Ueber einige Beispiele zur elektrischen Spannungebestimmung*, Ingenieur Archiv. IV Band, 1933.
5. CIORANESCU, N, (BADESCU, R.), *Tratat de matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.
6. CRANZ, H., *Experimentelle Lösung von Torsionsaufgaben Ingenieur*, Archiv. IV Band, 1933.
7. HETÉNYI, M., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, London, 1963.

8. ILIESCU, N., *Determinarea coeficientului de concentrare a eforturilor unitare tangenţiale în barele supuse la torsiune*, Cercul de Mecanică Tehnică, Institutul Politehnic Bucureşti, 1967.
9. ILIESCU, N., BRATU, ST., *Studiul eforturilor unitare în bara de secţiune dreptunghiulară supusă la torsiune, prin analogia cu reţelele electrice*, Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, tomul XXVI – fascicula 1, 1964.
10. LIEBMAN, G., *The Solution of Plane Stress Problems by an Electrical Analogique Method*, Brit. Journal of Applied Physics, vol. 6, nr. 5, 1955.
11. * * *, *Manualul inginerului*, vol. I, Editura tehnică, Bucureşti, 1965.
12. NĂDĂŞAN, ST. ş.a., *Oboseala metalelor*, Bucureşti, Editura tehnică, 1962.
13. * * * *Poliarizationno – opticeski metod isledovania napriajenia*, Izd. Akademia Nauk SSSR, 1956.
14. RACOVEANU, N., DUMITRESCU, I., *Electrotehnica şi electronica*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1965.
15. RUSU, O., *Rezolvarea unor probleme ale teoriei elasticităţii prin analogie de sisteme electrice*, Teză de doctorat, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1966.
16. RUSU, O., GALL, T., *Probleme moderne ale rezistenţei materialelor*, Bucureşti, Editura tehnică, 1970.
17. RUSU, O., ILIESCU, N., *Studiul analogic al sistemelor elastice, aplicaţie pentru arborele cotit al motorului de tractor U 650*. Conferinţa de mecanică tehnică, Bucureşti, 30 octombrie 1967.
18. TRIPA, M., *Rezistenţa materialelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.
19. TETELIBAUM, I.M., *Elektriceskoe modelirovanie*, Fizmatghiz, Moskva 1959.
20. TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N., *Theory of Elasticity*, Third Edition, Mc Graw-Hill Book Co., 1970.
Scanned with OKEN Scanner

10

MĂSURĂRI TENSOMETRICE PE MODELE

Conf. dr. ing. M. MODIGA
Dr. ing. N. ILIESCU

10.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Rezistența unei construcții este determinată de mărimea și caracterul repartizării forțelor exterioare care solicită construcția, de dimensiunile și formele constructive ale părților ei componente, de proprietățile mecanice ale materialelor din care aceasta este realizată, de tehnologia de execuție etc. Sinteza sau analiza structurală a unei construcții — părți componente ale procesului de proiectare — cuprinde, de regulă, stabilirea forțelor exterioare, determinarea tensiunilor și deplasărilor liniare și rotirilor cauzate de acestea precum și stabilirea condițiilor în care construcția respectivă își pierde capacitatea de a îndeplini în bune condițiuni funcțiile pentru care a fost destinată.

Rezolvarea completă a acestor probleme nu se poate face, întotdeauna, pe cale teoretică, de aceea adesea este necesar să se recurgă la metode experimentale, bazate pe măsurări efectuate pe construcția în mărime naturală (numită prototip) sau pe modele ale acesteia. Creșterea continuă a dimensiunilor construcțiilor, mașinilor și instalațiilor și diversificarea acestora (răspunzînd cerințelor de utilizare a unor soluții constructive mai raționale, de reducere a greutății acestora ș.a.) au determinat, într-o măsură din ce în ce mai mare, pe ingineri să apeleze la experimentarea pe modele, în condiții de laborator.

În principiu, modelarea constă în înlocuirea studiului unui fenomen din natură prin studiul, în laborator, a modelului acestuia.

Aplicat în problemele de rezistență, studiul pe modele permite o evaluare mai exactă, față de metodele teoretice, a tensiunilor și deplasărilor, dînd posibilitatea unei analize sistematice a distribuției acestor mărimi în structuri cu grad ridicat de complexitate sau în părți separate ale acestora.

Eliminarea ipotezelor simplificatoare, utilizate la verificarea prin calcule a elementelor de rezistență, considerarea independenței dintre aceste elemente — care de multe ori se simplifică în calculele teoretice — permite, în cazul măsurărilor pe modele, corectarea coeficienților de siguranță utilizați în proiectare. Studiul pe modele face posibilă distribuirea mai rațională a încărcărilor pe elementele portante ale construcțiilor, reproiectarea acestora pe baza unor coeficienți de siguranță cît mai apropiați de realitate, în scopul evitării supradimensionării, ceea ce contribuie la minimalizarea consumurilor de materiale și la perfecționarea tehnologiilor de execuție.

Avînd în general gabarit mai mic decît prototipul, modelul se poate realiza și modifica cu ușurință, de aceea studiile pe modele sînt mult mai puțin costisitoare decît studiile pe prototip, iar aplicarea concluziilor acestor studii are o eficiență maximă.

Un experiment complet pe model necesită stabilirea și considerarea condițiilor de modelare pentru toți factorii care determină rezistența prototipului (inclusiv a factorilor tehnologici), lucru care nu se poate realiza întotdeauna. De aceea, pentru o modelare cît mai corectă sînt necesare adesea date obținute în urma unor observații și chiar măsurări efectuate pe prototip, în condiții de exploatare sau de experiment.

O altă direcție în care s-a dezvoltat tehnica modelării, mai ales în ultimul timp, constă în înlocuirea calculului analitic, bazat pe rezolvarea unor ecuații sau sisteme de ecuații algebrice, diferențiale, integrale sau integro-diferențiale, prin măsurări pe modele. În acest caz se modelează metoda de calcul, modelele devenind un instrument pentru rezolvarea unei anumite categorii de probleme, care pot avea naturi fizice diferite, descrise prin anumite ecuații. Astfel de modele se numesc analogice.

Măsurările experimentale pe modele constituie, de asemenea, un puternic instrument de verificare a soluțiilor și metodelor teoretice, care se vor aplica în calculul prototipului. În acest caz nu este vorba, de fapt, de o modelare întrucît rezultatele măsurărilor pe model se compară cu rezultatele calculelor efectuate chiar pentru acesta, astfel încît noțiunile de model și prototip își pierd sensul. Tehnica de execuție și de testare a acestui gen de modele nu diferă de cea folosită în modelarea structurală. Dispare însă necesitatea transpunerii pe prototip a rezultatelor obținute prin măsurări pe model.

Studiile pe model au dus la apariția și dezvoltarea unei ramuri a mecanicii și anume teoria și tehnica modelării, care studiază relațiile de corespondență geometrică și fizică între model și prototip, proiectarea și confecționarea modelelor, metodica testării modelelor, prelucrarea și interpretarea rezultatelor măsurărilor pe modele.

În capitolul de față sînt prezentate succint aspectele cele mai importante legate de teoria și tehnica modelării, cu trimiteri la literatura de

specialitate, care sperăm că vor contribui la extinderea studiilor pe modele.

10.2. BAZELE TEORIEI MODELĂRII

Teoria modelării rezolvă problemele legate de alegerea parametrilor modelului şi de transpunerea pe prototip a mărimilor corespondente determinate pe model. În cele ce urmează se notează cu indicele „n" mărimile care se referă la prototip iar cele care se referă la model cu indicele „m".

10.2.1 CORESPONDENŢE PROTOTIP – MODEL

Între prototip şi model există o corespondenţă biunivocă dacă, după mărimile care se referă la model se pot determina unic mărimile care se referă la prototip, sau invers.

Corespondenţa dintre mărimile scalare, vectoriale sau tensoriale referitoare la prototip şi modelul acestuia se poate exprima matematic sub forma

$$\tilde{A}_n = \{K_{\tilde{A}}\}\, \tilde{A}_m \qquad (10.1)$$

unde $\{K_{\tilde{A}}\}$ este un operator, care realizează transformarea.

Componentele acestuia se numesc factori de scară.

În modelarea problemelor mecanicii corpurile deformabile se pot întîlni următoarele tipuri principale de corespondenţă :

a) *Corespondenţa prin similitudine* (*asemănare*). Modelarea pe baza corespondenţei prin similitudine a fost studiată în cea mai mare măsură şi este larg folosită în tehnică. Caracteristic modelării prin similitudine este faptul că operatorul $\{K_{\tilde{A}}\}$ care realizează corespondenţa dintre mărimile $\tilde{A}_n$ şi A_m are o singură componentă, $K_{\tilde{A}}$, constantă în timp şi în spaţiu — factorul de scară al mărimii $\tilde{A}$. De exemplu, componentele r_{xm}, r_{ym}, r_{zm} ale vectorului de poziţie $\vec{r}_m$ al unui punct al modelului corespund componentelor r_{xn}, r_{yn}, r_{zn} ale vectorului $\vec{r}_n$ de poziţie al punctului omolog de pe prototip, conform relaţiei

$$\begin{vmatrix} r_{xn} \\ r_{yn} \\ r_{zn} \end{vmatrix} = K_L \begin{vmatrix} r_{xm} \\ r_{ym} \\ r_{zm} \end{vmatrix} \quad \text{sau } r_{in} = K_L\, r_{im},\ (i = x, y, z). \qquad (10.2)$$

Componentele r_x, r_y, r_z se transformă în acest caz cu ajutorul mărimii adimensionale constante K_L — numit factor de scară al dimensiunilor liniare *) — adică

$$r_{xn} = K_L\, r_{xm}\,; \quad r_{yn} = K_L\, r_{ym}\,; \quad r_{zn} = K_L\, r_{zm}.$$

Intervalele de timp corespunzătoare desfășurării fenomenelor similare pe prototip și model se află în relația

$$t_n = K_t\, t_m,$$

K_t — factor de scară al timpului.

Alte mărimi scalare, vectoriale sau tensoriale, similare pentru prototip și model, în intervale corespunzătoare de timp, sînt legate prin relațiile

$$\rho_n = K_\rho\, \rho_m\,; \; E_n = K_E E_m\,; \; \mu_n = K_\mu\, \mu_m\,; \; T_n^\circ = K_{T^\circ}\, T_m^\circ \tag{10.3}$$

în care ρ, E, μ, T° reprezintă respectiv densitatea, modulul de elasticitate, coeficientul lui Poisson și temperatura iar K_ρ, K_E, K_μ, K_{T° — factorii de scară corespunzători

$$F_{in} = K_F\, F_{im}\,; \; u_{in} = K_u\, u_{im}\,; \; (i = x, y, z) \tag{10.4}$$

unde F_i, u_i reprezintă vectorii forțelor și deplasărilor liniare ale punctelor corpurilor deformabile

$$\sigma_{ijn} = K_\sigma\, \sigma_{ijm}\,; \; \varepsilon_{ijn} = K_\varepsilon\, \varepsilon_{ijm}\,; \; (i, j = x, y, z) \tag{10.5}$$

în care σ_{ij}, ε_{ij} reprezintă tensorii tensiunilor și deformațiilor.

b) *Corespondența afină.* În modelarea problemelor de elasticitate a materialelor ortotrope, în modelarea plăcilor și învelitorilor subțiri și în multe alte cazuri este avantajos sau chiar necesar să se folosească factori de scară diferiți pentru diferitele componente ale unui vector sau tensor. De exemplu, dacă se notează cu K_x, K_y, K_z factorii geometrici de scară după direcțiile x, y, z, corespondența geometric afină dintre prototip și model se realizează cu ajutorul operatorului $\{K_r\}$, care este în acest caz o matrice diagonală

$$\{K_r\} = [K_L] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}, \text{ unde, în general, } K_x \neq K_y \neq K_z.$$

Corespondența prototip — model pentru mărimi scalare, cum ar fi t, ρ, E, μ, T°, se realizează prin relații de tipul (10.3), prin urmare în cazul corespondenței afine cîmpurile mărimilor scalare sînt asemenea în timp ce cîmpurile mărimilor vectoriale sau tensoriale sînt afine.

*) În literatură se folosește deopotrivă pentru factorul de scară și denumirea de scară, definită ca raportul dintre $\tilde{A}_n$ și A_m.

Scanned with OKEN Scanner

c) *Corespondența funcțională.* Este o generalizare a asemănării în sensul că factorul de scară $K_{\tilde{A}}$ rămîne același pentru toate componentele unui vector sau unui tensor, însă este variabil în timp și în spațiu

$$K_{\tilde{A}} = K_{\tilde{A}}\,(t,\ x, y, z).$$

d) *Corespondența operatorie.* În acest caz $K_{\tilde{A}}$ este un operator diferențial, integral sau integro-diferențial. Astfel în modelarea problemelor vîsco-elasticității liniare (fluaj și relaxare) intervine operatorul integral liniar al lui Volterra.

În afara tipurilor de corespondențe enumerate, pot interveni și combinații ale lor. De exemplu, în modelarea problemelor vîsco-elasticității materialelor anizotrope se aplică corespondența afino-operatorie.

10.2.2. LEGILE MODELĂRII

Identitatea fenomenului natural cu cel reprodus pe model se realizează cu ajutorul legii modelului, care este constituită din ansamblul relațiilor de legătură între factorii de scară ai mărimilor care intervin în fenomenul respectiv. Numărul acestor relații este egal cu numărul complexelor adimensionale, care se pot forma din mărimile fizice de care depinde fenomenul studiat. Aceste complexe adimensionale se numesc criterii sau invarianți de similitudine și trebuie să aibă aceleași valori pentru prototip și model, conform celei de a 3-a legi a similitudinii.

Criteriile de similitudine, care formează legea modelului unui fenomen, se pot stabili prin două metode de bază :

1) analiza ecuațiilor care descriu fenomenul ;

2) analiza dimensională.

1) *Analiza ecuațiilor* se aplică pentru orice fel de corespondență prototip — model, în toate cazurile în care problema studiată poate fi descrisă din punct de vedere matematic. Metoda constă în stabilirea condițiilor în care ecuațiile matematice, care descriu fenomenul studiat, rămîn invariante față de transformarea care realizează corespondența.

Pentru stabilirea acestor condiții se scriu pentru prototip ecuațiile matematice care descriu fenomenul studiat, după care, fiecare mărime ce intervine în aceste ecuații se înlocuiește cu relații de forma (10.1). Se obțin astfel relațiile care trebuie să existe între factorii de scară, astfel încît ecuațiile matematice scrise pentru prototip să descrie același fenomen pe model.

Se consideră o ecuație, reprezentînd suma unor produse de puteri ale mărimilor ce caracterizează fenomenul pe prototip

$$\sum_{i=1}^{s} A_{1in}^{\alpha_{1i}}\, A_{2in}^{\alpha_{2i}} \ldots\ A_{rin}^{\alpha_{ri}} = 0. \qquad (10.6)$$

Se aduce ecuaţia (10.6) sub formă adimensională, împărţind toţi termenii la unul din ei, de exemplu la ultimul

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{A_{1in}^{\alpha_{1i}} A_{2in}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rin}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sn}^{\alpha_{1s}} A_{2sn}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rsn}^{\alpha_{rs}}} + 1 = 0. \tag{10.7}$$

Ecuaţia (10.7), scrisă pentru model, are forma

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sm}^{\alpha_{1i}} A_{2sm}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rsm}^{\alpha_{\mu i}}} + 1 = 0. \tag{10.8}$$

Efectuînd transformarea prin similitudine a relaţiei (10.7), cu ajutorul relaţiilor

$$A_{jin} = K_{Aji} A_{jim}\,; \; (i = 1, \ldots, s\,; j = 1, \ldots, r) \tag{10.9}$$

se obţine:

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{K_{A_{1i}}^{\alpha_{1i}} K_{A_{2i}}^{\alpha_{2i}} \ldots K_{A_{ri}}^{\alpha_{ri}}}{K_{A_{1s}}^{\alpha_{1s}} K_{A_{2s}}^{\alpha_{2s}} \ldots K_{A_{rs}}^{\alpha_{rs}}} \cdot \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{2sm}^{\alpha_{1s}} A_{2sm}^{\alpha_{2s}} \ldots A_{rsm}^{\alpha_{rs}}} + 1 = 0. \tag{10.10}$$

Ecuaţia (10.10) este identică cu (10.7) numai dacă sînt satisfăcute următoarele relaţii între factorii de scară

$$\frac{K_{A_{1i}}^{\alpha_{1i}} K_{A_{2i}}^{\alpha_{2i}} \ldots K_{A_{ri}}^{\alpha_{ri}}}{K_{A_{1s}}^{\alpha_{1s}} K_{A_{2s}}^{\alpha_{2s}} \ldots K_{A_{rs}}^{\alpha_{rs}}} = 1\,; \quad (i = 1, \ldots, s-1). \tag{10.11}$$

Înlocuind în (10.11) factorii de scară $K_{A_{ij}}$, conform relaţiilor (10.9), se obţin $(s-1)$ criterii de similitudine

$$\Pi_i = \frac{A_{1in}^{\alpha_{1i}} A_{2in}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rin}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sn}^{\alpha_{1s}} A_{2sn}^{\alpha_{2s}} \ldots A_{rsn}^{\alpha_{rs}}} = \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{1rm}^{\alpha_{1s}} A_{4sm}^{\alpha_{2s}} \ldots A_{rsm}^{\alpha_{rs}}}\,; \; (i = 1, \ldots, s-1). \tag{10.12}$$

Pentru simplitatea scrierii, în cele ce urmează criteriile Π_i — identice pentru prototip şi model — se vor scrie sub forma

$$\Pi_i = \frac{A_{1i}^{\alpha_{1i}} A_{2i}^{\alpha_{2i}} \ldots A_{ri}^{\alpha_{ri}}}{A_{1s}^{\alpha_{1s}} A_{2s}^{\alpha_{2s}} \ldots A_{rs}^{\alpha_{rs}}} = \text{idem}\,; \quad (i = 1, \ldots, s-1) \tag{10.13}$$

şi vor primi, în unele cazuri, denumirea mărimilor caracteristice.

Scanned with OKEN Scanner

Din compararea relaţiilor (10.7) şi (10.13) rezultă că termenii ecuaţiei (10.6), scrisă sub formă adimensională, reprezintă chiar criteriile de similitudine.

Pentru a diferenţia fenomenul cercetat de toate celelalte fenomene, descrise de aceleaşi ecuaţii, în stabilirea legii modelului trebuie avute în vedere nu numai ecuaţiile care descriu fenomenul ci şi condiţiile la limită, condiţiile iniţiale, şi alte condiţii care determină unicitatea fenomenului studiat.

Exemplu: Să se stabilească legea modelului în cazul încovoierii statice a unei grinzi, avînd dimensiunile, încărcarea şi modul de rezemare prezentate în figura 10.1.

Ecuaţia diferenţială a încovoierii prototipului se scrie sub forma

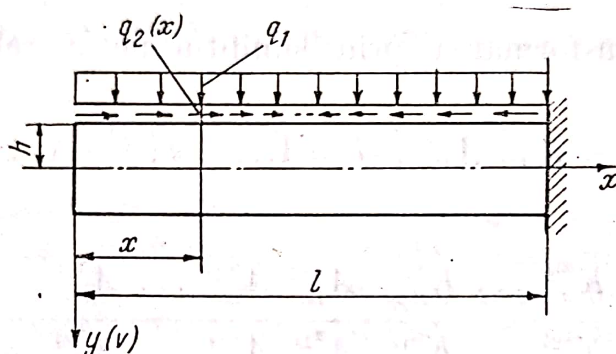


Fig. 10.1

$$E_n I_n \frac{d^2 v_n}{dx_n^2} = -M_n(x_n) = \frac{q_{1n} x_n^2}{2} - h_n \int_0^{x_n} q_{2n}(x_n)\, dx_n . \tag{10.14}$$

În cazul asemănării

$$E_n = K_E E_m ; \quad I_n = K_I I_m ; \quad v_n = K_v v_m ; \quad x_n = K_L x_m ;$$
$$h_n = K_h h_m ; \; q_{1n} = K_{q1} q_{1m} ; \; q_{2n} = K_{q2} q_{2m} . \tag{10.15}$$

Se înlocuiesc (10.15) în (10.14), ţinînd cont că factorii de scară sînt constante, care pot fi scoase de sub simbolul de derivare sau integrare

$$K_E K_I \frac{K_v}{K_L^2} E_m I_m \frac{d^2 v_m}{dx_m^2} = K_{q1} K_L^2 \frac{q_{1m} x_m^2}{2} - K_h K_{q2} K_L h_m \int_0^{x_m} q_{2m}(x_m)\, dx_m .$$

Ecuaţia diferenţială obţinută este identică cu ecuaţia (10.14) numai dacă

$$K_E K_I \frac{K_v}{K_L^2} = K_{q1} K_L^2 = K_h K_{q2} K_L = 1$$

de unde rezultă următoarele relaţii între factorii de scară

$$\frac{K_{q1} K_L^4}{K_E K_v K_I} = 1 ; \quad \frac{K_{q1} K_L}{K_{q2} K_h} = 1 . \tag{10.16}$$

Relaţiile (10.16) se puteau obţine direct din ecuaţia (10.14) prin renunţarea la simbolurile de diferenţială şi integrală, scrierea sub formă adimensională (prin împărţirea la unul din termeni) şi înlocuirea mărimilor care intervin în monoamele adimensionale obţinute, prin factorii de scară corespunzători.

Întrucît în cazul asemănării factorii de scară sînt mărimi constante în tot domeniul în care se definesc, mărimile variabile se înlocuiesc cu valori particulare ale lor, numite mărimi caracteristice. În exemplul considerat x se înlocuieşte cu lungimea barei iar $q_2(x)$ şi $v(x)$ cu valori oarecari particulare, de exemplu cu $q_2 = q_2(0)$ şi $v = v(0)$. Folosind mărimile caracteristice, relaţiile (10.16) se scriu sub formă criterială astfel

$$\Pi_1 = \frac{q_1\, l^4}{E\, I\, v} = \text{idem}\,;\ \Pi_2 = \frac{q_1\, l}{q_2\, h} = 1. \tag{10.17}$$

Deoarece condiţiile la limită nu introduc în acest caz criterii suplimentare, legea de modelare este dată de relaţiile (10.16) sau (10.17). Cele două relaţii (10.16) conţinînd şapte factori de scară, cinci dintre ei pot fi aleşi arbitrar iar doi rezultă în funcţie de cei aleşi.

Numărul factorilor de scară care se pot alege ar putea fi redus dacă se observă că în relaţiile (10.16) intervin patru factori de scară geometrici.

Luînd

$$K_L = K_h = \sqrt[4]{K_I} \tag{10.18}$$

şi lăsînd independent pe K_v modelul este geometric asemenea cu prototipul iar legea de modelare este dată de relaţiile

$$K_{q1} = K_{q2}\,;\quad \frac{K_E\, K_v}{K_{q1}} = 1. \tag{10.19}$$

Similaritatea geometrică se menţine şi după deformaţie, numai dacă se ia $K_v = K_L$. Relaţiile (10.19) devin în acest caz

$$K_{q1} = K_{q2} = K_E\, K_L.$$

Dacă $K_{q1} = K_{q2} = K_E$ şi dacă se respectă şi condiţiile (10.18), săgeţile pe model şi prototip rezultă egale ($K_v = 1$).

Respectarea condiţiilor (10.18) este inutilă atunci cînd se studiază săgeţile grinzii, întrucît în acest caz caracteristica secţiunii este momentul de inerţie fără să intereseze forma secţiunii. De aceea legea de modelare (10.16) sau (10.17) este mai raţională, întrucît lasă mai multe grade de libertate în alegerea factorilor de scară pentru modelare.

Se remarcă faptul că modalitatea de a aduce o ecuaţie la forma adimensională nu este unică, ceea ce determină mai multe forme de scriere a relaţiilor criteriale. Este avantajos însă ca în fiecare criteriu să figureze o

Scanned with OKEN Scanner

singură mărime din cele necunoscute; acest lucru se poate realiza prin combinarea lor.

În cazul în care intervin funcţii transcendente în ecuaţia care descrie fenomenul studiat, argumentele adimensionale constituie criterii de similitudine. În procesul de aducere a ecuaţiei la forma adimensională aceste funcţii dispar.

2) *Analiza dimensională* dă posibilitatea obţinerii condiţiilor de modelare chiar şi în cazul în care problema studiată nu este formulată din punct de vedere matematic, dar sînt cunoscute mărimile fizice care intervin în fenomenul respectiv. Ea se aplică numai în cazul corespondenţei prin similitudine.

La baza analizei dimensionale stă teorema produselor, denumită şi teorema Π, care se enunţă astfel: orice ecuaţie matematică, ce reprezintă o lege fizică, în care intervin k mărimi fundamentale şi $(n-k)$ mărimi derivate, poate fi scrisă ca o funcţie de $(n-k)$ mărimi adimensionale, denumite criterii. Se numesc fundamentale, acele mărimi care sînt independente dimensional (adică acele mărimi ale căror dimensiuni nu se pot obţine din nici un fel de combinaţii ale dimensiunilor celorlalte $(n-k)$ mărimi, numite mărimi derivate.

Dacă se notează mărimile fizice care intervin în studiul unui fenomen cu a_i (cele fundamentale) şi cu b_{k+j} (cele derivate), avînd unităţile de măsură $[a_i]$, $[b_{k+j}]$, dimensiunile $[b_{k+j}]$ pot fi exprimate în funcţie de $[a_i]$ prin relaţii de forma

$$[b_{k+j}] = [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2} \ldots [a_k]^{\alpha_k} \; ; (j = 1, \ldots, n-k) \qquad (10.20)$$

unde α_i $(i=1,\ldots,k)$ sînt coeficienţi numerici.

Fenomenul fiind independent de sistemul de unităţi de măsură adoptat, prin schimbarea unităţilor de măsură conform relaţiilor

$$[a_i] = K_{a_i} [a'_i]; \; [b_{k+j}] = K_{b_{k+j}} [b'_{k+j}] \qquad (10.21)$$

ecuaţia adimensională (10.20) rămîne invariantă numai dacă

$$K_{b_{k+j}} = K_{a_1}^{\alpha_1} K_{a_2}^{\alpha_2} \ldots K_{a_k}^{\alpha_k}$$

sau

$$\frac{K_{b_{k+j}}}{K_{a_1}^{\alpha_1} K_{a_2}^{\alpha_2} \ldots K_{a_k}^{\alpha_k}} = 1; \; (j = 1, \ldots, n-k). \qquad (10.22)$$

Cele $(n-k)$ mărimi complexe adimensionale (10.22) pot fi scrise sub forma a $(n-k)$ criterii de similitudine

$$\Pi_j = \frac{b_{k+j}}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k}} \; ; (j = 1, \ldots, n-k) \qquad (10.23)$$

care reprezintă argumentele adimensionale ale ecuației criteriale a fenomenului respectiv

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}) = 0.$$

Criteriile de similitudine (10.23) se stabilesc, prin analiză dimensională, fie folosind procedeul Rayleigh [33] (folosit în cazul în care fenomenul studiat cuprinde pînă la cinci sau șase mărimi fizice), fie un procedeu mai general, bazat pe aplicarea teoriei sistemelor de ecuații algebrice liniare și omogene [31], [33].

În afara criteriilor astfel determinate, legea de modelare mai cuprinde condițiile de invarianță a parametrilor și variabilelor adimensionale, care reprezintă criterii de similitudine.

Exemplu. Să se stabilească legea de modelare a barei de secțiune oarecare solicitată la răsucire pură.

Funcția implicită a mărimilor care intervin în studiul răsucirii pure a barelor este:

$$F(l, r, G, \mu, F, \tau, \varphi, \delta) = 0;$$

unde: l — lungimea caracteristică a barei; r — dimensiunea caracteristică din planul secțiunii; G — modulul de elasticitate transversal; μ — coeficientul lui Poisson; F — forța caracteristică ce produce răsucirea barei; τ — tensiunea tangențială; φ — unghiul de răsucire al secțiunii; δ — deplasările în lungul axei datorită deplanării secțiunii.

Considerînd drept mărimi fundamentale pe F și l, se pot forma următoarele șase criterii de similitudine

$$\Pi_1 = \varphi; \quad \Pi_2 = \mu; \quad \Pi_3 = \frac{r}{l};$$

$$\Pi_4 = \frac{Gl^4}{F}; \quad \Pi_5 = \frac{\tau l^2}{F}; \quad \Pi_6 = \frac{\delta}{l}.$$

care reprezintă legea modelului.

În cazurile în care fenomenul studiat poate fi descris din punct de vedere matematic, modelarea pe baza analizei ecuațiilor este mai completă decît modelarea pe baza analizei dimensionale. De aceea legile modelelor obținute în § 10.3 și § 10.4 se bazează pe analiza ecuațiilor.

10.3. MODELAREA ÎN PROBLEMELE TEORIEI LINIARE A ELASTICITĂȚII

10.3.1. STAREA SPAȚIALĂ DE TENSIUNI

Pentru stabilirea legii de modelare în problemele teoriei liniare a elasticității corpurilor omogene, izotrope și în stare izotermă, trebuie obținute condițiile de invarianță față de transformarea prin asemănare a

Scanned with OKEN Scanner

ecuaţiilor de echilibru (ecuaţiile lui Cauchy), a relaţiilor de legătură între deformaţii şi deplasări, a legii lui Hooke şi a condiţiilor la limită.

Ecuaţiile de echilibru scrise tensorial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + Q_i = 0; \quad (i, j = x, y, z) \tag{10.24}$$

se pot scrie sub următoarea formă adimensională

$$\frac{1}{Q_i} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + 1 = 0.$$

Conform celor arătate la § 10.2.2, renunţînd la simbolurile diferenţiale şi notînd cu σ, l, Q mărimile caracteristice ale tensiunilor $\sigma_{ij}(x, y, z)$, coordonatelor x, y, z şi forţelor masice $Q_i(x, y, z)$, din (10.24) se obţine următorul criteriu de similitudine

$$\frac{\sigma}{Ql} = \text{idem} \tag{10.25}$$

în condiţiile

$$\frac{\sigma_{ijn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{ijm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_m} = K_\sigma; \frac{x_n}{x_m} = \frac{y_n}{y_m} = \frac{z_n}{z_m} = \frac{l_n}{l_m} = K_L; \tag{10.25a}$$

$$\frac{Q_{in}(x_n, y_n, z_n)}{Q_{im}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{Q_n}{Q_m} = K_Q.$$

În mod analog, relaţiile de legătură între deformaţii şi deplasări

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\right); \quad (i, j = x, y, z)$$

scrise sub formă adimensională, conduc la criteriul

$$\frac{u}{\varepsilon l} = \text{idem} \tag{10.26}$$

în care u şi ε reprezintă deplasarea respectiv deformaţia caracteristică a mărimilor $u_i(x, y, z)$ respectiv $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$, care satisfac relaţiile

$$\frac{u_{in}(x_n, y_n, z_n)}{u_{im}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{u_n}{u_m} = K_u; \frac{\varepsilon_{ijn}(x_n, y_n, z_n)}{\varepsilon_{ijm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_m} = K_\varepsilon. \tag{10.26 a}$$

Legea lui Hooke

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}(\sigma_i - \mu\sigma_i); \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{ij}; \quad \begin{pmatrix} i, j = x, y, z \\ i \neq j \end{pmatrix}$$

scrisă sub formă adimensională conduce la următoarele criterii

$$\frac{\sigma}{E\varepsilon} = \text{idem} \tag{10.27}$$

$$\mu = \text{idem}. \tag{10.28}$$

Condițiile de contur pentru suprafața S_1 (avînd normala n_j) pe care acționează sarcinile distribuite $p_i(i = x, y, z)$, se scriu sub forma

$$p_i = \sigma_{ij} n_j; \qquad (j = x, y, z)$$

iar pentru suprafața S_2, pe care condițiile la limită sînt date în deplasări

$$u_i = u_{ic}; \quad (i = x, y, z)$$

unde u_{ic} reprezintă componentele pe axele x, y, z ale deplasărilor punctelor conturului. Condițiile la limită determină următoarele criterii de similitudine

$$\frac{p}{\sigma} = \text{idem}; \quad \frac{u}{u_c} = \text{idem} \tag{10.29}$$

unde p, u_c reprezintă valori caracteristice ale mărimilor $p(x, y, z)$ respectiv $u_c(x, y, z)$, care satisfac relațiile

$$\frac{p_n(S_1)}{p_m(S_{1m})} = \frac{p_n}{p_m} = K_p; \quad \frac{u_{icn}(S_{2n})}{u_{icm}(S_{2m})} = \frac{u_{cn}}{u_{cm}} = K_{uc} \tag{10.29 a}$$

K_p și K_{uc} fiind factorii de scară pentru forțele distribuite pe suprafața S_1 a conturului respectiv pentru deplasările punctelor zonei S_2 a conturului.

Relațiile (10.25 — 10.29) alcătuiesc legea de modelare în problemele teoriei liniare a elasticității.

În cazurile în care condițiile la limită sînt date numai în eforturi sau numai în deplasări, legea de modelare se simplifică întrucît dispare criteriul corespunzător din (10.29).

Pentru rezolvarea problemelor dinamice în cadrul elasticității liniare, în ecuațiile de echilibru (10.24) intervin termenii $\left(-\rho \frac{d^2u}{dt^2}\right)$, cauzați de prezența forțelor de inerție, care mai introduc criteriul

$$\frac{\rho u}{Qt^2} = \text{idem},$$

ρ fiind densitatea, iar t timpul.

Scanned with OKEN Scanner

Ultimul criteriu obţinut se poate scrie, ţinînd cont de (10.25), (10.27), (10.26), sub forma

$$\frac{l}{t}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \text{idem} \tag{10.30}$$

care, împreună cu condiţiile iniţiale, se adaugă criteriilor obţinute mai sus, permiţînd modelarea problemelor dinamice [10].

Întrucît $\frac{l}{t}$ reprezintă viteza mişcării particulelor corpului în timpul vibraţiei iar $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ este viteza de propagare a sunetului în materialul respectiv, criteriul (10.30) este asemănător criteriului Mach folosit în aerodinamică.

Pentru a obţine legea de modelare în domeniul deformaţiilor plastice se folosesc aceleaşi relaţii ca în domeniul elastic cu deosebirea că în locul legii lui Hooke trebuie considerate relaţiile între tensiuni şi deformaţii din teoria micilor deformaţii elasto-plastice sau din teoria curgerii (ecuaţiile Prandtl — Reuss). Deşi aceste relaţii nu introduc noi criterii, în acest caz este necesar să se respecte condiţiile (10.27), (10.28) în orice punct al diagramei caracteristice, ceea ce impune asemănarea acestora pentru prototip şi model.

10.3.2. STAREA PLANĂ

În cazul stării plane de tensiuni, prototipul şi modelul acestuia au forma unor plăci plane de grosime constantă h, iar forţele sînt aplicate paralel cu planul median al plăcii.

Legea de modelare a problemelor plane ale elasticităţii este dată tot de relaţiile (10.25 — 10.29).

Factorul de scară pentru grosimi, K_h, poate fi luat diferit de factorul de scară al dimensiunilor în plan. În alegerea acestuia se au în vedere considerente practice, legate de executarea modelului şi efectuarea măsurărilor.

Problema stării plane de deformaţii, se reduce la starea plană de tensiuni înlocuind constantele elastice E şi μ prin

$$E^* = \frac{E}{1-\mu}; \quad \mu^* = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Aceste relaţii permit înlocuirea studiului stării plane de deformaţii prin studiul stării plane de tensiuni, care se poate realiza mult mai uşor în condiţii de experimentare.

10.4. MODELAREA BARELOR, SISTEMELOR DE BARE ȘI A PLĂCILOR

Legea de modelare obținută în § 10.3 se folosește, de obicei, în studiul corpurilor elastice, avînd forme complexe, ceea ce este caracteristic construcțiilor de mașini. Aceasta deoarece comportarea acestor corpuri sub sarcini nu se poate studia decît pe baza ecuațiilor stabilite în cadrul teoriei elasticității.

Există însă elemente (mai ales în construcții civile, industriale, navale, aerospațiale) a căror comportare este descrisă de ecuații specifice, deduse pe baza unor anumite scheme de calcul, care iau în considerare numai acei factori care sînt esențiali pentru fenomenul studiat. Un exemplu în acest sens îl constituie problema examinată la § 10.22. Cu cît ecuațiile folosite au un caracter mai particular, cu atît se obțin condiții de modelare mai raționale.

10.4.1. ÎNCOVOIEREA, STABILITATEA ȘI VIBRAȚIA BARELOR

Ecuația diferențială a încovoierii plane a unei bare (fig. 10.2) de secțiune variabilă, așezată pe un mediu elastic de rigiditate variabilă de tip Winkler, solicitată transversal și axial se scrie sub forma [5], [25]

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[EI(x)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right] + N(x)\frac{d^2v}{\mathrm{d}x^2} + K(x)\,v(x) = q(x) \qquad (10.31)$$

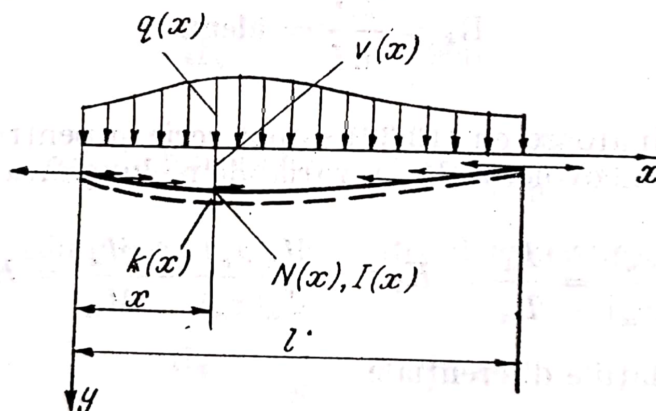


Fig. 10.2.

unde $N(x)$ este forța axială în secțiunea x;

$v(x)$, $q(x)$, $K(x)$ — reprezintă respectiv săgeata, intensitatea încărcării transversale și coeficientul de rigiditate al mediului elastic în secțiunea x;

$I(x)$ — momentul de inerție al ariei barei, în secțiunea transversală x.

Factorii de scară ai mărimilor variabile care intervin în ecuația (10.31) trebuie să fie constanți în tot domeniul de variație a acestora, adică

$$\frac{I_n(x_n)}{I_m(x_m)} = \frac{I_n}{I_m} = K_I; \quad \frac{k_n(x_n)}{k_m(x_m)} = \frac{k_n}{k_m} = K_k;$$
$$\frac{q_n(x_n)}{q_m(x_m)} = \frac{q_n}{q_m} = K_q; \quad \frac{N_n(x_n)}{N_m(x_m)} = \frac{N_n}{N_m} = K_N \qquad (10.32)$$

unde I, k, q, N reprezintă valorile caracteristice ale mărimilor corespunzătoare $I(x)$, $k(x)$, $q(x)$, $N(x)$ pentru o anumită valoare a abscisei x.

Scriind ecuaţia (10.31) sub formă adimensională, obţinută prin împărţirea tuturor termenilor ei la $q(x)$, de exemplu, şi renunţînd la simbolul de derivare se obţin, conform celor arătate la § 10.22, următoarele criterii

$$\frac{EIv}{ql^4} = \text{idem}\,; \qquad \frac{Nv}{ql^2} = \text{idem}\,; \qquad \frac{kv}{q} = \text{idem}. \qquad (10.33)$$

Pentru ca necunoscuta v să intervină numai într-un criteriu, se împart ultimele două criterii din (10.33) la primul, obţinîndu-se:

criteriul săgeţii:

$$\Pi_v = \frac{EI_v}{ql^4} = \text{idem}\,; \qquad (10.34)$$

criteriul forţei axiale:

$$\Pi_N = \frac{Nl^2}{EI} = \text{idem}\,; \qquad (10.35)$$

criteriul rigidităţii mediului elastic:

$$\Pi_k = \frac{kl^4}{EI} = \text{idem}. \qquad (10.36)$$

Relaţii asemănătoare cu (10.32) se pot scrie şi pentru forţa tăietoare $T(x)$ şi momentul încovoietor $M(x)$, variabile pe lungimea barei

$$\frac{T_n(x_n)}{T_m(x_m)} = \frac{T_n}{T_m} = K_T\,; \qquad \frac{M_n(x_n)}{M_m(x_m)} = \frac{M_n}{M_m} = K_M. \qquad (10.37)$$

Ţinînd cont de relaţiile diferenţiale

$$q(x) = -\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2},$$

se mai obţin următoarele două criterii

$$\Pi_T = \frac{T}{ql} = \text{idem}\,; \qquad \Pi_M = \frac{M}{ql^2} = \text{idem}. \qquad (10.38)$$

Se examinează condiţiile la limită.

Legăturile rigide ale barei nu dau criterii suplimentare; este necesar însă ca grinda model să aibă acelaşi mod de rezemare, în secţiunile corespunzătoare, ca grinda prototip.

Legătura elastică într-o secţiune introduce următoarele două condiţii la limită

$$v = \frac{\mathscr{R}}{C}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathscr{M}}{\mathscr{K}}. \tag{10.39}$$

unde $\mathscr{R}$ şi $\mathscr{M}$ reprezintă forţa, respectiv momentul din legătură iar C şi $\mathscr{K}$ sînt constantele elastice la tasare respectiv la rotire. Cum mărimile $\mathscr{R}$ şi $\mathscr{M}$ reprezintă valori particulare ale forţei tăietoare şi momentului încovoietor, relaţiile (10.39), după aducerea la forma adimensională, se pot scrie sub forma

$$\frac{Cv}{T} = \text{idem}; \quad \frac{\mathscr{K}v}{\mathscr{M}l} = \text{idem}. \tag{10.40}$$

Împărţind criteriile (10.40) la Π_v şi înmulţindu-le cu Π_T respectiv Π_M, se obţin :
criteriul rezemării elastice :

$$\Pi_c = \frac{Cl^3}{EI} = \text{idem}; \tag{10.41}$$

criteriul încastrării elastice :

$$\Pi_K = \frac{\mathscr{K}l}{EI} = \text{idem}. \tag{10.42}$$

Criteriul pentru unghiurile de rotire $\varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ se obţine din relaţia $\frac{\varphi l}{v} = \text{idem}$, prin eliminarea lui v cu ajutorul criteriului K_v

$$\Pi_\varphi = \frac{EI\varphi}{ql^3} = \text{idem}. \tag{10.43}$$

Pentru determinarea influenţei forţelor tăietoare asupra săgeţilor grinzii se scrie săgeata totală sub forma

$$v = v_i + v_f = v_i + \frac{1}{GA_f}\iint q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \tag{10.44}$$

unde G este modulul transversal de elasticitate, iar A este aria la forfecare a secţiunii. Din relaţia (10.44) rezultă criteriul rigidităţii la forfecare ($G A_f$), care se va nota cu Π_f

$$\Pi_f = \frac{EI}{GA_f l^2} = \text{idem}. \tag{10.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

Stabilitatea barei reprezintă din punct de vedere al modelării, un caz particular al încovoierii compuse. În problemele de stabilitate săgeata v devine o mărime nedeterminată, de aceea criteriul K_v dispare din legea de modelare, iar criteriul forţei critice este (10.35), în care se înlocuieşte N cu N_{cr}.

Vibraţiile transversale ale barei sînt descrise de ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right] + m(x)\frac{d^2v}{dt^2} + C_1(x)\frac{dv}{dt} = q(x, t) \tag{10.46}$$

unde

$m(x)$ — masa unităţii de lungime a barei ;
$C_1(x)$ — coeficientul de amortizare ;
t — timpul.

Mărimile variabile $m(x)$, $C_1(x)$, $q(x, t)$ trebuie să satisfacă, în cazul similitudinii, relaţiile

$$\frac{m_n(x_n)}{m_m(x_m)} = \frac{m_n}{m_m} = K_m ; \quad \frac{C_{1n}(x_n)}{C_{1m}(x_m)} = \frac{C_{1n}}{C_{1m}} = K_{C_1} ; \quad \frac{q_n(x_n, t_n)}{q_m(x_m, t_m)} = \frac{q_n}{q_m} = K_q . \tag{10.47}$$

Ecuaţia (10.46) conduce la criteriul K_v şi la două noi criterii

$$\frac{mv}{qt^2} = \text{idem} ; \quad \frac{C_1 v}{qt} = \text{idem}. \tag{10.48}$$

Eliminînd săgeata v cu ajutorul criteriului K_v, înlocuind timpul cu mărimea caracteristică a sa, perioada (τ) şi ţinînd cont de relaţia $\tau = \frac{1}{\nu}$ (ν — frecvenţa vibraţiilor) din relaţiile (10.48) se obţine :

$$\text{criteriul frecvenţei : } \Pi_\nu = \frac{ml^4 \nu^2}{EI} = \text{idem} ; \tag{10.49}$$

$$\text{criteriul amortizării vibraţiilor : } \Pi_{C_1} = \frac{C_1^2 l^4}{EIm} = \text{idem}. \tag{10.50}$$

Amplitudinea vibraţiilor se determină din criteriul K_v în care se înlocuieşte săgeata cu amplitudinea.

Observaţie : În cazul similitudinii geometrice complete ($K_A = \sqrt{K_I} = K_L^2$), luînd $m = A\rho$, relaţia (10.49) conduce la criteriul Cauchy (10.30).

Modelarea grinzilor continue şi a cadrelor cu noduri fixe se face cu ajutorul criteriilor stabilite mai sus. Este necesar însă să se respecte identitatea criteriilor de similitudine pentru prototip şi model în toate legăturile.

Pentru stabilirea condiţiilor de modelare a cadrelor cu noduri deplasabile şi a reţelelor de bare, este necesar a se considera în plus compatibilitatea deplasărilor în noduri a barelor concurente.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind criteriul săgeţii (10.34) stabilit la § 10.4.1, pentru barele r şi s, concurente în nodul P, se pot scrie relaţiile

$$\frac{EI_r^{(1)}v}{Q_r^{(1)}L^{(1)3}} = \text{idem}\,; \quad \frac{EI_s^{(2)}v}{Q_s^{(2)}L^{(2)3}} = \text{idem} \tag{10.51}$$

unde s-au folosit notaţiile din fig. (10.3) şi s-a înlocuit produsul qL prin Q. Întrucît reacţiunea R din nodul P este aceiaşi pentru grinzile r şi s, din

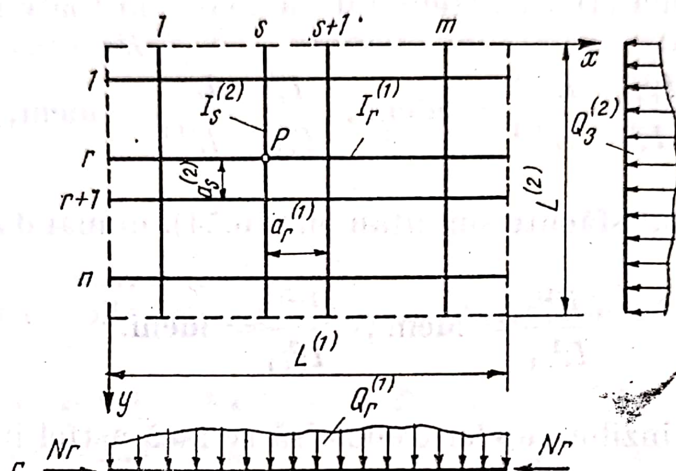


Fig. 10.3.

criteriul forţei tăietoare, scris pentru cele două grinzi : $\frac{R}{Q_r^{(1)}} = \text{idem}\,;$ $\frac{R}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}$
se obţine

$$\frac{Q_r^{(1)}}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}. \tag{10.52}$$

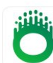
Dar r şi s pot lua orice valori, de aceea trebuie să existe şi criteriile

$$\frac{Q_{r+1}^{(1)}}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}\,; \quad \frac{Q_r^{(1)}}{Q_{s+1}^{(2)}} = \text{idem}. \tag{10.52.a}$$

Satisfacerea simultană a criteriilor (10.52) şi (10.52 a) nu este posibilă decît dacă

$$\frac{Q_r^{(1)}}{Q_{r+1}^{(1)}} = \text{idem}\,; \quad \frac{Q_s^{(2)}}{Q_{s+1}^{(2)}} = \text{idem}. \tag{10.53}$$

Scanned with OKEN Scanner



Conlucrarea grinzilor rețelei necesită însă ca și săgețile grinzilor r și s, care rezultă din (10.51), să fie egale, adică

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{Q_s^{(2)}}{Q_r^{(1)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem}$$

sau, ținînd cont de (10.52)

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem}. \qquad (10.54)$$

Relații de forma (10.54), trebuind să existe în toate nodurile rețelei, se obține

$$\frac{I_{r+1}^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem}\,; \quad \frac{I_r^{(1)}}{I_{s+1}^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem},$$

relații care pot fi satisfăcute simultan cu (10.54), numai dacă

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_{r+1}^{(1)}} = \text{idem}\,; \quad \frac{I_s^{(2)}}{I_{s+1}^{(2)}} = \text{idem}. \qquad (10.55)$$

Dispunerea grinzilor rețelei trebuie să se facă astfel încît să fie satisfăcute relațiile

$$\frac{a_r^{(1)}}{L^{(1)}} = \text{idem}\,; \quad \frac{a_s^{(2)}}{L^{(2)}} = \text{idem}. \qquad (10.56)$$

Ansamblul relațiilor (10.51 — 10.56), formează legea de modelare a încovoierii rețelelor de bare.

În problemele de stabilitate a rețelelor de bare la care $Q_r^{(1)} = Q_s^{(2)} = 0$, legea de modelare e dată de criteriile (10.54) — (10.56), la care se adaugă criteriul forțelor axiale (10.35)

$$\frac{N_r\, L^{(1)2}}{E\, I_r^{(1)}} = \text{idem}. \qquad (10.57)$$

Dacă se consideră și influența forțelor tăietoare asupra săgeților, trebuie considerate în plus criteriile rigidității la forfecare (10.45)

$$\frac{E\, I_r^{(1)}}{G A_{fr}^{(1)}\, L^{(1)2}} = \text{idem}\,; \quad \frac{E I_s^{(2)}}{G A_{fs}^{(2)}\, L^{(2)2}} = \text{idem}. \qquad (10.58)$$

Legea de modelare obținută mai sus, pe baza analizei ecuațiilor diferențiale ale barelor, asigură similitudinea modelului cu prototipul în toate punctele barelor care alcătuiesc sistemul.

În problemele în care interesează numai valorile necunoscutelor static nedeterminate legea de modelare se simplifică întrucît în aceste cazuri este suficientă respectarea similitudinii modelului cu prototipul numai în anumite secțiuni ale barelor [2].

10.4.3. ÎNCOVOIEREA ȘI VIBRAȚIA PLĂCILOR PLANE RIGIDE

Încovoierea plăcilor plane cu săgeți mici este descrisă de ecuația

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{10.59}$$

unde w este săgeata plăcii, h — grosimea ei, $p(x, y)$ este încărcarea transversală, iar

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \tag{10.60}$$

este rigiditatea cilindrică a plăcii.

Mărimile variabile $w(x, y)$ și $p(x, y)$ trebuie să satisfacă relațiile

$$\frac{w_n(x_n, y_n)}{w_m(x_m, y_m)} = \frac{w_n}{w_m} = K_w; \quad \frac{p_n(x_n, y_n)}{p_m(x_m, y_m)} = \frac{p_n}{p_m} = K_p. \tag{10.61}$$

Din ecuația (10.59) se obține criteriul

$$\frac{Dw}{pa^4} = \text{idem} \tag{10.62}$$

și relația $\frac{x}{y}$ = idem, care conduce la criteriul

$$\frac{a}{b} = \text{idem}. \tag{10.63}$$

Dacă se studiază numai săgețile plăcii, legea de modelare este alcătuită din criteriile (10.62) și (10.63).

Pentru modelarea stării de tensiuni se folosesc relațiile de legătură între tensiuni și deplasări [5]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$
$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \tag{10.64}$$

Mărimile variabile σ_x, σ_y, τ_{xy} se modelează cu același factor de scară, constant în tot cîmpul plăcii, adică

$$\frac{\sigma_{xn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{xm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_{yn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{ym}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\tau_{xyn}(x_n, y_n, z_n)}{\tau_{xym}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_m} = K_\sigma. \quad (10.65)$$

Din relațiile (10.64) se obțin criteriile

$$\frac{\sigma h^2}{pa^2} = \text{idem}; \quad (10.66)$$

$$\mu = \text{idem}. \quad (10.67)$$

Criteriul (10.67) impune modificarea criteriului (10.62), care devine

$$\frac{Eh^3 w}{p\,a^4} = \text{idem}. \quad (10.68)$$

Eforturile secționale M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y se modelează cu ajutorul criteriilor

$$\frac{M}{pa^2} = \text{idem}; \quad \frac{T}{pa} = \text{idem}. \quad (10.70)$$

care se obțin din relațiile de definiție ale acestor eforturi [5].

Încovoierea plăcilor circulare rigide se modelează după aceeași lege ca a celor dreptunghiulare.

Studiul vibrațiilor transversale ale unei plăci rigide se face cu ecuația (10.59), la care în membrul drept se adaugă termenul $\left(-m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$. unde m este masa unității de suprafață din planul plăcii. Legea de modelare a problemelor de vibrații este formată din criteriile (10.62), (10.63) la care se mai adaugă următorul criteriu al frecvenței ν

$$\frac{m\nu^2 a^4}{D} = \text{idem}. \quad (10.71)$$

Încărcarea $p(x, y, t)$, trebuie să satisfacă în acest caz condiția

$$\frac{p_n(x_n, y_n, t_n)}{p_m(x_m, y_m, t_m)} = \frac{p_n}{p_m} = K_p.$$

Amplitudinile se determină din criteriul (10.62).

Scanned with OKEN Scanner

10.4.4. ÎNCOVOIEREA ŞI STABILITATEA PLĂCILOR CU DEFORMAŢII MARI

Din analiza ecuaţiei diferenţiale a încovoierii plăcilor cu deformaţii mari (fig. 10.4) rezultă criteriile (10.62 — 10.63)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial w^4}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left[p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

la care se mai adaugă

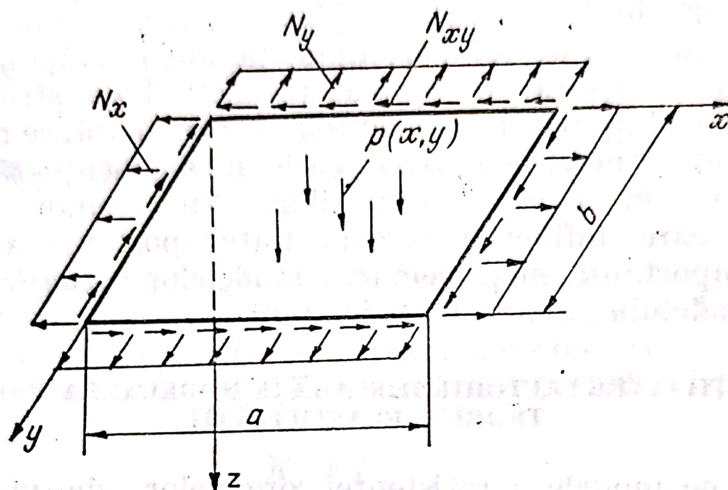


Fig. 10.4

$$\frac{N_{xn}}{N_{xm}} = \frac{N_{yn}}{N_{ym}} = \frac{N_{xyn}}{N_{xym}} = \frac{N_n}{N_m} = K_N\,; \tag{10.72}$$

$$\frac{Na^2}{D} = \text{idem}. \tag{10.73}$$

Pentru modelarea completă trebuie analizate şi relaţiile de legătură între eforturile de membrană N_x, N_y, N_{xy} şi deplasările u_0, v_0, w, unde u_0 şi v_0 sînt deplasări pe direcţiile x respectiv y ale unui punct din planul median al plăcii. Relaţiile amintite

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{Eh}\,(N_x - \mu N_y)$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{Eh}\,(N_y - \mu N_x)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{Eh}\,N_{xy}$$

dau criteriile

$$\mu = \text{idem}\,;\quad \frac{u_0 a}{h^2} = \text{idem}\,;\quad \frac{u_0}{v_0} = \text{idem}\,;\quad \frac{w}{h} = \text{idem}. \tag{10.74}$$

Scanned with OKEN Scanner

Modelarea problemelor de stabilitate a plăcilor se realizează cu ajutorul relațiilor (10.63), (10.72) și a criteriului (10.73) în care N se înlocuiește cu N_{cr}.

10.5. PROIECTAREA MODELELOR

Proiectarea modelelor constă în stabilirea formelor, dimensiunilor și tehnologiei de execuție a modelelor. Rezolvarea acestor probleme depinde în primul rînd de destinația modelului. Realizarea unui model perfect asemenea cu prototipul este destul de complicată, uneori chiar imposibilă, și nu este întotdeauna necesară. De aceea, respectînd cu strictețe condițiile geometrice de modelare pentru elementele de rezistență, se neglijează amănuntele constructive nesemnificative, care nu influențează asupra rezultatelor urmărite în cursul încercărilor. Nu trebuie însă neglijate slăbirile locale, care, influențează capacitatea portantă a construcțiior.
O etapă importantă în proiectarea modelelor o constituie stabilirea, pe baza legii modelului, a factorilor de scară.

10.5.1. RELAȚII ÎNTRE FACTORII DE SCARĂ ÎN MODELAREA PROBLEMELOR TEORIEI ELASTICITĂȚII

În studiul pe modele a rezistenței organelor de mașini și a altor construcții avînd configurații și solicitări complexe, modelarea se face pe baza criteriilor de similitudine obținute prin analiza ecuațiilor generale ale elasticității.

Întrucît cele șase relații (10.25 — 10.29), care alcătuiesc legea de modelare, conțin nouă factori de scară, rezultă că trei dintre acestia pot fi aleși, însă nu la întîmplare.

Astfel, factorul de scară pentru modulul de elasticitate, K_E, este impus prin alegerea materialului modelului (în general diferit de materialul prototipului).

Factorul de scară geometric (K_L) se alege de asemenea, independent de ceilalți factori de scară. Mărimea acestuia depinde de gabaritul și complexitatea prototipului, de posibilitățile de încărcare ale modelului, de materialele și aparatele de măsură disponibile, de posibilitățile de execuție și de precizia cerută.

Se consideră cazul în care forțele masice influențează neglijabil starea de tensiuni, adică legea de modelare nu conține criteriul (10.25).
Dacă condițiile la limită sînt date numai în deplasări (a doua problemă fundamentaă a teoriei elastictății), cel de al treilea factor de scară care se alege este K_{u_c}.

Factorii de scară derivați, rezultînd din relațiile (10.26 — 10.29) sînt în acest caz

$$K_u = K_{u_c};\ K_\varepsilon = \frac{K_{u_c}}{K_L};\ K_\sigma = \frac{K_E\, K_{u_c}}{K_L}, \qquad (10.75)$$

Dacă se ia $K_{u_c} = K_L$, asemănarea geometrică existentă înainte de deformaţie se menţine şi după deformaţie, condiţie absolut necesară în cazul deplasărilor mari. În acest caz relaţiile (10.75) devin

$$K_u = K_{v_c} = K_L \, ; \; K \; = 1 \, ; \; K_\sigma = K_E. \tag{10.76}$$

Dacă condiţiile la limită sînt date numai în tensiuni (prima problemă fundamentală a teoriei elasticităţii), este raţional să se aleagă K_p, astfel încît deformaţiile care apar în model să fie suficient de mari pentru a putea fi măsurate, fără a se depăşi însă anumite valori limită. Factorii de scară derivaţi se determină cu relaţiile

$$K_\sigma = K_p \, ; \; K_\varepsilon = \frac{K_p}{K_E} \, ; \; K_u = K_{u_c} = \frac{K_p K_L}{K_E} . \tag{10.77}$$

În cazul în care condiţiile la limită sînt date şi în tensiuni şi în deplasări (problema mixtă a teoriei elasticităţii) se poate alege fie factorul de scară al încărcărilor exterioare, fie cel al deplasărilor conturului ; între mărimile acestora există următoarea relaţie, dedusă din (10.26), (10.27) şi (10.29) :

$$\frac{K_p \, K_L}{K_{u_c} \, K_E} = 1 \tag{10.78}$$

Acele dimensiuni ale modelului, care impun condiţii la limită în deplasări (de exemplu anumite spaţii care dispar după încărcarea modelului), trebuiesc modelate cu ajutorul factorului de scară K_{u_c} şi nu K_L.

Forţele exterioare concentrate (F), forţele distribuite liniar (q) şi momentele concentrate (M) se modelează cu ajutorul următorilor factori de scară

$$K_F = K_p \, K_L^2 \, ; \; K_q = K_p \cdot K_L \, ; \; K_{\mathcal{M}} = K_p \cdot K_L^3. \tag{10.79}$$

În problemele elasticităţii plane, în care grosimea h se modelează cu ajutorul factorului de scară K_h (care poate diferi de K_L), relaţiile (10.79) devin

$$K_F = K_p \, K_L \, K_h \, ; \; K_q = K_p \, K_L. \tag{10.80}$$

Trecerea de la model la prototip se face în cazul stării plane cu ajutorul următorilor factori de scară

$$K_\sigma = K_p = \frac{K_F}{K_L K_h} \, ; \; K_u = \frac{K_p K_L}{K_E} = \frac{K_F}{K_E K_h} . \tag{10.81}$$

a) *Probleme de contact.* În problemele de contact a unei sfere, avînd diametrul D şi constantele elastice E_1 şi μ_1, cu o suprafaţă plană de constante

Scanned with OKEN Scanner

elastice E_2 și μ_2, raza (r) a suprafeței de contact și tensiunea maximă (σ) se calculează cu relațiile

$$r = K_0 \sqrt[3]{FD\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}\,;\quad \sigma = K_0' \sqrt[3]{\frac{F}{D^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}} \qquad (10.82)$$

unde F este forța de apăsare.

Similitudinea geometrică a zonelor de contact impune $K_r = K_L$ și dacă se notează cu K_{el} factorul de scară al mărimii

$$\frac{E_1 E_2}{E_1(1-\mu_2^2)+E_2(1-\mu_1^2)}$$

din (10.82) se obțin următoarele relații între factorii de scară

$$K_D = \frac{K_{el}K_L^3}{K_F}\,;\quad K_\sigma = \frac{K_F}{K_L^2}\,. \qquad (10.83)$$

A doua relație din (10.83) se poate folosi numai referitor la tensiunea maximă de contact. În ce privește distribuția de tensiuni în zona contactului și în afara ei, modelarea este distorsionată, așa cum se va vedea la § 10.5.1.

Dacă modelul este confecționat din același material ca și prototipul și dacă se ia $K_F = K_L^2$, rezultă $K_D = K_L$ și $K_\sigma = 1$.

În cazul contactului liniar relațiile (10.83) devin

$$K_D = \frac{K_{el}K_L^2}{K_q}\,;\quad K_\sigma = \frac{K_q}{K_L} \qquad (10.84)$$

unde q este forța corespunzătoare unității de lungime a suprafeței de contact, iar D este diametrul cilindrului, în contact cu suprafața plană.

b) *Influența forțelor masice.* În cazul în care forțele masice nu pot fi neglijate (așa cum se întîmplă în cazul barajelor hidrotehnice, a utilajelor de turnătorie, etc.), factorul de scară pentru modelarea acestora trebuie să îndeplinească următoarele condiții, care rezultă din legea de modelare (10.25—10.29)

$$K_Q = \frac{K_p}{K_L} \text{ sau } K_Q = \frac{K_E K_{u_c}}{K_L^2}\,. \qquad (10.85)$$

Dacă forțele masice nu sînt gravitaționale, modelarea acestora nu prezintă dificultăți. Dacă însă forțele masice provin din greutatea proprie, satisfacerea criteriului (10.25), care a stat la baza stabilirii relațiilor (10.85), este greu de realizat. Într-adevăr, presupunînd modelul realizat din același

Scanned with OKEN Scanner

material cu prototipul, adică avînd $\rho_m = \rho_n$, factorul de scară al forțelor masice devine o mărime impusă, $K_Q = 1$, care diferă de cea dată de relațiile (10.85). În consecință rezultă pentru tensiuni un alt factor de scară, $K_\sigma = K_L$, diferit de (10.75) sau (10.77).

Dacă $K_L \gg 1$ valorile tensiunilor măsurate sînt neglijabile față de cele care apar în prototip, ceea ce poate duce la apreciabile erori de măsurare.

Aceeași restricție apare și dacă modelul este confecționat dintr-un alt material decît prototipul. În acest caz

$$K_Q = K_\rho \, ; \quad K_\delta = K_\rho K_L. \tag{10.86}$$

Acest neajuns se poate evita prin :

— folosirea modelelor parțiale pentru studiul unor elemente izolate ale prototipului ;

— folosirea modelelor din materiale avînd valori mici ale modulului de elasticitate (materiale gelatinoase) ;

— folosirea modelelor geometrice afine.

Cea mai eficientă metodă pentru realizarea oricărui factor de scară a forțelor masice este însă centrifugarea modelului. În acest caz :

$$K_Q = K_\rho K_a, \text{ unde } K_a = \frac{g}{a_m}. \tag{10.87}$$

Accelerația modelului a_m putînd fi modificată în limite foarte largi, ea poate fi astfel aleasă încît să satisfacă relațiile :

$$K_\rho K_a = \frac{K_p}{K_L} \quad \text{sau} \quad K_\rho K_a = \frac{K_E K_{u_c}}{K_L^2}. \tag{10.88}$$

Pentru obținerea tensiunilor cauzate numai de încărcările exterioare, în cazul în care modelul este solicitat simultan și de forțe gravitaționale, se face separat studiul modelului încărcat numai prin greutatea proprie, după care se aplică principiul suprapunerii efectelor.

c) *Influența coeficientului lui Poisson* : Prin alegerea materialului modelului rezultă implicit μ_m și dacă $\mu_m \neq \mu_n$, criteriul (10.28) nu mai este satisfăcut. Un astfel de model se numește distorsionat. Influența pe care o are neîndeplinirea acestui criteriu asupra stării de tensiuni și de deformații nu a putut fi stabilită în cazul general, de aceea, eroarea introdusă în cazul $|\mu_n - \mu_m| \neq 0$ se apreciază la fiecare problemă de modelare în parte.

Modelarea prin similitudine impune ca factorii de scară să aibă valori constante în spațiu și în timp. Din relația (10.26, a), care se mai poate scrie sub forma

$$K_\varepsilon = \frac{\dfrac{1}{E_n}[\sigma_{xn} - \mu_n(\sigma_{yn} + \sigma_{zn})]}{\dfrac{1}{E_m}[\sigma_{xm} - \mu_m(\sigma_{ym} + \sigma_{zm})]} \tag{10.89}$$

se observă că realizarea condiției de invariabilitate a lui K_ε, prin respectarea primei condiții din (10.25, a), este posibilă numai dacă $\mu_n = \mu_m$, sau în cazurile particulare : $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (starea liniară) și $\sigma_y = -\sigma_z$ (forfecare pură).

Starea de tensiuni nefiind (în general) uniformă, inegalitatea $\mu_n \neq \mu_m$ influențează nu numai asupra valorilor absolute ale deformațiilor și tensiunilor, ci și asupra legii de distribuție a acestora. De aceea coeficienții de corecție, care se pot stabili în unele cazuri (cînd se cunosc legile de distribuție ale tensiunilor și deformațiilor), sînt valabili, în general, numai în anumite puncte ale modelului. Astfel, în centrul plăcilor dreptunghiulare rigide, factorul de scară al tensiunilor, rezultînd din relația (10.66), trebuie înmulțit cu coeficientul

$$K_1 = \frac{1+\mu_n}{1+\mu_m}. \tag{10.90}$$

Pentru placa circulară, simplu rezemată pe contur, coeficientul de corecție pentru factorii de scară ai tensiunilor tangențiale și radiale în centrul plăcii sînt

$$K_{1\sigma_t} = \frac{\mu_n}{\mu_m}; \quad K_{1\sigma_r} = \frac{3+\mu_n}{3+\mu_m}. \tag{10.91}$$

Pentru un disc în rotație, avînd grosimea constantă și diametrele interior și exterior egale respectiv cu d_m, D_m, coeficientul de corecție este același în toate punctele

$$K_{1\sigma} = \frac{(3+\mu_n)+(1-\mu_n)\,\mathrm{d}_m/D_m}{(3+\mu_m)+(1-\mu_m)\,\mathrm{d}_m/D_m}. \tag{10.92}$$

În alte cazuri, în care legea de distribuție a mărimilor care interesează este cunoscută, coeficienții de corecție pot fi obținuți cu destulă ușurință [24], [34].

Dacă însă legea de distribuție a tensiunilor sau deformațiilor nu este cunoscută (așa cum se întîmplă în teoria elasticității, unde nu există o soluție generală a ecuațiilor lui Lamé, sau Beltrami-Michell), trecerea de la tensiunile determinate pe model la cele ale prototipului se face, în cazul în care μ_m diferă de μ_n, cu ajutorul unor relații analitice [24]. Folosirea acestora necesită însă experimentarea pe două modele (în cazul stării plane) sau pe trei modele (în cazul stării spațiale), confecționate din materiale diferite (avînd $\mu_{m1} \neq \mu_{m2}$ respectiv $\mu_{m1} \neq \mu_{m2} \neq \mu_{m3}$).

Corecțiile care trebuie aplicate factorilor de scară ai modelelor distorsionale depind de mărimea studiată, variind în limite destul de largi. În unele cazuri aceste corecții pot atinge 100 % sau chiar mai mult. Acesta este cazul mărimilor în care intervine expresia rațională $(1-2\,\mu)$, dacă $\mu_n \leqslant 0{,}3$ iar $\mu_m \geqslant 0{,}4$.

Coeficienții de corecție sînt în general neglijabili, dacă $\mu_n \approx \mu_m$.

În cazul stării plane, distribuția tensiunilor și deformațiilor nu depinde de constantele elastice, dacă modelul este simplu conex [32]. În cazul

modelelor multiplu conexe (cu diverse orificii), distribuţia tensiunilor este independentă de constantele elastice numai dacă rezultanta şi momentul rezultant al forţelor aplicate fiecărui contur sînt nule. Mărimile tensiunilor depind însă de constantele elastice. În celelalte cazuri coeficientul lui Poisson influenţează atît distribuţia cît şi valorile tensiunilor.

10.5.2. RELAŢII ÎNTRE FACTORII DE SCARĂ ÎN MODELAREA BARELOR, SISTEMELOR DE BARE ŞI PLĂCILOR

Relaţiile dintre factorii de scară, necesare pentru proiectarea modelelor barelor şi sistemelor de bare, se obţin din criteriile de similitudine care alcătuiesc legile de modelare respective (§ 10.4).

Astfel, de exemplu, în modelarea stabilităţii reţelelor ortogonale plane se aleg factorii de scară $K_{L^{(1)}}$ şi $K_{L^{(2)}}$. Din (10.56) rezultă $K_{a_r^{(1)}} = K_{L^{(1)}}$, $(r = 1, \ldots, n)$ şi $K_{a_s^{(2)}} = K_{L^{(2)}}$, $(s = 1, \ldots, m)$. Se alege de asemenea $K_{I_r^{(1)}}$, pentru o grindă oarecare r, după care din (10.54) rezultă, pentru o grindă oarecare s (ortogonală cu r)

$$K_{I_s^{(2)}} = \frac{K_{L^{(2)}}^3 K_{I_r^{(1)}}}{K_{L^{(1)}}^3}. \qquad (10.93)$$

Factorii de scară ai momentelor de inerţie ale celorlalte $(n-1)$ respectiv $(m-1)$ grinzi, trebuie să satisfacă criteriile (10.55).

În sfîrşit din criteriul (10.57) se determină factorul de scară pentru forţele axiale de compresiune

$$K_{N_r} = \frac{K_E K_{I_r^{(1)}}}{K_{L^{(1)}}^2}. \qquad (10.94)$$

În mod analog se procedează în stabilirea factorilor de scară în modelarea plăcilor, cu singura deosebire că, dacă criteriul (10.67) nu este îndeplinit, modelul folosit în studiul tensiunilor este distorsionat. Consecinţele şi corecţiile care trebuiesc aduse în acest caz factorilor de scară au fost analizate la § 10.5.1.

10.6. ALEGEREA MATERIALELOR PENTRU MODELE

O importanţă deosebită în problemele de modelare o are alegerea materialelor din care se confecţionează modelele.

În alegerea materialelor o primă importanţă o au caracteristicile mecanice, care trebuie să corespundă scopului pentru care este construit modelul. Astfel, pentru studiul în domeniul elastic prezintă importanţă limita de proporţionalitate şi valoarea modulului de elasticitate, fără să intereseze mărimea limitei de curgere. Dacă se examinează deformaţiile elasto-plastice mici ale unei structuri, prezintă importanţă limita de

curgere, dar nu interesează mărimea rezistenţei la rupere a materialului folosit pentru confecţionarea modelului structurii respective.

În determinarea sarcinilor limită rolul hotărîtor îl au rezistenţa la rupere şi alungirea specifică la rupere.

La alegerea materialelor trebuie avute, de asemenea, în vedere posibilităţile de prelucrare a formelor modelului, modul de îmbinare a elementelor sale componente precum şi posibilităţile de solicitare ale acestuia. În sfîrşit, materialele folosite pentru confecţionarea modelelor trebuie să fie ieftine şi accesibile.

Modelele metalice, masive sau realizate din table, se utilizează de obicei în studiul deformaţiilor elasto-plastice, în determinarea sarcinilor limită, precum şi în alte cazuri în care se studiază fenomene complexe, legate de comportarea structurilor.

Caracteristicile mecanice ale modelelor metalice trebuie să fie aceleaşi (sau foarte apropiate) de ale prototipului.

În cazul modelelor metalice alcătuite din plăci este foarte important ca tablele folosite să aibă variaţii de grosime cît mai mici, un grad de anizotropie cît mai redus şi, dacă îmbinarea se realizează prin sudură, materialul trebuie să prezinte o bună sudabilitate, astfel ca deformaţiile care apar la montaj să fie minime.

Pentru cercetarea deformaţiilor şi tensiunilor în domeniul elastic se folosesc mase plastice transparente sau semitransparente cum ar fi plexiglasul, celuloidul, fenoplastul (material plastic cu baza de fenol şi aldehidă formică), ş.a. Dintre acestea cea mai largă întrebuinţare o are plexiglasul.

Plexiglasul este un material uşor, omogen şi cu izotropie destul de ridicată, avînd coeficientul lui Poisson apropiat de al oţelului. Valoarea mică a modului de elasticitate al plexiglasului permite obţinerea unor deformaţii sensibile, măsurabile cu aparatura tensometrică obişnuită, prin încărcări suficient de mici $\left(50 - 100 \dfrac{\text{daN}}{\text{cm}^2}\right)$. Modulul de elasticitate este practic acelaşi la întindere şi compresiune, dar depinde de temperatură. Astfel, în domeniul temperaturilor obişnuite (15—20°C), valoarea modulului de elasticitate se modifică în limitele $\pm 5\,\%$, ceea ce introduce erori suficient de mici în calculul tensiunilor ($\pm 2\,\%$). În modelarea problemelor dinamice se foloseşte modulul de elasticitate dinamic, a cărui valoare depinde de frecvenţa vibraţiei.

Determinarea constantelor elastice se recomandă a se face în laborator, pentru fiecare lot în parte sau chiar pentru fiecare foaie de plexiglas în parte.

Înlăturarea tensiunilor interne şi stabilizarea caracteristicilor mecanice se pot realiza printr-o încălzire uniformă, timp de 2—3 ore, la temperatura de 75 — 100°C. Acest tratament termic are ca efect o reducere a dimensiunilor liniare din planul plăcii cu 2—3 % şi o mărire a grosimii cu 4 — 5 %.

Materialele plastice au conductibilitatea termică mult mai mică, în comparaţie cu a metalelor. Astfel, de exemplu, la 20°C, plexiglasul are coeficientul de conductibilitate termică $\lambda = 0{,}15$ kcal/m·h·grd, faţă

de 20 — 50 kcal/m · h · grd, pentru oţel şi 100 — 140 kcal/m · h · grd, pentru duraluminiu. Din această cauză, în cazul testării modelelor prin metoda tensometriei electrice este mult încetinit procesul de egalizare a temperaturii mărcii (încălzită datorită curentului electric care trece prin circuitul punţii) şi modelului, fenomen denumit „fluaj aparent". Acest fenomen, precum şi fluajul real — care se manifestă mult mai pronunţat la materialele plastice, chiar la temperaturi obişnuite — impun ca măsurările să se execute după cîteva minute de la aplicarea încărcărilor, la temperaturi cît mai constante şi solicitînd modelul la tensiuni care să nu depăşească 100 daN/cm². Deformaţia care apare datorită acestei solicitări, în cazul unui material avînd $E = 30000 \frac{daN}{cm^2}$, este $\varepsilon = 0,0033$, valoare care se poate măsura cu uşurinţă. Fluajul aparent mai poate fi evitat prin menţinerea continuă a traductorilor la o tensiune electrică egală cu cea de măsurare, dată de o sursă exterioară punţii [9].

Pentru cercetări în domeniul elasto-plastic se folosesc materiale pe bază de policlorură de vinil (plastifiate termic). Cu rezultate deosebit de bune se pot folosi materialele indigene SDP şi CSDP materiale care au la bază compounduri vinilice, obţinute la ICECHIM [3]. Acestea au curba caracteristică apropiată de aceea a materialelor ideal plastice, limita de curgere variază între 550 daN/cm² şi 620 daN/cm², în funcţie de temperatură şi de tipul solicitării. Odată cu apariţia deformaţiilor plastice aceste materiale îşi schimbă culoarea, albindu-se la întindere şi întunecîndu-se la compresiune. Restul materialului, solicitat sub limita de curgere, îşi păstrează culoarea naturală, în general galben — deschis. Datorită acestei proprietăţi aceste materiale se numesc cromoplatice.

Cîteva caracteristici mecanice şi fizice ale materialelor mai frecvent folosite la confecţionarea modelelor sînt date în tabelul 10.1.

Tabelul 10.1

Caracteristici aproximative ale cîtorva materiale plastice utilizate pentru modele tensometrice

Materialul	Modulul de elasticitate $E\left[\frac{daN}{cm^2}\right]$	Coeficientul lui Poisson μ	Limita de proporţionalitate $\sigma_p\left[\frac{daN}{cm^2}\right]$	Rezistenţa la rupere $\sigma_r\left[\frac{daN}{cm^2}\right]$	Greutatea specifică $\gamma\left[\frac{daN}{dm^3}\right]$
Plexiglas	$2,5 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^4$	0,35	300	500—600	1,2
Celuloid	$1,4 \cdot 10^4 - 1,5 \cdot 10^4$	0,4	250—300	300—600	1,5
Fenoplast (rezit turnat)	$3,2 \cdot 10^4$	0,35	400	—	1,2—1,3
SDP, CSDP *)	$2.10^4 - 3,8 \cdot 10$	0,35	$\sigma = 550 - 620$	600—680	—

* Prin modificarea condiţiilor tehnologice de obţinere şi prin modificarea caracteristicilor ingredienţilor folosiţi s-a reuşit o diversificare foarte mare a acestor materiale.

Scanned with OKEN Scanner

Modelele de cauciuc se folosesc, de obicei, pentru obținerea unor rezultate calitative. Ele sînt ieftine, accesibile și ușor prelucrabile, însă prezintă o serie de neajunsuri, legate de neliniaritatea relației dintre tensiuni și deformații (modulul de elasticitate al cauciucului variază între limite foarte largi : $2-7\ \frac{daN}{cm^2}$ [20]). Coeficientul lui Poisson are valori foarte mari ($\mu = 0{,}46 - 0{,}49$). În cazul în care se folosesc la măsurări cantitative, alungirile specifice care apar în modelele confecționate din cauciuc se limitează la 10 — 12%. În acest domeniu modulul de elasticitate are variații mici. Pentru stabilirea deformațiilor datorite fluajului pronunțat, modelele din cauciuc se mențin sub sarcină cca 30 minute, după care se efectuează măsurările. Acestea se fac, de obicei, prin metoda rețelelor (trasate cu tuș) sau prin metoda tensometriei electrice rezistive, folosind traductori pentru deformații mari [20], [39].

Stabilitatea construcțiilor, alcătuite din elemente subțiri (învelitori, rezervoare, etc.) se poate studia pe modele confecționate din carton, tratat cu ajutorul unor lacuri speciale, pe bază de ulei. Deși prezintă un grad destul de ridicat de anizotropie $\left(E_x \cong 3.10^4 \frac{daN}{cm^2};\ E_y \cong 2{,}26 \cdot 10^4 \frac{daN}{cm^2};\ \mu_{xy} = 0{,}28;\ \mu = 0{,}23;\ G = 0{,}996 . 10^4 \frac{daN}{cm^2}\right)$ și are caracteristici mecanice nestabile, s-au realizat încercări cu bune rezultate prin această metodă [8].

La executarea modelelor folosite în studiul tensiunilor datorită greutății proprii se folosesc materiale gelatinoase, avînd valori foarte mici ale modulului de elasticitate $\left(\text{sub } 10 \frac{daN}{cm^2}\right)$.

Unele modele ale structurilor întîlnite în construcții navale și aeronautice se confecționează din materiale stratificate, care au o rezistență superioară la încovoiere și stabilitate. Dacă umplutura dintre plăcile metalice este formată din polistiren sau fenoplast expandat se realizează și o bună izolare termică și acustică.

Materialele optic-active, folosite la confecționarea modelelor, utilizate în fotoelasticitate, au fost descrise la capitolul 4.

10.7. EXECUTAREA MODELELOR

Modelele metalice masive se execută după aceeași tehnologie după care se execută prototipul, avînd însă grijă să se asigure calitatea necesară a suprafețelor. Îmbinarea prin sudură a tablelor de grosimi mici (0,2—0,5 mm), practic nu se poate realiza. În caz că totuși se execută apar deformații foarte mari. Din acest motiv îmbinările tablelor subțiri ale modelelor se execută prin nituire, prin sudură electrică (cu rezistență de contact) sau prin lipire, folosindu-se după împrejurări, aliaje tari (pe bază de cupru,

cupru-zinc, argint) sau moi (pe bază de plumb și staniu). Croirea și tăierea tablelor și profilelor se execută prin mijloace obișnuite iar curbarea și îndoirea se execută la valțuri cu role sau la alte dispozitive simple.

Modelele din mase plastice se execută prin prelucrări mecanice la mașini de frezat, strunjit, găurit, după ce s-a efectuat trasarea și tăierea materialelor. La folosirea acestor mijloace de prelucrare trebuie avute în vedere două particularități ale maselor plastice (și în deosebi ale plexiglasului) și anume fragilitatea ridicată și conductibilitatea termică scăzută.

Pentru evitarea apariției fisurilor în timpul prelucrării datorită fragilității ridicate a materialelor plastice, este necesar a se folosi scule bine ascuțite, care să respecte întocmai unghiurile de tăiere. De asemenea, este necesar a se respecta regimul de tăiere stabilit pentru astfel de materiale. Vibrațiile în timpul prelucrării se evită prin fixarea corespunzătoare a modelului și a sculei.

Conductibilitatea termică scăzută a materialelor plastice duce la încălzirea mai rapidă a sculei, prin urmare la uzura mai intensă a acesteia. Căldura degajată în procesul de tăiere duce la înmuierea materialului, lipirea lui pe sculă și, deci, la mărirea frecării dintre material și suprafața sculei. În consecință apare o degajare și mai mare de căldură, care poate provoca chiar topirea materialului. Pentru răcire nu se folosește apa sau alte lichide ci se fac pauze sau se utilizează aer comprimat (care înlătură și șpanul format).

Prelucrarea formelor complicate ale modelelor se face cu pile și șmirghel. La fel și finisarea suprafețelor.

O atenție deosebită trebuie acordată calității suprafețelor, caracterizate prin existența micro și macro neregularităților, care pot apare în procesul de prelucrare.

Calitatea suprafețelor influențează distribuția de tensiuni și deformații, prin creșterea locală a tensiunilor cauzată de strivirea unor neregularități, precum și prin apariția unor deplasări suplimentare, elasto-plastice, a suprafețelor în contact. Deplasările totale (u_c) ale punctelor suprafețelor în contact se compun din deplasările generale ale corpului (u_{c_1}) și din deplasările elasto-plastice (u_{c_0}) datorită neregularităților. Satisfacerea cît mai corectă a condițiilor de similitudine impune o astfel de prelucrare a suprafețelor în contact, încît deplasările u_{c_0} ale modelului și prototipului să se afle în același raport (10.29, a) în care se află deplasările u_{c_1}, al căror factor de scară este dat de relația (10.77)

$$\frac{u_{con}}{u_{com}} = \frac{u_{c1n}}{u_{c1m}} = K_{uc} = \frac{K_p K_L}{E_E} = K_{uco} = K_{uc1} \qquad (10.95)$$

Dacă se face notația

$$K_k = \frac{K_E}{K_L} \qquad (10.96)$$

relația (10.95) se scrie sub forma

$$K_p = K_k \, K_{uc1} \qquad (10.97)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că modelarea calității suprafețelor în contact trebuie realizată nu numai geometric (pe înălțimea neregularităților) ci și după rigiditatea stratului superficial, al cărui factor de scară este dat de relația (10.96). Rigiditatea k a stratului superficial se determină experimental, pentru diverse materiale (avînd diferite grade de prelucrare a suprafeței) și diferite presiuni aplicate [19].

Pentru măsurarea deformațiilor în interiorul materialului, modelele se execută din plăci încleiate (între care se montează traductoare rezistive) sau prin turnarea în straturi a rășinilor epoxidice.

Modelele din materiale plastice ale structurilor alcătuite din plăci subțiri se confecționează prin îmbinarea detaliilor (prelucrate separat, conform proiectului) prin sudură. Uneori, înainte de sudură, părțile componente ale modelului se supun unui tratament termic de recoacere, la 110 — 115°C.

Lipirea detaliilor se face prin încălzire locală și adăugare de șpan (din același material), care se topește cu ajutorul letconului. Marginile îmbinate se prelucrează în prealabil corespunzător. O astfel de îmbinare este suficient de rigidă și asigură o rezistență locală de 300 — 400 daN/cm² (la încovoiere sau forfecare prin răsucire) suficientă pentru modelele utilizate în tensometrie.

Detaliile cu simplă sau dublă curbură se realizează la cald cu ajutorul matrițelor.

În cazurile în care modelul are zone închise, montarea detaliilor care închid aceste zone se face concomitent cu lipirea traductoarelor rezistive.

10.8. SOLICITAREA MODELELOR

Încărcările aplicate modelelor reproduc două tipuri de forțe care pot solicita prototipul și anume : forțe de suprafață, care se datoresc contactului elementului studiat cu altele învecinate și forțe volumice (gravitaționale sau inerțiale).

Forțele de suprafață se pot aplica modelului prin dispozitive mecanice (cu pîrghii, cu șurub, cu arcuri), sau prin sisteme pneumatice și hidraulice.

Dispozitivele de încărcare cu pîrghii, acționate prin greutăți, folosesc pentru realizarea forțelor care nu depășesc 10 — 15 kN. Încărcări pe suprafețele exterioare sau presiuni în interiorul modelelor închise (rezervoare, cilindri) de 0,5 — 5 daN/cm² se obțin cu ajutorul sistemelor pneumatice. Presiuni interioare mai mari de 5 daN/cm² se realizează prin sisteme hidraulice. Încărcări pe suprafețe exterioare, care depășesc 5 daN/cm² se pot obține prin sisteme mecanice dar mai ales cu ajutorul cilindrilor hidraulici. Forțele volumice se pot realiza prin centrifugarea modelului.

Dispozitivele de încărcare trebuie să îndeplinească următoarele condiții :

— să reproducă fără denaturări, sarcinile aplicate prototipului;
— să poată realiza încărcarea continuă sau în trepte ;

— în cazul încărcărilor complexe, să permită aplicarea, separată sau simultană, a forțelor care alcătuiesc încărcarea complexă; aplicarea unei încărcări nu trebuie să conducă la modificarea celorlalte;

— în timpul procesului de deformare a modelului mărimea și direcția forțelor aplicate nu trebuie să se modifice și nu trebuie să apară forțe suplimentare;

— fiecare din încărcări să poată fi măsurată;

— să fie simple din punct de vedere constructiv și al montajului și ușor de controlat în timpul încărcărilor.

Dispozitivele de încărcare sînt alcătuite, în general, din următoarele părți componente:

— elemente de aplicare a încărcării asupra modelului (dispozitive de prindere, suporturi, reazeme, dispozitive de presare, elemente de aplicare a sarcinilor continue);

— elemente de transmitere a forțelor, care asigură un anumit raport de amplificare și direcția dorită; ele se folosesc uneori și pentru măsurarea forțelor;

— elemente de forță (greutăți, resoarte, înșurubări, cilindri hidraulici sau pneumatici);

— scheletul de rezistență (cadru, carcasă, batiu, suport) pentru fixarea modelului și a părților componente ale dispozitivului de încărcare;

— elemente de măsurare a sarcinilor aplicate modelelor.

Forțele concentrate de întindere se aplică modelelor cu ajutorul unor plăcuțe prinse cu bolțuri metalice ca în figura 10.5.

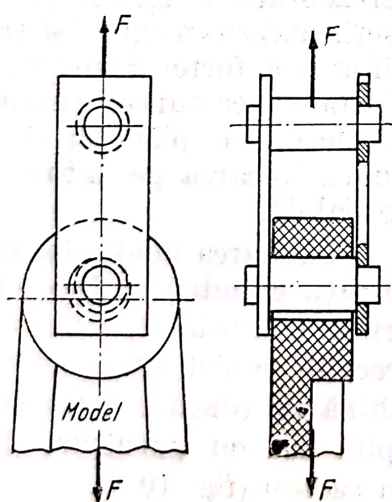


Fig. 10.5

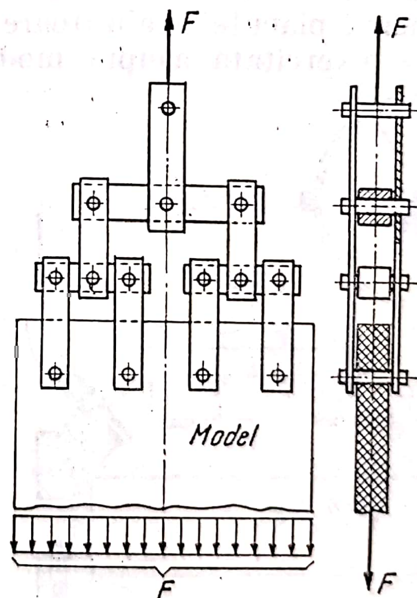


Fig. 10.6

Dacă se studiază starea de tensiuni din îmbinare, bolțul face parte din model, confecționîndu-se din materialul potrivit.

Întinderea uniformă pe o porțiune din conturul modelului se poate realiza ca în figura 10.6.

Forţele de compresiune concentrate se aplică prin intermediul rondelelor din cauciuc, plumb sau carton. La solicitarea de compresiune a modelelor plane sau a barelor, aplicarea perfect centrică a forţelor are o mare importanţă, excentricităţile determinînd apariţia tensiunilor suplimentare de încovoiere, sau chiar pierderea stabilităţii modelului. Pentru a preîntîmpina apariţia acestui din urmă fenomen se prevăd rezemări suplimentare pentru împiedicarea deplasărilor laterale, care să nu modifice însă condiţiile la limită.

Aplicarea unei forţe concentrate ca în figura 10.7, a prin intermediul plăcilor egalizatoare bine ajustate *1*, determină o distribuţie a presiunii pe

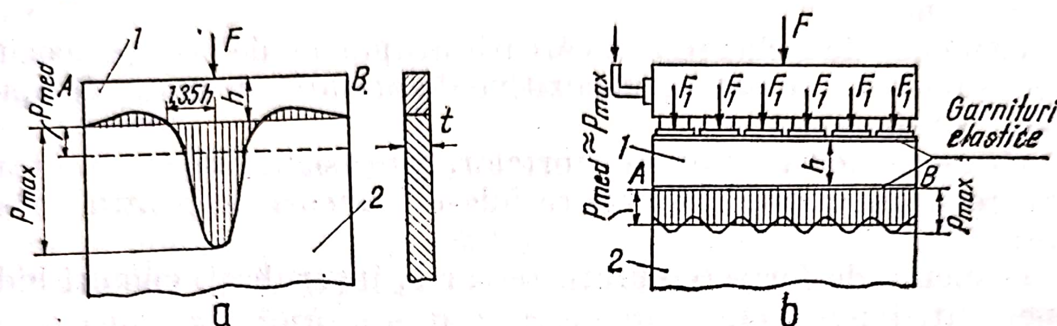


Fig. 10.7

modelul *2*, apropiată de cea obţinută cu formula de calcul a tensiunilor normale ce apar într-un semiplan elastic, la distanţa *h* de margine, prin aplicarea unei forţe *F*.

Aplicînd plăcuţei egalizatoare *1* (fig. 10.7, b) mai multe forţe F_1, egale, presiunea exercitată asupra modelului *2* va avea o distribuţie ca cea reprezentată în fig. 10.7, b. Procedeul descris mai sus asigură o transmitere uniformă a forţei *F* modelului, dacă rigiditatea acestuia este mult mai mare faţă de cea a plăcuţei de egalizare şi dacă frecarea pe latura *AB* este neglijabilă.

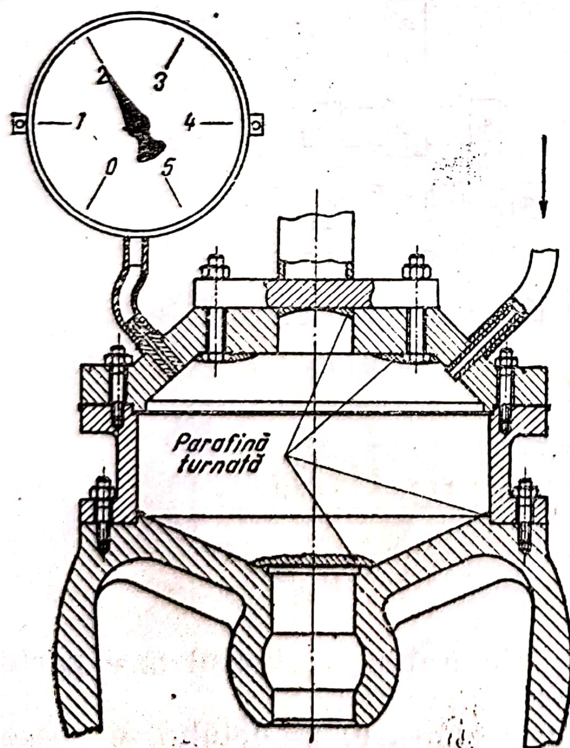


Fig. 10.8

Solicitarea modelelor închise (recipienţi, cilindri) se face cu ajutorul aerului comprimat, care este trimis direct în model, după ce s-au etanşat îmbinările (dacă există) cu parafină topită sau cu garnituri de cauciuc sau carton (fig. 10.8).

Încărcarea după o lege oarecare se poate realiza în mod aproximativ cu ajutorul unui sistem de forţe paralele, ale căror mărimi variază conform legii date. Pentru proiectarea unui astfel de dispozitiv, se împarte epura

Scanned with OKEN Scanner

presiunilor care trebuie realizată (fig. 10.9) în 2^n arii, cărora li se determină centrele de greutate, în dreptul acestor puncte fiind aplicat primul rînd de role, care acționează asupra plăcuțelor ce vin în contact cu modelul și care se extind corespunzător ariilor în care s-a făcut împărțirea. Pentru 2^{n-1}

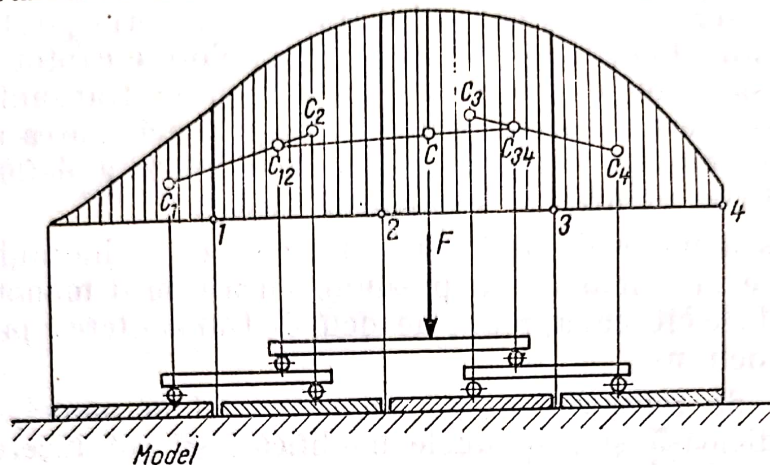


Fig. 10.9

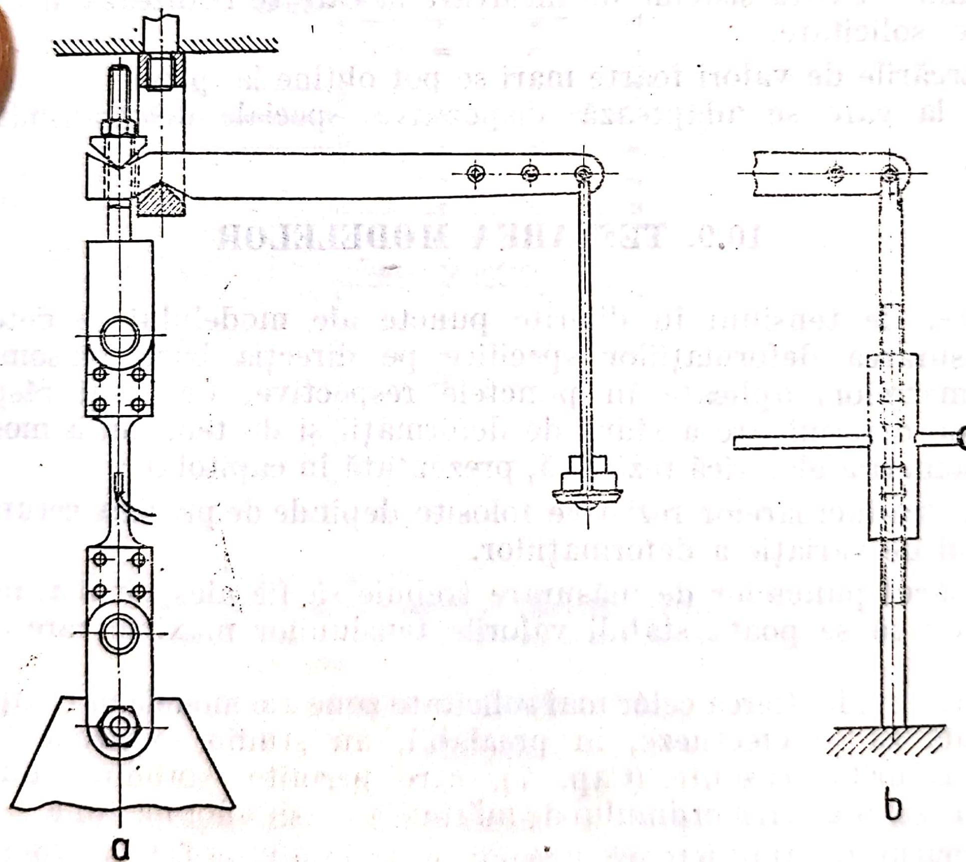


Fig. 10.10

grupe învecinate de cîte două arii se află din nou centrele de greutate, în dreptul cărora se aplică al doilea rînd de role ș.a.m.d.

Elementele cele mai răspîndite de transmitere a forțelor sînt pîrghiile, care se folosesc atît pentru amplificarea cît și pentru modificarea direcției de acțiune a forțelor. În figura 10.10 este reprezentat un dispozitiv de încăr-

Scanned with OKEN Scanner

care cu pîrghii, folosind drept elemente de încărcare greutăţi (fig. 10.10, a) sau un manşon filetat în două sensuri la cele două capete (fig. 10. 10, *b*).

Măsurarea forţelor relativ mici (pînă la 50 kN) se face direct cu ajutorul dinamometrelor cu arc. La sistemele de încărcare prin greutăţi, dinamometrele servesc şi la controlul transmiterii prin pîrghii a încărcării asupra modelului. Pentru forţe mai mari se folosesc captori cu elemente elastice (inele sau lamele) intercalate în sistemul de transmitere a forţelor. În acest caz forţele se măsoară indirect, fie prin măsurarea unor deplasări ale elementului elastic, fie prin citirea la o punte a deformaţiilor unui traductor rezistiv, montat pe elementul elastic.

În cazul sistemelor de încărcare pneumatice sau hidraulice măsurarea forţelor se face prin măsurarea presiunii cu ajutorul manometrelor, care trebuiesc montate cît mai aproape de locul de transmitere a presiunii fluidului asupra modelului.

Scheletul de rezemare diferă de la model la model, dar, printr-o proiectare judicioasă şi prin unele modificări se pot încerca mai multe modele diferite pe acelaşi stand. Pentru modele relativ mici (cca 1000×1000 mm^2) există sisteme de încărcare la care se realizează mai multe tipuri de solicitare.

Încărcările de valori foarte mari se pot obţine la prese sau maşini de încercat, la care se adaptează dispozitive speciale de transmitere a forţelor.

10.9. TESTAREA MODELELOR

Starea de tensiuni în diferite puncte ale modelului se determină prin măsurarea deformaţiilor specifice pe direcţia bazei tensometrelor (extensometrelor) aplicate în punctele respective. Cea mai răspîndită metodă de determinare a stării de deformaţii şi de tensiuni a modelului este tensometria electrică rezistivă, prezentată în capitolul 3.

Baza traductoarelor rezistive folosite depinde de precizia cerută şi de gradientul de variaţie a deformaţiilor.

Numărul punctelor de măsurare trebuie să fie ales cît mai raţional, astfel încît să se poată stabili valorile tensiunilor maxime care apar în model.

Pentru evidenţierea celor mai solicitate zone ale modelelor complexe se recomandă să se efectueze, în prealabil, un studiu experimental prin metoda lacurilor casante (Cap. 7), care permite stabilirea direcţiilor principale şi aprecierea ordinului de mărime a tensiunilor maxime.

Numărul de traductoare necesar a fi montate într-un punct sau într-o secţiune, în diferite cazuri, modul de montare a acestora şi metodologia de determinare a deformaţiilor şi tensiunilor principale sînt prezentate în capitolul 3.

Concomitent cu măsurarea deformaţiilor, sau independent de aceasta, se determină deplasările diferitelor puncte ale modelului, cu ajutorul comparatoarelor, montate pe scheletul de rezemare.

Scanned with OKEN Scanner

Valorile deformaţiilor, tensiunilor şi deplasărilor determinate pe model se trec într-un tabel, după care se face trecerea la prototip, pe baza legii de modelare folosită la proiectarea modelului. Valorile, care sînt sensibil în afara legii de variaţie a tensiunilor într-o anumită zonă, se elimină.

Aplicaţii 1°. *Grinda cu platbande late.* Grinzile, avînd secţiunea formată dintr-o inimă de care sînt sudate două platbande late (fig. 10.11), se întîlnesc frecvent în construcţii metalice, navale, etc.

Antrenarea platbandelor la încovoierea acestor grinzi se face prin intermediul tensiunilor tangenţiale transmise acestora de inimă, care preia încărcarea transversală. Din această cauză tensiunile normale au o repartiţie neuniformă pe lăţimea platbandelor (fig. 10.13).

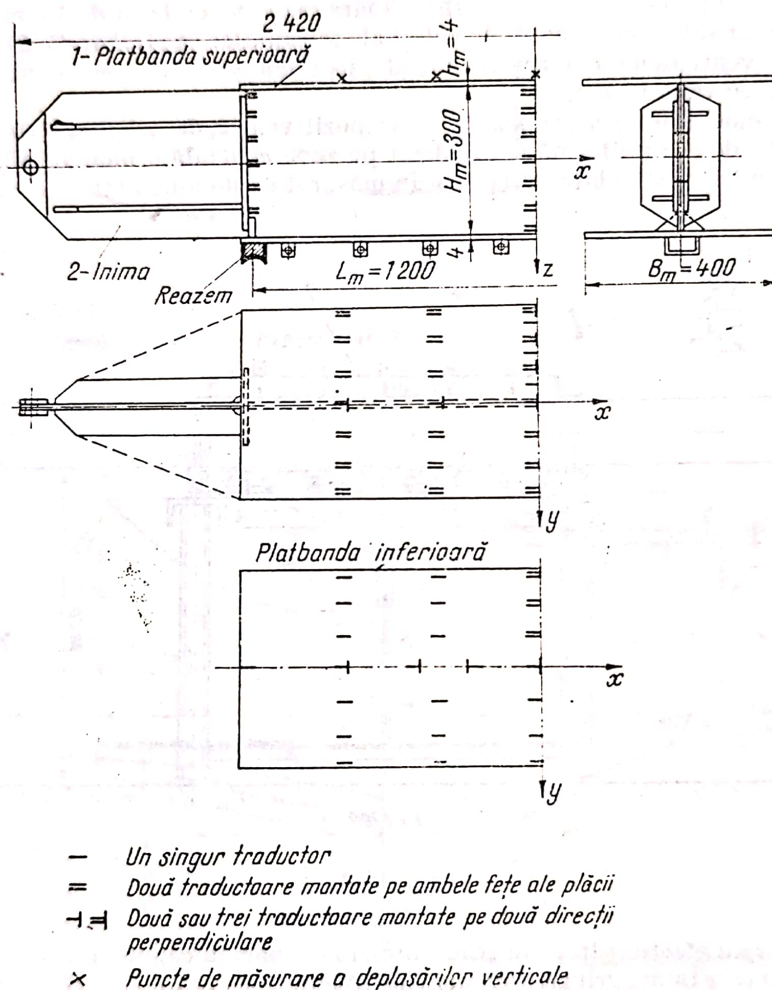


Fig. 10.11.

O problemă fundamentală care apare în studiul acestor grinzi este determinarea „lăţimii active", adică a acelei lăţimi, care în ipoteza distribuţiei uniforme a tensiunilor, egale cu tensiunea maximă din inimă, preia aceeaşi forţă ca şi lăţimea reală.

Întrucît recomandările privind alegerea lăţimii active sînt incomplete şi contradictorii [23], s-a impus verificarea, corectarea şi completarea acestora. Cea mai eficientă metodă pentru rezolvarea acestui scop s-a dovedit a fi metoda elementelor finite, care permite luarea în considerare a influenţei tuturor parametrilor, care determină comportarea grinzilor cu tălpi late [17]. Folosind această metodă pentru analiza stării de tensiuni în platbandele grinzilor cu tălpi late, s-au comparat totodată unele rezultate cu cele obţinute prin efectuarea măsurărilor tensometrice pe modele [18].

În figura 10.11 este prezentat unul din modelele utilizate, confecționat din plexiglas, avînd modulul de elasticitate $E_m = 33000 \frac{daN}{cm^2}$ și coeficientul lui Poisson $\mu_m = 0,35$. Dimensiunile principale ale modelului sînt: $L_m = 1200$ mm; $B_m = 400$ mm; $H_m = 300$ mm; $L_{1m} = 2420$ mm. Pentru a preîntîmpina pierderea stabilității plăcilor s-au montat la capete diafragme și plăcuțe de rigidizare, care nu modifică starea de tensiuni. Grosimea plăcilor din care a fost confecționat modelul a fost $h_m = 4$ mm.

Montajul elementelor componente ale modelului s-a făcut prin cordoane de sudură realizate prin turnarea unor adezivi formați din două componente.

Testarea modelului s-a efectuat pe standul reprezentat în figura 10.12.

Săgețile au fost măsurate cu ajutorul comparatoarelor *4*, montate pe bara *7*, pentru a elimina influența tasării reazemelor.

Pe model s-au montat în total 104 traductoare rezistive cu baza de *5* mm, ceea ce a permis obținerea unui număr suficient de mare de valori ale tensiunilor în platbandă și în inimă. Pentru a elimina influența eventualelor deformații inițiale, în unele secțiuni s-au montat traductoare pe ambele fețe ale plăcii (fig. 10.12).

Încărcarea modelului s-a realizat prin dispozitivele *2* de solicitare cu șurub-piuliță. O încărcare apropiată de cea uniformă s-a realizat pe zona centrală a modelului cu ajutorul sistemului *1*, format din bare articulate. Forțele s-au măsurat cu dinamometrele *3*.

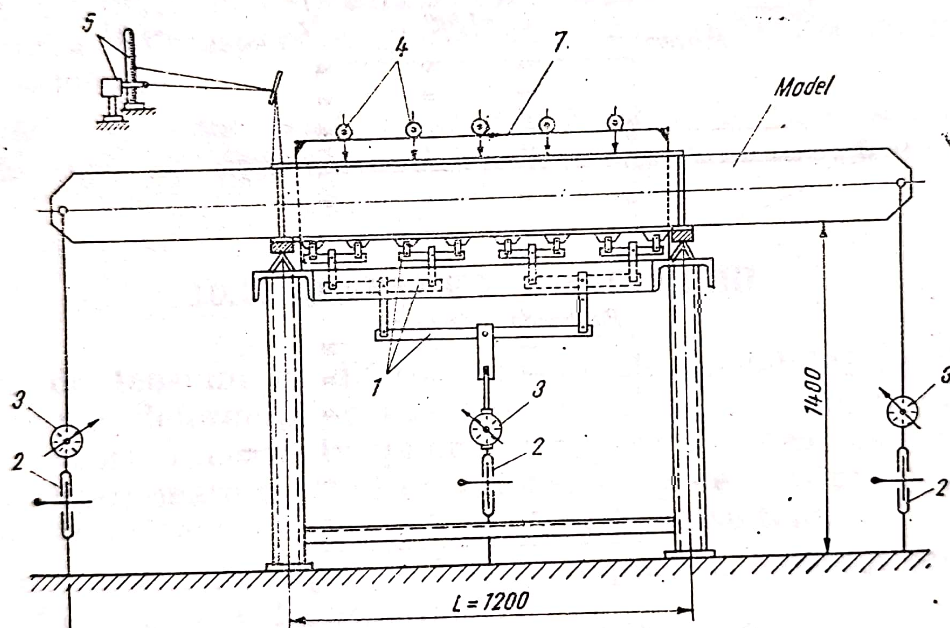


Fig. 10.12.

Măsurările s-au efectuat în condițiile simplei rezemări la capete a grinzii (experiment I) și apoi în condițiile în care inima grinzii este încastrată total în secțiunile de rezemare (experiment II). În ambele experimente marginile transversale și longitudinale ale platbandelor au rămas neîncărcate. Realizarea încastrării totale în cazul experimentului II a fost posibilă prin încărcarea consolelor grinzii cu forțele F_1, astfel încît unghiurile de rotire ale secțiunilor de rezemare, măsurate cu ajutorul dispozitivului de amplificare optică *5*, să fie nule.

Calculul prin metoda elementelor finite a fost efectuat pentru grinzi cu tălpi late, confecționate din oțel avînd $\mu_n = 0,3$ și $E_n = 2,1 \cdot 10^6 \frac{daN}{cm^2}$. Dimensiunile acestor grinzi au fost: $L_n = 12$ m; $B_n = 4$ m; $H_n = 3,0$ m; $h_n = 12$ m.

Întrucît modelul este alcătuit din domenii simplu conexe, distribuția de tensiuni, care interesează în mod deosebit, nu este influențată de constantele elastice. Modelul fiind distorsionat ($K_\mu \neq 1$) și neputîndu-se stabili coeficienții de corecție, așa cum s-a arătat la § 10.5.1, c, ar fi fost necesar să se facă testări pe două modele confecționate din materiale diferite ($\mu_{1m} \neq \mu_{2m}$),

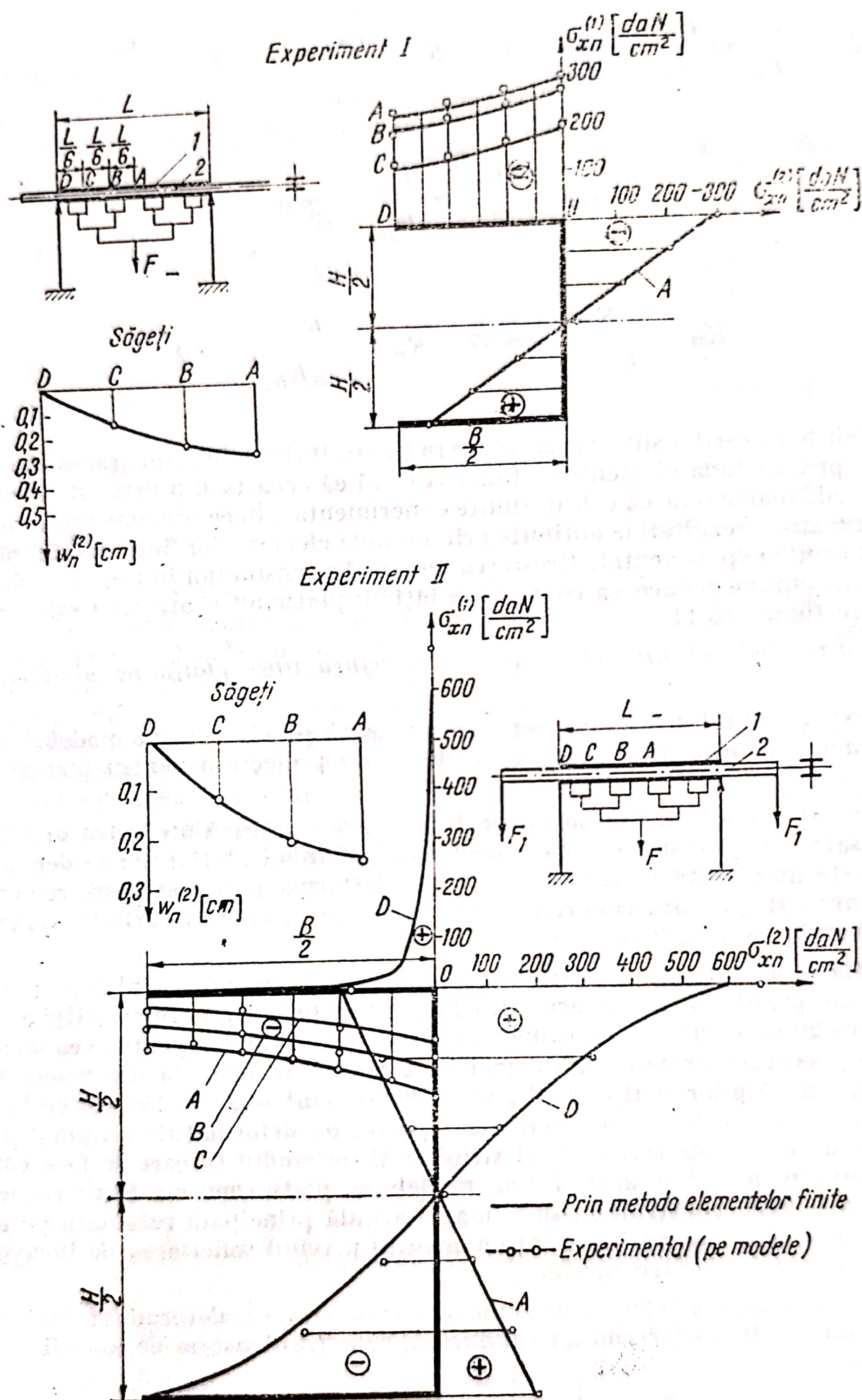

Experiment I
Săgeți
Experiment II
Săgeți
Prin metoda elementelor finite
Experimental (pe modele)

Fig. 10.13.

însă diferenţa dintre $\mu_m = 0,35$ şi $\mu_m = 0,3$ fiind mică, influenţa coeficientului lui Poisson se neglijează (în cazul unei diferenţe între coeficienţii lui Poisson de 0,15 eroarea maximă care ar fi apărut, în cazul unui model multiplu conex, ar fi fost de 7,5 % [12]). În aceste condiţii, factorii de scară pentru tensiuni şi deplasări sînt daţi de relaţiile (10.81). Întrucît

$$K_L = \frac{L_n}{L_m} = \frac{B_n}{B_m} = \frac{H_n}{H_m} = 10\,; \quad K_h = \frac{h_n}{h_m} = 3\,; \quad K_E = \frac{E_n}{E_m} = 63{,}8,$$

şi luînd

$$K_F = \frac{F_n}{F_m} = \frac{F_{1n}}{F_{1m}} = 200,$$

rezultă

$$K_\sigma = \frac{K_F}{K_L K_h} = 6{,}67\,; \quad K_u = \frac{K_F}{K_E K_h} = 1{,}02 \cdot$$

Rezultatele măsurărilor sînt reprezentate în figura 10.13. Din compararea acestor rezultate cu cele obţinute prin metoda elementelor finite rezultă că aceasta din urmă dă pentru deplasări valori care concordă foarte bine cu cele obţinute experimental. În ce priveşte tensiunile, exceptînd zonele cu concentratori, rezultatele obţinute prin metoda elementelor finite nu diferă cu mai mult de 8 % de cele obţinute experimental. Creşterea sensibilă a tensiunilor în zonele de discontinuitate a secţiunii grinzii impune reducerea continuă a lăţimii platbandei, aşa cum este reprezentat cu linii întrerupte în figura 10.11.

2) *Studiul pe model al unor elemente din structura unei platforme plutitoare autoridicătoare* [7].

Studiul experimental, prezentat în cele ce urmează s-a efectuat pe modelul unor elemente din structura unei platforme plutitoare autoridicătoare proiectată pentru lucrările de amenajare a albiei Dunării.

Platforma este alcătuită din pontoane K.S.3 care formează un cadru dreptunghiular pe care sînt amplasate utilajele şi instalaţiile de forţă. În lungul platformei se deplasează un pod rulant pe care este amplasată instalaţia de foraj. Platforma plutitoare este remorcată pînă la locul de forare, unde stîlpii sînt coborîţi şi apoi, cu ajutorul unor cricuri hidraulice (fig. 10.14), platforma se ridică la cota de lucru.

Construcţia se prezintă ca un sistem spaţial static nedeterminat (platforma sprijinindu-se pe patru stîlpi, iar prinderea de fiecare stîlp făcîndu-se prin tije). Între stîlpi şi grinzi a fost prevăzut un joc de 20 mm. Pînă la consumarea acestui joc platforma poate avea mici deplasări în planul orizontal. Deoarece grinzile platformei au o rigiditate mare la încovoiere şi răsucire în raport cu rigiditatea stîlpilor şi tijelor ($I_{gr} = 13599100$ cm^4 şi $I_{st} = 197000$ cm^4), repartizarea eforturilor în tije va depinde, în cea mai mare parte, de deformaţiile stîlpilor şi tijelor, care sînt determinate de modul de rezemare al stîlpilor şi de modul în care se face contactul între grindă şi stîlp. Avînd în vedere acest lucru, modelarea platformei s-a făcut reducînd sistemul spaţial la un sistem plan, construindu-se numai o grindă principală rezemată pe cei doi stîlpi. Calculele preliminare, care au verificat raţionamentul privind solicitarea de încovoiere, au fost considerate concludente şi pentru torsiune.

Aşa cum s-a arătat, platforma constituie un sistem static nedeterminat. Metoda eforturilor aplicată unui sistem static nedeterminat conduce la următorul sistem de ecuaţii

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0\,; \ (i = 1,\ldots,n) \tag{10.98}$$

unde

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i\, m_j}{EI}\, ds + \int \frac{n_i\, n_j}{EA}\, ds\,; \quad \delta_{i0} = \int \frac{m_i\, M_0}{EI}\, ds + \int \frac{n_i\, N_0}{EA}\, ds. \tag{10.99}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se notează cu K_X și K_A factorii de scară pentru eforturile static nedeterminate (X) și pentru arii (A)

$$\frac{X_{jn}}{X_{jm}} = \frac{X_n}{X_m} = K_X\,; \quad \frac{A_n}{A_m} = K_A.$$

Modelul fiind din oțel, ca și prototipul rezultă $K_E = 1$.

Aducînd sistemul (10.98) la formă adimensională, după înlocuirea coeficienților δ_{ij}, δ_{io} cu expresiile (10.99), se obțin următoarele relații între factorii de scară

$$K_X = K_F \text{ și } K_A = \frac{K_I}{K_L^2} \qquad (10.100)$$

unde

$$K_F = \frac{F_n}{F_m}\,; \quad K_L = \frac{L_n}{L_m}\,; \quad K_I = \frac{I_n}{I_m}.$$

Alegînd: $K_I = 202000$; $K_L = 23{,}8$; $K_F = 705$, rezultă din (10.100):

$$K_X = 705\,; \; K_A = 356.$$

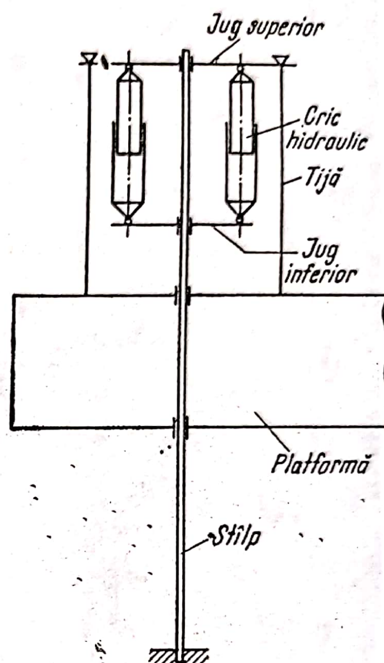


Fig. 10.14.

Realizarea modelului. Modelul grinzii principale și al stîlpilor (fig. 10.15) a fost executat la o scară relativ mică (1 : 23,8) de aceea efectele locale nu au putut fi modelate (prinderile dintre chesoane, dintre stîlpi și jugul superior etc.). Grinda principală 1 (fig. 10.15) a fost realizată din zece cutii de formă paralelipipedică (72 × 148 × × 298) mm, confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 5 mm. Asamblarea cutiilor s-a făcut prin lipire cu cositor. Pentru a asigura o rigiditate suficientă grinzii în zonele de îmbinare a cutiilor s-au folosit două manșoane de legătură 3 (fig. 10.15). Stîlpii 2 (fig. 10.15) au fost confecționați din tablă de oțel cu grosimea de 0,5 mm, cu secțiunea dreptunghiulară (52 × 47,5) mm. Manșoanele puț (4) au fost confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 1,5 mm. Găurile din aceste manșoane au fost făcute astfel ca stîlpul să intre forțat.

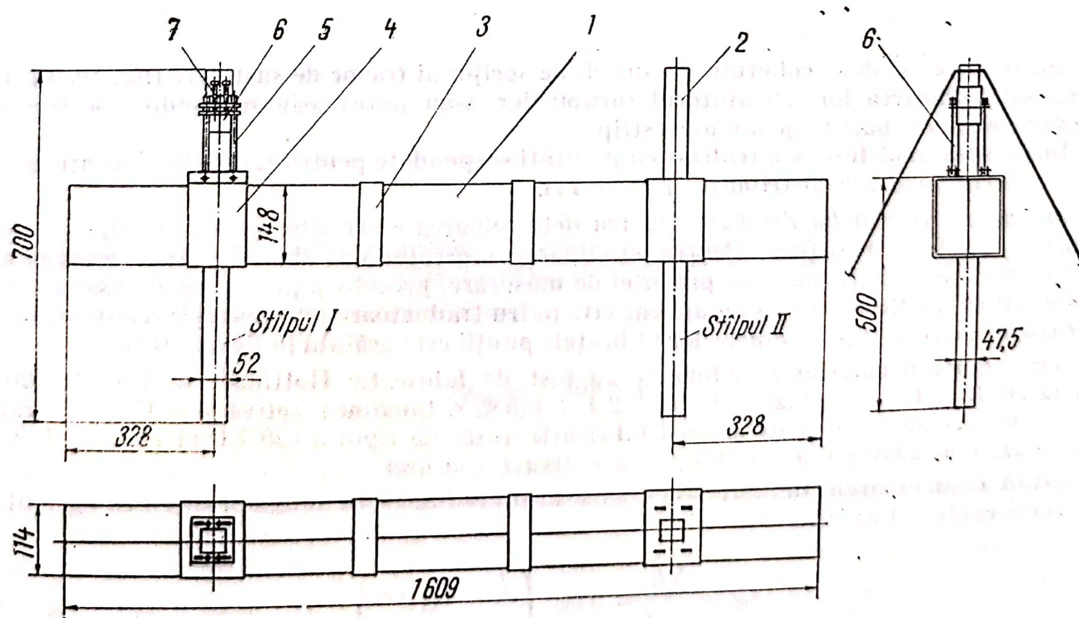
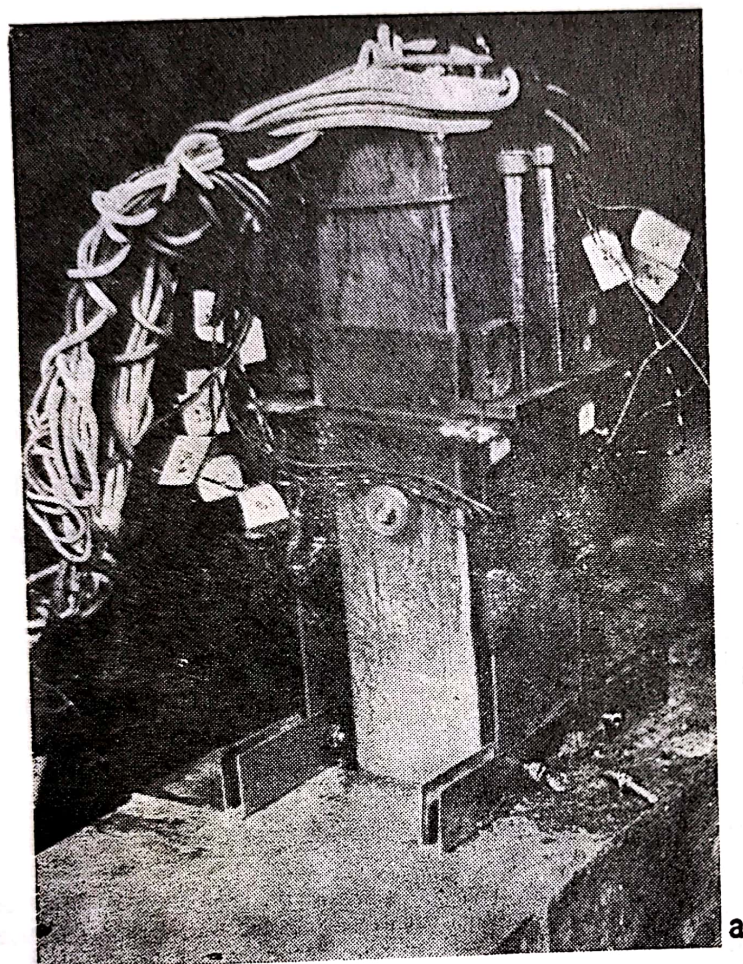
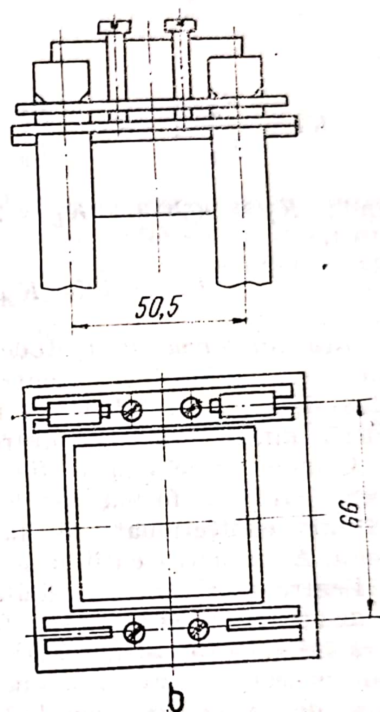


Fig. 10.15.

La ultimele determinări aceste găuri au fost lărgite, realizîndu-se un joc de 4 mm. Tijele de susținere *5*, (fig. 10.15) au fost executate în așa fel încît sistemul de prindere la capete să fie similar celui din realitate. Colierele *6* (fig. 10.15 și fig. 10.16), care modelează jugul superior au fost confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 1,5 mm. Plăcuțele (*7*) cu șuruburi de reglare au


a



b

Fig. 10.16.

fost montate între bordura colierului și umerii de sprijin ai tijelor de susținere (fig. 10.16). Prin ridicarea sau coborîrea lor, cu ajutorul șuruburilor, s-au putut asigura condiții de rezemare asemănătoare la cele patru tije ale unui stîlp.

Încărcarea modelului s-a realizat cu greutăți suspendate pentru sarcinile concentrate și cu cărămizi pentru sarcinile distribuite (fig. 10.17).

Măsurarea eforturilor din bare. Pentru determinarea eforturilor axiale din tije s-a folosit tensometria electrică rezistivă. Pentru eliminarea efortului dat de solicitarea secundară de încovoiere din tije, pentru mărirea preciziei de măsurare, precum și pentru compensarea efectului temperaturii, pe fiecare tijă s-au aplicat cîte patru traductoare tensometrice rezistive. Poziția acestor traductoare pe tijă și legarea lor în brațele punții este arătată în figura 10.18.

Traductoarele longitudinale folosite au fost de fabricație Hottinger de tipul 10/120 FB 1 — A 12 cu $R = 120,8 \pm 0,25\,\%\ \Omega$, $k = 2,1 \pm 0,5\,\%$ și lungimea activă $l = 10$ mm. Traductoarele trans versale au fost de aceeași fabricație însă de tipul 3/120 LP.11 cu $R = 120,4 \pm \pm 0,25\,\%\ \Omega$, $k = 2,03 \pm 0,5\,\%$ și lungimea activă $l = 3$ mm.

Plasînd traductoarele în punte așa cum se arată în fig. 10.18 lungirea specifică ε_m citită la punte (vezi capitolul 3), va fi

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta R}{k\,R} = 2\,\varepsilon_N \left(\frac{k_1}{k} + \mu\,\frac{k_2}{k}\right), \tag{7}$$

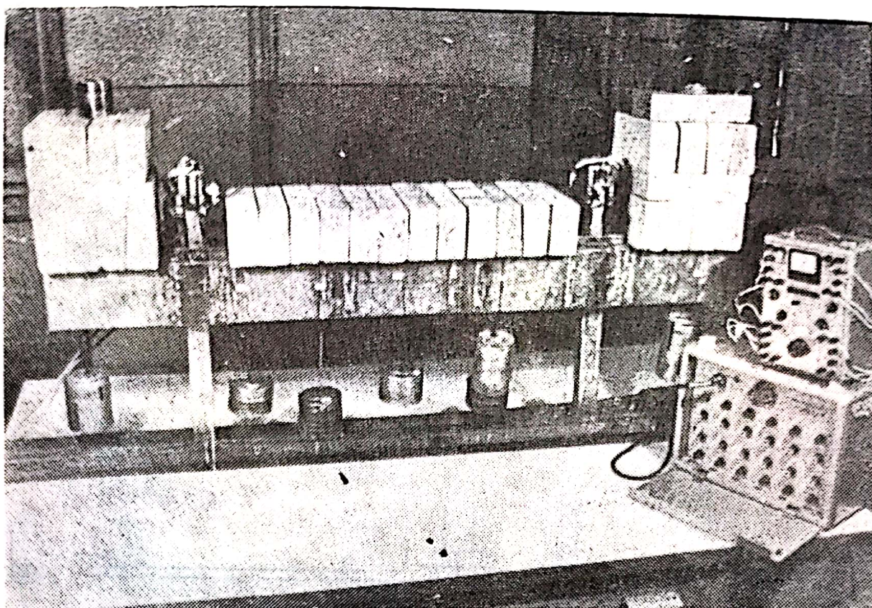


Fig. 10.17.

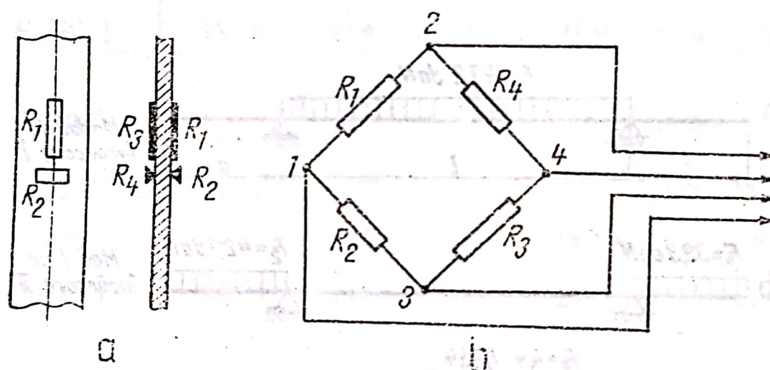


Fig. 10.18.

unde : ε_N este lungirea specifică produsă de solicitarea axială, $k_1 = 2{,}1$; $k_2 = 2{,}03$; μ — coeficientul lui Poisson ; $k = 2{,}0$ este valoarea constantei fixată la puntea tensometrică. Înlocuind valorile constantelor în ecuația (7) a rezultat

$$\varepsilon_m = 2{,}709\ \varepsilon_N. \tag{8}$$

Prin urmare, cu montajul folosit s-a mărit sensibilitatea determinărilor de 2,709 ori. Avîndu-se în vedere că pot să apară diferențe datorită unor abateri față de dimensiunile normale ale barelor și față de valorile considerate, care intervin în calcul (E, μ, k_1 și k_2) s-a procedat la etalonarea fiecărei tije pentru stabilirea raportului dintre valoarea deformației citite și a încărcării.

Rezultatele determinărilor. Eforturile din tijele de ridicare au fost măsurate, pentru diferite moduri de rezemare a stîlpilor (fig. 10.19). Pentru a urmări influența modului de încărcare a

grinzii asupra eforturilor din tije, încărcarea modelului s-a făcut în diferite moduri aşa cum se arată în figura 10.20. Rezultatele determinărilor făcute pentru diferite moduri de încărcare şi rezemare sînt prezentatein tabelele 10.2 şi 10.3.

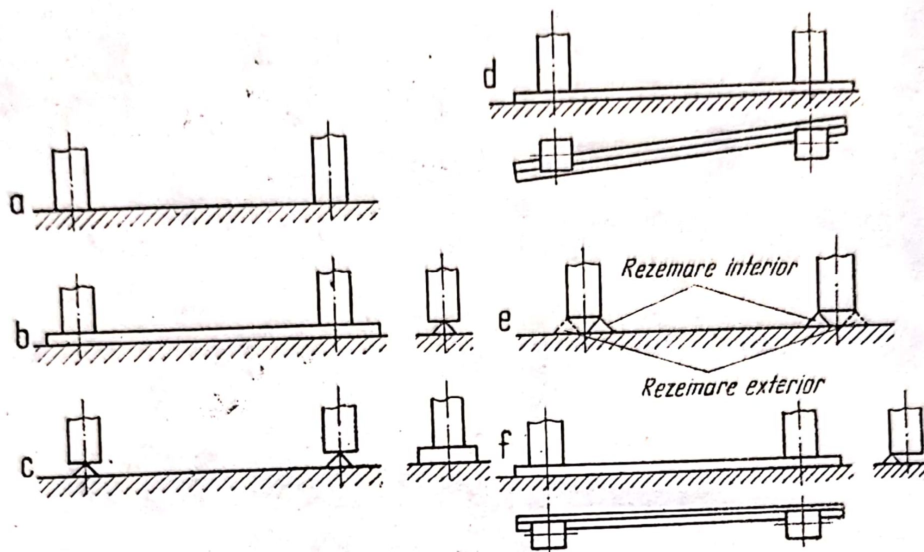


Fig. 10.19.

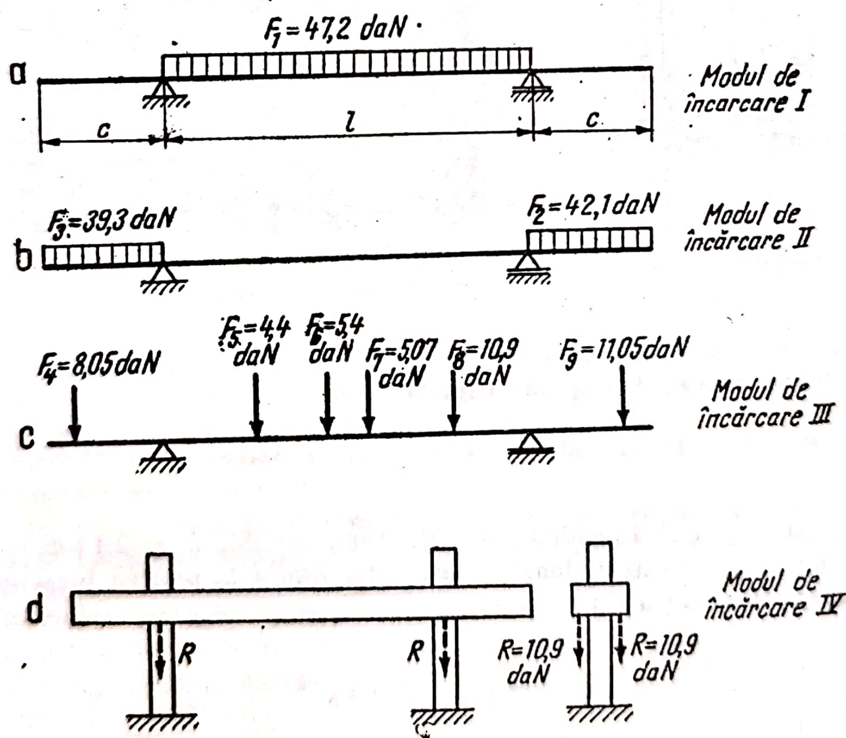


Fig. 10.20.

Din examinarea datelor prezentate în tabelele 10.2 şi 10.3 a rezultat că repartizarea eforturilor în tije este influenţată în limite largi de modul de rezemare a stîlpilor, de variaţia în aşezarea sarcinilor şi de forţele de frecare dintre stîlpi şi grindă.

Tabelul 10.2

Rezultatele determinărilor pentru încărcarea I + II + III (Fig. 10.20) şi diferite moduri de rezemare a stîlpilor F_m^{tot} = 174,27 daN ; F_n^{tot} = 1220, 1 kN

Modul de rezemare	Efortul	Tija Nr.							
		1	2	3	4	5	6	7	8
I	F_m[daN]	32,40	19,10	22,60	7,0	17,50	14,70	33,50	30,00
Fig.(10.19. a)	F_n[kN]	228,4	134,6	159,3	49,3	123,3	103,6	236,1	211,5
II	F_m[daN]	27,70	19,30	16,20	20,70	16,40	18,00	22,40	22,80
Fig.(10.19. b)	F_n[kN]	195,3	136,0	114,2	145,9	115,6	126,9	157,9	160,7
III	F_m[daN]	—	—	—	—	24,30	21,30	20,00	15,60
Fig.(10.19. c)	F_n[kN]	—	—	—	—	171,3	130,1	141,0	109,9
IV	F_m[daN]	36,50	14,00	7,75	29,10	8,60	22,70	31,50	16,90
Fig.(10.19. d)	F_n[kN]	257,3	98,7	54,6	205,0	60,5	160,0	222,0	119,0
V	F_m[daN]	27,20	22,60	19,40	17,20	27,80	19,80	13,70	22,60
Fig.(10.19 e) interior	F_n[kN]	191,0	159,0	137,0	121,0	196,0	139,5	96,5	159,0
V	F_m[daN]	—	—	—	—	24,60	16,10	21,40	20,90
Fig.(10.19. e) exterior	F_n[kN]	—	—	—	—	173,0	113,5	151,0	147,5
VI	F_m[daN]	28,8	24,4	20,2	18,10	18,90	20,50	22,70	22,60
Fig.(10.19. f)	F_n[kN]	203,0	172,0	143,0	128,0	132,0	144,5	160,0	159,0

Tabelul 10.3

Rezultatele determinărilor pentru încărcarea I + II + III + IV (Fig. 10.20) şi diferite moduri de rezemare a stîlpilor

F_m^{tot} = 196,07 daN ; F_n^{tot} = 1379,1 kN

Modul de rezemare	Efortul	Tija Nr							
		1	2	3	4	5	6	7	8
II	F_m[daN]	31,10	20,90	18,30	25,30	24,80	15,50	17,70	31,70
Fig.(10.19. b)	F_n[kN]	218,0	147,0	128,5	177,5	174,0	109,0	124,5	223,0
IV	F_m[daN]	40,1	16,10	7,75	30,90	13,0	25,20	33,20	19,30
Fig.(10.19. d)	F_n[kN]	282,0	116,5	54,4	217,0	91,4	177,0	233,0	137,0
V	F_m[daN]	28,80	31,30	30,60	13,20	28,30	25,80	19,6	22,30
Fig.(10.19. e)	F_n[kN]	202,0	219,0	215,0	92,5	198,0	181,0	138,0	156,0
VI	F_m[daN]	28,40	31,20	25,0	17,30	16,10	25,60	30,30	19,90
Fig.(10.19. f)	F_n[kN]	199,0	219,0	176,0	121,0	113,0	180,0	213,0	140,0

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. ALEXANDROV, A. I., AHMETZJANOV M. N., *Poliarizacionno-Optičeskie metody mehaniki deformiruemogo tela*, Nauka, Moskva, 1973.
2. ARHANGORODSKIJ A. G., BELEN'KIJ, L. M., *Modelirovanie procinosti sudovuh konstrukcii*, Leningrad, 1969.
3. BĂLAN, ST., RĂUTU, S., PETCU, V., *Cromoplasticitatea*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1963.
4. BEAUJOINT, N., NIZERI, A., REMENIERAS, G., *Étude sur modéle réduit des contraintes dans les barrages*, Ann. Ponts et. Chaussées, Nr. 123, 1953.
5. BESCHEA, N., *Rezistenţa materialelor — capitole speciale*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.
6. BOLEANŢU, L., FISCHER, M., BABEU, T., *Quelques particularités des essais de résistance sur les modéles des éléments avec dimensions réduites*, RILEM, Methodology and Technique of Testing Structures, International Symposium, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
7. BUGA, M., BURLACU, C., ILIESCU, N., RUSIU, GH., RUSU, O., TIPERCIUC, GH., TUDOSE, I., *Studiul pe model al unui element din structura platformei plutitoare autoridicătoare K.S.3.*, Comunicare la sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic Bucureşti, 29 — 30 mai, 1969.
8. BRAITHWAITE, J. C., WILLIAMS, R., *The use of scale models in predicting the behaviour of complex structures*, Trans. E. N. Coast. Inst. Engrs. and Shipbuilder, 1963, 79, No. 4.
9 CHAPMAN, J. C., TAYLOR, P. F., *Investigation on a Structural Model of the s.s. „Ocean Vulcan"*, The Royal Institut of Naval Architects, July, 1970 vol. 112, No. 3.
10. DURELLI, A. J., PHILLIPS, E. A., TSAO, C. H., *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*, Mc Graw-Hill Book co. inc., 1958.
11. FINK, K., ROHRBACH, CH., *Handbuch des Spannung — und Dehnungsmessung*, VDI — Verlag Düsseldorf, 1958.
12. FROCHT, M. M., *Photoelasticity*, vol. I, II, New-York, John Willey & Sons, 1948, 1949.
13. HETENYI, M., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, New-York, Ed. John Wiley, 1950.
14. HORUN, S., *Aplicaţiile materialelor plastice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1975.
15. IOSIPESCU, N., *Introducere în fotoelasticitate*, vol. I, Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
16. MOCANU, D.R., BUGA şi GEORGESCU, C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor, 1966.
17. MODIGA, M., *Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii prin metoda elementului finit*, Lucrări ştiinţifice, vol. 5, 1972, Institutul Politehnic Galaţi.
18. MODIGA, M., *Verificarea experimentală a stării de eforturi în grinzile cu tălpi late*, Comunicare la a XVI-a sesiune ştiinţifică a Institutului Politehnic Galaţi, mai, 1972.
19. MOROZOV, B. A., *Modelirovanie i procinosti metallurgičeskih maşin*, Maşgiz, Moskva, 1963.
20. MÜLLER, R., *Gummiomodellversuche zur Bestimmung der Spannungsverteilung in geschweissten Laschenverbindungen*, Schweisstehnik, Nr. 11, 1963.
21. NĂDĂŞAN, ST., *Încercări şi analize de metale*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1965.
22. PERLIN, A.A., ŠALKIN, M.K., HRJAŠČEV, I. K., *Issledovanie procinosti sudovuh konstrukciiah na tenzometriceskih modeliah*, Leningrad, Sudostroenie, 1967.
23. POSTNOV, V. A., MODIGA, M., *Vibor prisoedinennogo pojaska şirokopoluh balok*, Sudostroenie, 1971, No. 10.
24. PRIGOROVSKIJ, N. I., PREJSS, A.K., *Issledovanie napriajenishi jestkosti detalei maşin na tensometriceskih modelah*, Moskva, 1958.
25. *Procinosti, ustoicivosti, kolebaniia — Spravocinik*, vol. I, II, III, Izd. Masinostroenie, Moskva 1968.
26. PROŠKO, V. M., *Issledovanie napriajeniah na obiemnh modelah*, sb. *Poliarizaţionno — opticeskii metod issledovaniia napriajeniah*, Izd. A. N. SSSR, 1956.
27. RILEY, W. F., DURRELLI, A. J., *Stress Distribution on the Boundary of an Elliptical Hole in a Large Plate during Passage of a Stress Pulse of Long Duration*, Intern. J. Mech. Sci., Oxford — London — New York — Paris, 2, 4, 1961.
28. ROHRBACH, CH., CZAIKA, N., *Deutung des Mechanismus der Dehnungsmesstreifens und seiner wichtigsten Eigenschaften and Hand eines Modells*, Material — prüfung, 1, 4, 1959.
29. SEDOV, L. I., *Metodi podobija i razmernosti v mehanike*, Moskva, Izd. Nauka, 1965.

30. ŞERBĂNESCU, G., SANDI, H., ZORAPAPEL T., *Dynamic Model Tests of a Large — Panel Structure, RILEM, Methodology and Technique of Testing Structures, International Symposium*, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
31. STAICU, C.I., *Analiza dimensională generală*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1976.
32. TEODORESCU, P.P., *Probleme spaţiale în teoria elasticităţii*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1970.
33. VASILESCU, AL. A., *Analiza dimensională şi teoria similitudinii*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1969.
34. VASILESCU, AL. A., PRAISLER, G., *Similitudinea sistemelor elastice*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1974.
35. VÎLCOVICI, V., BĂLAN, ST., VOINEA, R., *Mecanica teoretică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1966.
36. WEBER, M., *Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und Modellwissenschaft*, Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft 1930, B. XXXII.
37. WECKS, G., *Laboratory Testing of Large Structures, RILEM, Methodology and Technique of Testing Structures*, International Syposium, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
38. WILKENS, R. I., *Struct M. I., Modell Analysis of Structures, Civil Engineering*, 1950, vol. 45, No. 528.
39. WOCKE, W., *Die direkte Modellmethode zur Lösung von Spannungs — und Strömungsproblem*, Maschinenbautechnik, 1958, No. 10 und 1959, No. 7.
40. WOCKE, W., ULLMAN, K., *Experimentelle Dehnungsanalise*, VEB, Fachbuchverlag, Leipzig, 1974.
41. * * * *Manualul inginerului mecanic*, vol. I. Editura tehnică, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

11

ETALONAREA TENSOMETRELOR

Ing. N. FÎNTÎNARU

11.1. ETALONAREA TENSOMETRELOR AMOVIBILE

11.1.1. GENERALITĂȚI

Metoda etalon de reproducere a deformațiilor pieselor sub acțiunea solicitărilor, consacrată în tehnica actuală, constă în simularea deformațiilor prin translația relativă a unei piese — cursor — încorporată într-un aparat care permite măsurarea translației cu o precizie corespunzătoare. Aparatele pentru reproducerea deformațiilor sînt cunoscute sub denumirea generică de *calibratoare tensometrice* întrucît se utilizează curent la stabilirea și verificarea caracteristicii de convertire a indicațiilor tensometrelor — operația de calibrare —. Pentru operațiile de etalonare metrologică se folosesc calibratoare speciale la care translația cursorului se măsoară atît discret, cu cale plan-paralele, cît și continuu cu aparate de înaltă precizie.

Operațiile metrologice — calibrare, etalonare și verificare — constau, în principiu, din măsurarea simultană a deplasării cursorului atît cu tensometrul montat în calibrator, cît și cu aparatul de măsurat de înaltă precizie al calibratorului. Prin compararea indicațiilor tensometrului și ale calibratorului se stabilesc caracteristicile metrologice definitorii pentru competitivitatea aparatului [25].

11.1.2. CALIBRATOARE PENTRU TENSOMETRE AMOVIBILE

Calibratoarele sînt aparate destinate etalonării statice a tensometrelor amovibile. Construcțiile de calibratoare cuprind în principiu un cadru rigid cu șine sau coloane de ghidare a cursorului, un dispozitiv mecanic cu ac filetat de translatare fină a cursorului și un aparat de măsurare a deplasării cursorului.

O largă răspîndire au cunoscut-o calibratoarele cu comparatoare cu cadran cu valoarea diviziunii 1/100 mm sau 1/1000 mm, măsurîndu-se direct sau amplificat deplasarea cursorului. Utilizarea comparatoarelor mecanice limitează însă performanțele calibratorului, prin restrîngerea domeniului de măsurare și a preciziei. Astfel, în cazul comparatoarelor

Scanned with OKEN Scanner

1/100 mm, domeniul de măsurare se plafonează la 10 mm, cu o precizie de (5...10)μm, pentru ca să se reducă la 2 mm odată cu ridicarea preciziei la 1 μm prin folosirea comparatoarelor 1/1000 mm sau prin aplicarea unor elemente de amplificare a deplasării cursorului. Extinderea domeniului peste 10 mm se asigură prin introducerea dispozitivelor cu șurub micrometric, dar cu o precizie de cel mult 10 μm [28].

În fig. 11.1 este reprezentat un calibrator cu comparator cu cadran și amplificare mecanică [2]. Reperul fix *2* este prins în cadrul *1*, iar reperul mobil *3* este antrenat de șurubul de reglare *5* prin intermediul unei pene *4*. Pentru mărirea sensibilității calibratorului, pana *4* este construită cu panta 1 : 10. Cursa penei este măsurată cu comparatorul cu cadran *6*. Ca un dezavantaj al acestui calibrator se menționează valoarea redusă a domeniului de măsurare. La un comparator de 1/100 mm cu un domeniu de măsurare de 5 mm se pot controla deplasări ale cuțitului tensometrului de 0,5 mm cu o precizie de 1 μm. Pentru eliminarea jocurilor inerente la contactul dintre suprafețele în mișcare pană-cadru, pană-palpator comparator și pană-suport mobil, sînt prevăzute arcurile *7*. Tensometrul de etalonat se montează cu baza de măsurare în poziția L_0 din figură. Acționînd șurubul *5*, se compară indicațiile tensometrului cu indicațiile comparatorului cu cadran *6*, care are o cursă de 10 ori mai mare decît cursa reperului mobil *3*.

Fig. 11.2 reprezintă schița de principiu a unui calibrator cu șurub micrometric. Aparatul constă dintr-un batiu *1* pe care sînt fixate două bare

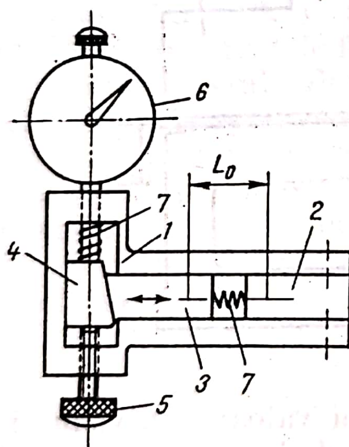


Fig. 11.1.

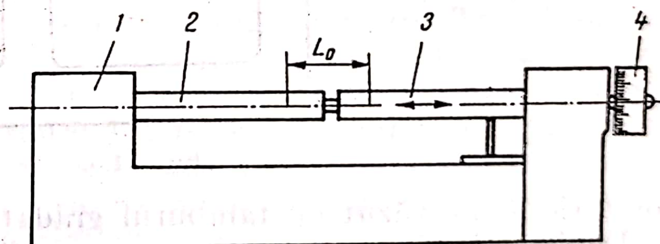


Fig. 11.2.

coaxiale, una fixă *2* și una mobilă *3*. Bara mobilă *3* este deplasată longitudinal cu ajutorul unui șurub micrometric 4 cu tambur divizat, cu valoarea diviziunii de 2 μm. Tensometrul de etalonat se montează cu cuțitele fixe pe bara *2* și cu cuțitele mobile pe bara *3*. Prin deplasarea axială a barei mobile *3*, se compară indicațiile tensometrului cu cele ale tamburului șurubului micrometric al calibratorului. În fig. 11.3 și 11.4 sînt prezentate calibratoare realizate după acest principiu [22 ; 36].

În fig. 11.5 se arată principiul de construcție și funcționare a unui calibrator utilizat la etalonarea comparatoarelor, tensometrelor și deforme-

trelor [17 ; 14]. Calibratorul constă dintr-un batiu *1* pe care se deplasează o piesă *2* în vederea potrivirii lungimii bazei de măsurare L_0 a tensometrului de etalonat. Tot pe batiul *1* glisează piesa mobilă *3* antrenată de șurubul

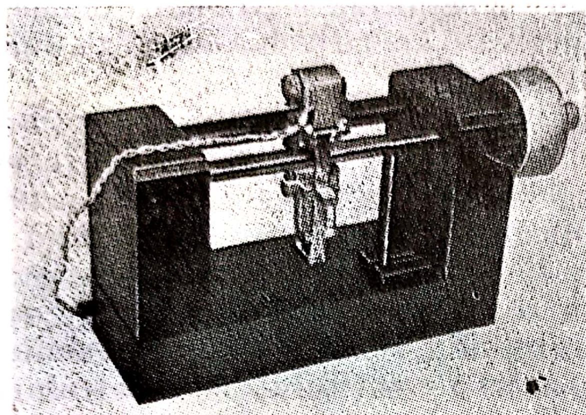


Fig. 11.3.

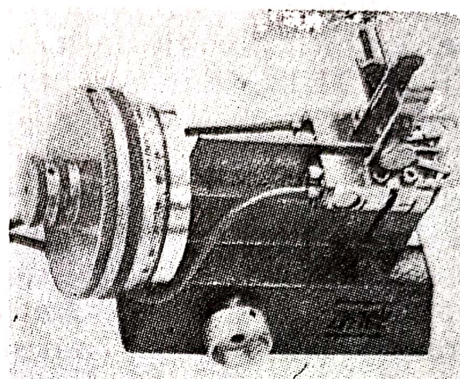


Fig. 11.4.

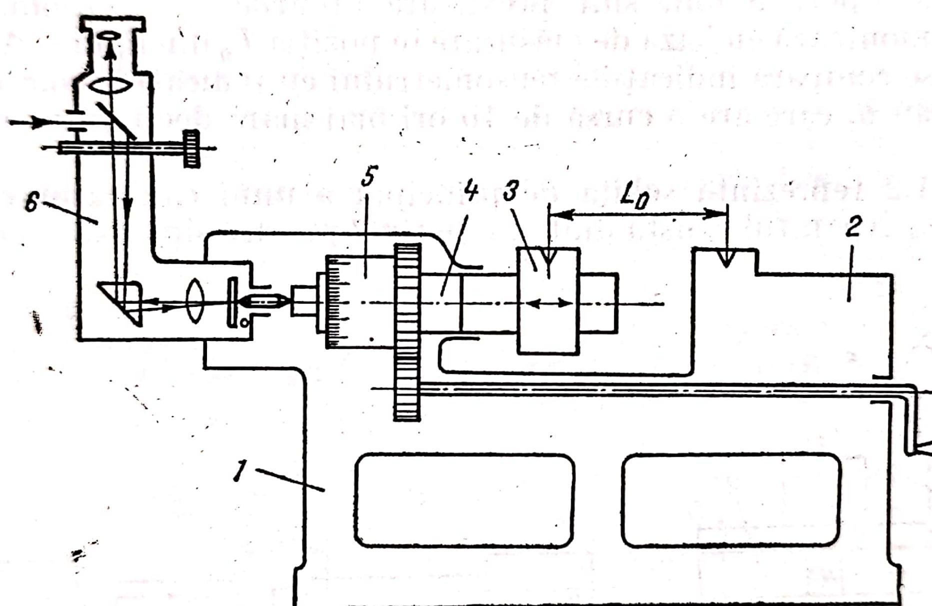


Fig. 11.5.

micrometric *4*, prevăzut cu tamburul gradat *5* cu valoarea diviziunii de 5 μm. Deplasările în mm se citesc pe o riglă fixată de batiul calibratorului, iar subdiviziunile se citesc pe tamburul gradat *5*. Domeniul de măsurare este de 10 mm cu precizia de citire de ±5 μm. Pentru mărirea preciziei de citire, calibratorul este completat cu optimetrul *6* cu valoarea diviziunii de 1 μm, asigurîndu-se precizia de ±0,3 μm într-un domeniu de măsurare limitat la deformații de ±0,1 mm. Tensometrul de etalonare se montează pe calibrator cu cuțitele sale mobile pe piesa *3* și cu cele fixe pe piesa *2*. Etalonarea se face la diverse deplasări ale piesei mobile *3*, comparîndu-se indicațiile tensometrului cu cele ale calibratorului.

Pentru încercarea și omologarea metrologică a tensometrelor și deformetrelor construite în țară, la Institutul Național de Metrologie, Laboratorul Timișoara s-a conceput și realizat un calibrator în acest scop [26 ; 27].

Scanned with OKEN Scanner

Urmărind eliminarea dezavantajelor calibratoarelor cu instrumente de măsurat mecanice, la calibratorul realizat s-a preconizat introducerea microscopului cu spirală Abbé pentru urmărirea deplasării cursorului acţionat printr-un şurub micrometric. Prin măsurarea optică se elimină erorile sistematice datorite frecărilor şi jocurilor din articulaţiile mecanice şi

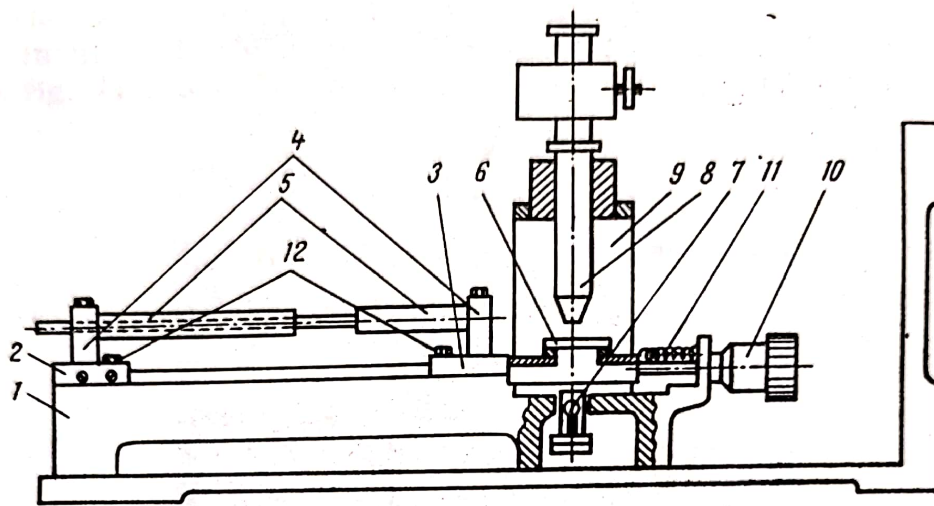


Fig. 11.6.

se reduc sensibil erorile accidentale de observaţie prin ridicarea preciziei de citire. Valoarea diviziunii microscopului Abbé este de 1 μm, cu o precizie de citire de (0,2...0,5) μm. Construcţia calibratorului constă (fig. 11.6) dintr-un batiu rigid de fontă *1* pe care sînt aşezate două sănii *2* şi *3* conduse în ghidajele laterale ale batiului. Sania *2*, amovibilă independent, se poate monta înainte de etalonare în diverse poziţii pe batiu, încadrînd lungimile bazei de măsurare ale tensometrelor de etalonat. Sania-cursor *3* este legată la un capăt printr-o articulaţie sferică de un şurub micrometric *10*, care comandă deplasarea în cursul operaţiilor de etalonare. Translaţia saniei *3* este urmărită prin vizarea unei plăcuţe gradate de sticlă *6*, incorporată în consola saniei *3*, cu ajutorul unui microscop cu spirală Abbé *8*, montat în batiu pe suportul *9*, cu axul optic dispus perpendicular pe suprafaţa sticlei gradate *6*, iluminată de lampa *7*. Tensometrele amovibile de etalonat se montează pe accesoriile *4* şi *5* care reproduc situaţia din exploatare. Un cuplu telescopic *5*, cu un diametru exterior corespunzător tensometrului de verificat, se fixează prin intermediul flanşelor *4* pe suprafaţa frontală a săniilor. La deplasarea saniei cursor *3*, tuburile telescopice *5* se întrepătrund axial, simulînd deformarea, adică lungimea sau scurtarea unei epruvete cilindrice. Arcurile spirale *11* servesc la menţinerea contactului permanent între şurubul micrometric *10* şi sania *3*.

O atenţie deosebită trebuie acordată poziţiei tensometrului în cursul etalonării [34], pentru a se evita erorile datorite dezechilibrării sau deformării unor părţi ale tensometrului. Astfel, tensometrele pentru determinări de deformaţii pe epruvete, prevăzute a funcţiona în poziţie verticală, la etalonare vor fi montate în aceeaşi poziţie, calibratorul fiind astfel construit încît să poată fi utilizat în poziţie verticală (fig. 11.7) sau

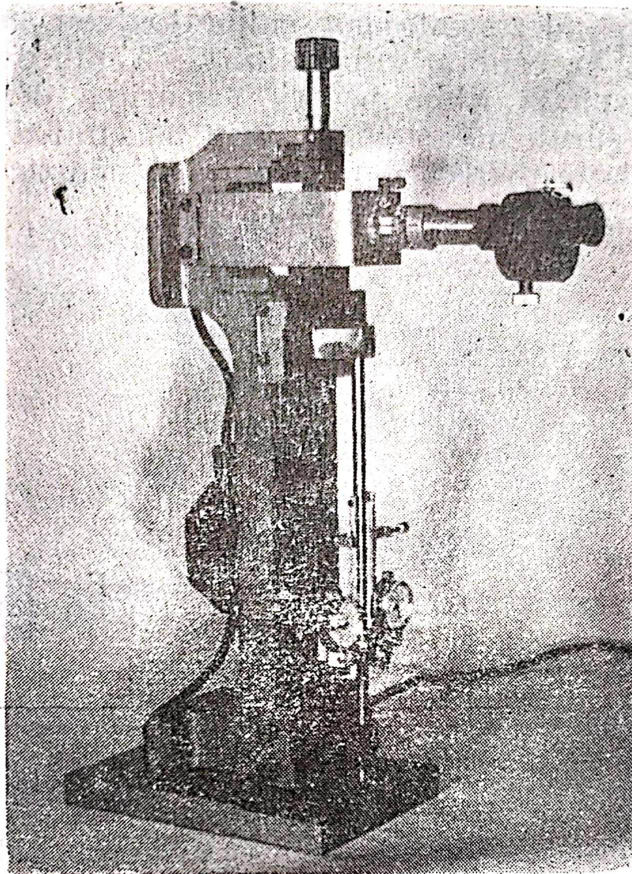


Fig. 11.7.

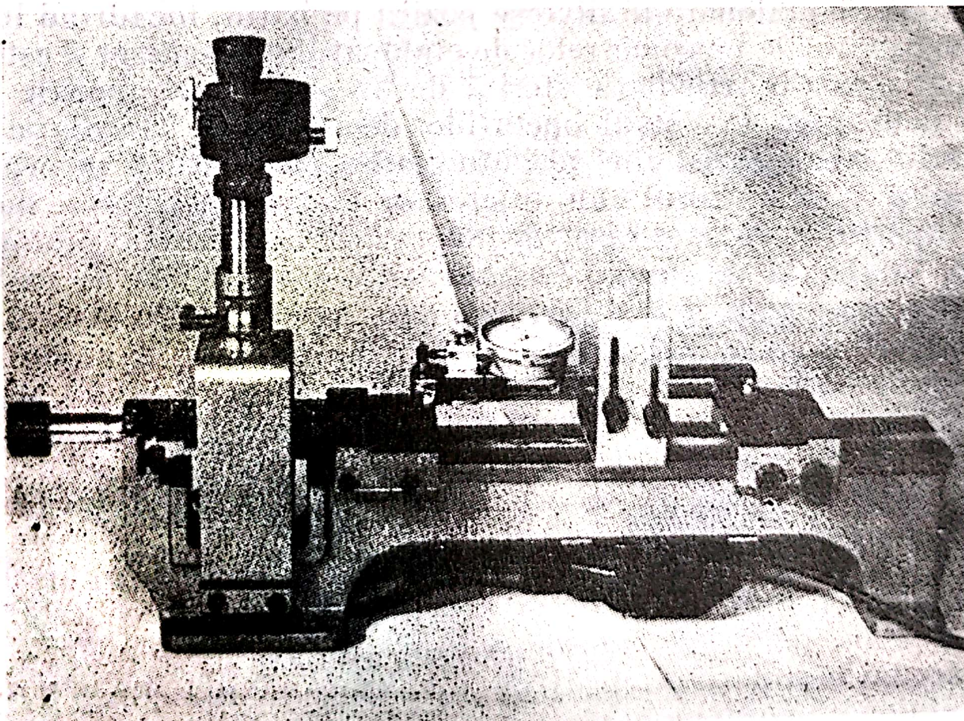


Fig. 11.8.

orizontală — cazul etalonării deformetrelor (fig. 11.8). Calibratorul s-a etalonat prin măsurări comparative cu cale plan-paralele. Distanţele dintre săniile *2* şi *3*, respectiv dintre scobiturile unor butoni montaţi în aceste sănii, au fost reglate la anumite lungimi univoc definite prin deschiderea dintre ciocurile unui cadru în care s-au intercalat blocuri de cale. Apoi aceste distanţe au fost măsurate la microscopul cu spirală. Repetînd operaţiile menţionate, se stabilesc caracteristicile metrologice ale calibratorului. În fig. 11.9 sînt reprezentate rezultatele unei etalonări efectuată

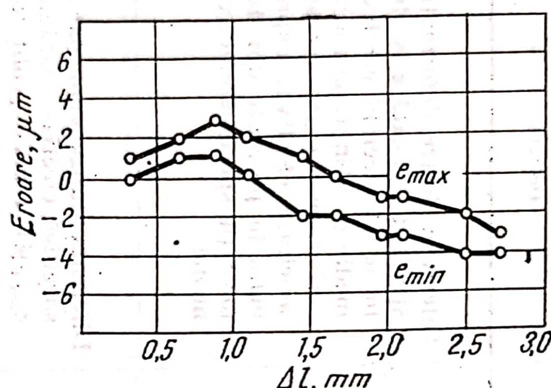


Fig. 11.9.

pentru lungimea iniţială de 50 mm cu o variaţie de 3 mm. S-au măsurat 10 lungimi progresive între 50 şi 53 mm, fiecare operaţie repetîndu-se de 6 ori. Se constată o strînsă reproductibilitate a rezultatelor în limitele unei amplitudini de (1..3) μm. Raportînd această amplitudine la lungimea iniţială de 50 mm, abaterile relative apar foarte reduse $(2\ldots6)\cdot10^{-5}$. Aplicînd corecţii la citirea indicaţiilor calibratorului corespunzător abaterilor sistematice stabilite la etalonare, se ajunge la o precizie de reproducere de 1,5 μm. Domeniul de măsurare al calibratorului realizat este de (50...300) mm pentru lungimea bazei de măsurare, şi de (0...12) mm pentru variaţia acestei lungimi, cu o precizie de citire de 0,5 μm şi o reproductibilitate de cel mult 1,5 μm. Construcţia se pretează unei utilizări largi permiţînd montarea oricăror tipuri de tensometre sau deformetre în poziţie verticală sau orizontală. Manipularea aparatului este simplă, sigură şi rapidă, operaţia de etalobare desfăşurîndu-se în condiţii optime de reeditare a modului de exploatare. Pentru precizii mai mari, calibratoarele pot fi echipate cu aparatură specială ca ultraoptimetre sau interferometre. Normele ASTM [34] prevăd o precizie a calibratorului de 5 ori mai bună decît a tensometrelor de etalonat.

11.1.3. METODOLOGIA ETALONĂRII STATICE A TENSOMETRELOR AMOVIBILE

După ce tensometrele amovibile de etalonat au fost verificate în ce priveşte aspectul exterior, dimensiunile, construcţia şi funcţionarea lor, este necesară verificarea bazei de măsurare şi etalonarea indicaţiilor.

Tabelul 11.1

Definițiile și relațiile de calcul ale caracteristicilor metrologice ale tensometrelor

Nr. crt.	Caracteristica metrologică	Simbolul	Caracteristica metrologică se determină prin: – aplicarea repetată a unei deformații specifice efective și compararea ei cu media deformațiilor specifice indicate		– realizarea repetată a unei deformații specifice indicate și compararea ei cu media deformațiilor specifice efective rezultate	
			Definiția	Relația de calcul	Definiția	Relația de calcul
1	Eroarea relativă de justețe	e_j	Diferența dintre deformația specifică indicată medie $\bar{\varepsilon}_i$ și deformația specifică efectivă ε la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași solicitări efective, exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_j = \frac{\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot 100\%$ $\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_{ij}$	Diferența dintre deformația specifică indicată ε_i și deformația specifică efectivă medie $\bar{\varepsilon}$ obținute la încărcări repetate cu aceeași solicitare efectivă, exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_j = \frac{\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100\%$ $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_j$
2	Eroarea relativă de fidelitate	e_f	Diferența dintre deformația specifică indicată maximă ε_{imax} și minimă ε_{imin} obținute la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași deformații specifice efective ε, exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_f = \frac{\varepsilon_{i\,max} - \varepsilon_{i\,min}}{\varepsilon} \cdot 100\%$	Diferența dintre deformația specifică efectivă maximă ε_{max} și minimă ε_{min} obținute la realizarea repetată și în același sens a aceleiași deformații specifice indicate ε, exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_f = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100\%$

(*Continuare tab. 11.1*)

3	Eroarea relativă de revenire	e_r	Diferența dintre deformația specifică medie indicată la descărcare $\bar{\varepsilon}_i'$ și la încărcare $\bar{\varepsilon}_i$ obținute la realizarea repetată a aceleași deformații specifice efective ε, exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_r = \frac{\bar{\varepsilon}_i' - \bar{\varepsilon}_i}{\varepsilon} \cdot 100\,\%$ $\bar{\varepsilon}_i' = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_{ij}'$	Diferența dintre deformația specifică efectivă medie la descărcare $\bar{\varepsilon}'$ și la încărcare $\bar{\varepsilon}$ obținute la realizarea repetată a aceleiași deformații specifice indicate ε_i, exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_r = \frac{\bar{\varepsilon}' - \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100\,\%$ $\bar{\varepsilon}' = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_j'$
4	Eroarea relativă de revenire la zero	e_{ro}	Diferența dintre deformația specifică medie indicată $\bar{\varepsilon}_{io}'$ după anularea solicitărilor și înainte de aplicarea primei trepte de solicitare $\bar{\varepsilon}_{io}$, exprimată în procente din deformația specifică maximă măsurată $\bar{\varepsilon}_{is}$	$e_{ro} = \frac{\bar{\varepsilon}_{io}' - \bar{\varepsilon}_{io}}{\varepsilon} \cdot 100\,\%$ $\bar{\varepsilon}_{io}' = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_{ioj}'$ $\bar{\varepsilon}_{io} = 0$	—	—
5	Eroarea relativă de liniaritate	e_l	Diferența dintre deformația specifică indicată medie $\bar{\varepsilon}_i$ și deformația specifică liniară ε_l la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași solicitări afective, exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_l = \frac{\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_l}{\varepsilon} \cdot 100\,\%$	Diferența dintre deformația specifică efectivă medie $\bar{\varepsilon}$ și deformația specifică liniară ε_l obținute la încărcări repetate cu aceeași solicitare efectivă, exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_l = \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_l}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100\,\%$

Scanned with OKEN Scanner

Verificarea bazei de măsurare se execută cu ajutorul unui calibrator reglat, în prealabil, la lungimea bazei de măsurare cu ajutorul unor cale plan-paralele de clasa 2 prinse în cadrele cu ciocuri din trusele cu accesorii. La trei operații succesive de montare în calibratorul reglat, diferențele între valorile lungimii bazei de măsurare indicată de tensometru și baza de măsurare nominală trebuie să fie cel mult egală cu valorile date în tabelul 11.2.

Tabelul 11.3

Erorile tolerate ale tensometrelor amovibile

Clasa de precizie	Toleranța pentru baza de măsurare b	Eroarea relativă maximă admisă pentru						Pragul de sensibilitate p_s	Valoarea medie a diviziunii v_d
		Justețe e_j	Fidelitate e_f	Creșterea indicațiilor e_c	Liniaritate e_l	Revenire e_r	Revenire la zero e_{ro}		
	% din valoarea nominală a bazei	% din limita superioară a domeniului de măsurare							
0,1	±0,1	±0,05	0,1	±0,1	±0,1	±0,2	±0,05	0,01	0,1
0,2	±0,2	±0,1	0,2	±0,2	±0,2	±0,4	±0,1	0,02	0,2
1	±1	±0,5	1	±1	±1	±2	±0,5	0,1	1

Etalonarea indicațiilor tensometrelor se execută la calibrator, pentru trepte de variație a lungimii atît în succesiunea crescătoare cît și descrescătoare. Fiecare valoare a treptelor se obține ca media aritmetică din șase citiri la aceeași lungime efectiv reglată la calibrator și în aceeași succesiune a treptelor de variație a lungimii. După 3 serii de măsurări se demontează tensometrul și se continuă măsurările după remontarea sa în calibrator. Etalonarea tensometrelor se execută pentru cel puțin 10 trepte, repartizate pe întreg domeniul de utilizare. Diferența între două trepte succesive nu trebuie să depășească 1/8 din domeniul întreg. Punctele corespunzătoare valorilor maxime și minime ale variației de lungime se verifică întotdeauna.

Montarea tensometrelor pe calibrator se va face în poziția normală de lucru a acestora. După montarea tensometrului, se deplasează reperul mobil al calibratorului cu ajutorul șurubului micrometric, la treptele de valori alese pentru etalonare. După atingerea fiecărei trepte, se citește și se notează indicația tensometrului, parcurcîndu-se în sens crescător întreg domeniul de utilizare. Se continuă apoi etalonarea în sens descrescător, efectuîndu-se citirea indicației la aceleași trepte ca la sensul crescător. În cursul operației de creștere sau descreștere a indicațiilor, nu este admisă inversarea sensului de lucru. În cazul că se depășește o anumită treaptă fără a efectua citirea, se reia întreaga serie de citiri [18].

În cursul etalonării, temperatura va fi de 20 ±2°C. Variația temperaturii în cursul unei serii de măsurări nu trebuie să depășească 0,5°C.

Caracteristicile metrologice ale tensometrelor etalonate se stabilesc după cum se arată în tabelul 11.1, iar valorile lor se compară cu limitele admise date în tabelul 11.2, efectuîndu-se astfel încadrarea tensometrelor în clasa de precizie 0,1 ; 0,2 sau 1.

11.2. ETALONAREA TRADUCTOARELOR REZISTIVE

11.2.1. GENERALITĂŢI

Prin etalonarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive se înţelege ansamblul operaţiilor de efectuat şi al condiţiilor necesare pentru determinarea constantei k a traductoarelor de etalonat. Necesitatea etalonării lor rezultă din faptul că traductoarele nu pot fi utilizate [21 ; 4 ; 1] fără a li se cunoaşte constanta care, după cum s-a arătat la cap. 3 se defineşte cu relaţia

$$k = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{l_0}{\Delta l_0} \qquad (11.1)$$

ΔR fiind variaţia rezistenţei R a traductorului corespunzătoare variaţiei Δl_0 a lungimii iniţiale l_0 bazei de măsurare.

Se observă că pentru a cunoaşte k este necesar a supune traductorul unei deformaţii cunoscute Δl_0 şi a măsura variaţia rezistenţei traductorului ΔR. Această operaţie constituie obiectul etalonării, în acest scop fiind deci necesare :

— un dispozitiv care să permită realizarea unor deformaţii cunoscute ;

— o instalaţie electrică pentru măsurarea variaţiilor de rezistenţă ale traductorului.

Precizia de determinare a lui k depinde direct de precizia cu care se determină variaţia de rezistenţă şi deformaţia specifică ; din relaţia (11.1), după legile propagării erorilor la măsurările indirecte rezultă [8 ; 9]

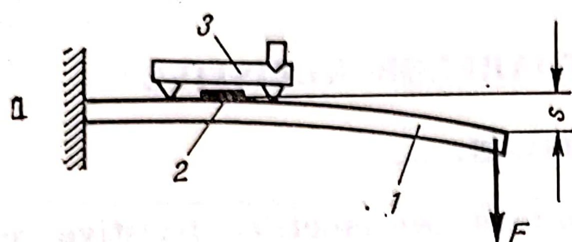
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta (\Delta R/R)}{\Delta R/R} + \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \qquad (11.2)$$

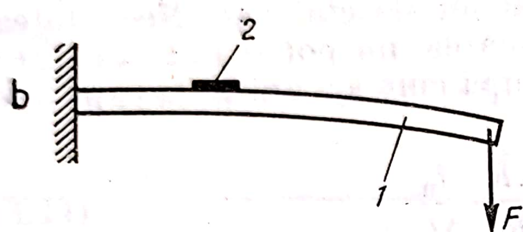
astfel că eroarea relativă maximă de determinare a constantei k este egală cu suma erorilor relative cu care s-a determinat rezistenţa relativă $\Delta R/R$ a traductorului şi deformaţia sa specifică ε. Efectuarea etalonării la un anumit nivel de precizie depinde deci de posibilitatea încadrării erorilor de determinare a rezistenţei şi deformaţiei într-un anumit cîmp de erori accesibile metodei şi dispozitivului de etalonare folosit [13].

Pentru etalonarea statică a traductoarelor tensometrice care se aplică prin lipire (traductoarele rezistive sau unele traductoare piezoelectrice) sînt necesare elemente cu deformaţii cunoscute, pe care să se poată lipi traductoarele de etalonat. Dacă de exemplu elementul deformabil este o bară solicitată la încovoiere, în fig. 11.10 se arată cele 3 posibi-

lităţi de utilizare a acestui element pentru etalonarea traductoarelor lipite [30 ; 6].

În cazul a) bara *1* este solicitată cu o forţă F corespunzătoare săgeţii s, iar indicaţia traductorului *2* de etalonat este comparată cu indicaţia tensometrului etalon *3* care a fost, în prealabil, etalonat la un calibrator adecuat (pct. 11.1.2). Procedeul este afectat de erori $\leqslant 2\%$.





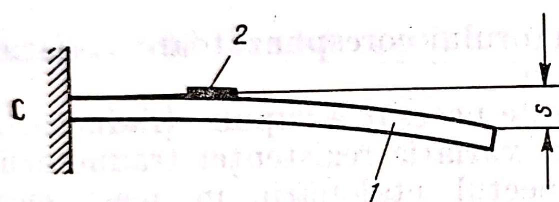


Fig. 11.10.

În cazul b) bara *1* este solicitată cu o forţă cunoscută F, iar deformaţia corespunzătoare ε a traductorului *2* de etalonat se determină pe baza relaţiilor cunoscute din Rezistenţa materialelor în funcţie de dimensiunile grinzii şi modulul de elasticitate E al materialului barei. Erorile care apar sînt de cîteva procente, fiind cauzate, mai ales, de imprecizia evaluării deformaţiei.

În cazul c) bara *1* este solicitată cu o forţă oarecare, iar deformaţia ε a traductorului *2* de etalonat se determină din săgeata s măsurată şi din dimensiunile barei. Deoarece acest procedeu nu reclamă cunoaşterea lui E, apar erori $\leqslant 1\%$. Cît timp relaxarea barei rămîne proporţională cu tensiunea, deformaţia ε nu este influenţată de această relaxare.

11.2.2. STANDURI PENTRU ETALONAREA STATICĂ A TRADUCTOARELOR REZISTIVE

Realizarea deformaţiilor specifice cunoscute se face cu ajutorul dispozitivelor de etalonare constituite, în general, din bare pe suprafaţa cărora apar deformaţii prestabilite în urma unor solicitări convenabil alese aplicate barei. Pe lîngă bara de etalonare, în componenţa standurilor de etalonare intră un sistem de solicitare a acestei bare, un dispozitiv de măsurare a săgeţii barei şi un echipament de măsurare a variaţiei rezistenţei electrice a traductoarelor.

Standurile de etalonare, fie că sînt cu deformaţie liberă (încărcare cu greutăţi) fie că sînt cu deformaţie impusă, trebuie să satisfacă următoarele condiţii generale :

— să asigure realizarea unor deformaţii cunoscute reproductibile,
— să evite solicitări suplimentare parazite,
— să permită măsurarea săgeţii efective a barei de etalonare,
— să poată fi folosite pentru calibrarea diferitelor tipodimensiuni de traductoare rezistive.

În mod obişnuit se utilizează bare de etalonare solicitate la încovoiere conform tabelului 11.3 după cum urmează [10] :

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11.3

Schema barelor de etalonare

Schema de încărcare	Relații de calcul: Forța tăietoare	Momentul încovoietor	Deformația specifică	Tensiunea și modulul de rezist.	Eroarea relativă maximă la determinarea lui k
a	$T = F$	$M = Fa$	$\varepsilon = \frac{h}{l^2} f$ $h =$ const. $b =$ variabil $= y$	$\sigma = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{h^2}{6} y$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{max} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f} + 2\frac{\Delta l}{l}$
b	$T_2 = 0$	$M_2 = Fa$	$\varepsilon_2 = \frac{12\,h}{3l^2 - 4a^2} f$ h — grosimea barei	$\sigma_2 = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{bh^2}{6}$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{max} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{2}{3 - 4\left(\frac{a}{l}\right)^2} \cdot \frac{\Delta l}{l} + \frac{2}{3\left(\frac{l}{a}\right)^2 - 4} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta f}{f}$
c	$T_2 = 0$	$M_2 = Fa$	$\varepsilon_2 = \frac{4h}{c^2} f$ h — grosimea barei	$\sigma_2 = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{bh^2}{6}$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{max} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f} + 2\frac{\Delta c}{c}$

Scanned with OKEN Scanner

— bară de egală rezistență cu secțiunea variabilă (grosimea constantă și lățimea variabilă liniar) încastrată la capătul unde secțiunea este maximă și solicitată prin aplicarea unei sarcini la celălalt capăt (tabelul 11.3, a);

— bară de secțiune constantă pe două reazeme simetrice solicitată prin aplicarea a două sarcini simetrice între reazeme (tabelul 11.3, b) sau în afara reazemelor (tabelul 11.3, c).

Pentru determinarea metrologică a factorului k al traductoarelor, normele germane VDE/VDI [35] recomandă utilizarea unei bare de încovoiere care pe lungimea sa utilă este solicitată la încovoiere pură, conform tabelului 11.3, c. Bara de încovoiere va fi confecționată dintr-un oțel cu granulație fină avînd la limita de proporționalitate o deformație specifică de minimum 3500 μm/m ceea ce corespunde unei tensiuni de circa 73,5 daN/mm². Fazele de tratament termic ale barei vor fi corelate cu fazele de prelucrare astfel ca tensiunile interne care apar în bară să se anuleze reciproc. Secțiunea barei este, în general, pătrată, cu lungimea laturii de minimum 25 mm. Valoarea deformației specifice transversale a barei trebuie determinată și indicată cu o eroare $\leqslant 3\%$. Distanța între punctele terminale ale lungimii de utilizare și locurile de aplicare ale momentului încovoietor va fi de minimum 4 ori grosimea barei de încovoiere. Traductoarele se aplică în mijlocul barei astfel ca să nu ocupe mai mult ca 80% din lățimea barei.

Instalația de solicitare la încovoiere va fi cît mai rigidă fiind astfel construită încît să asigure aplicarea unui moment încovoietor constant în ambele sensuri consecutiv. Dacă momentul de încovoiere este realizat prin deplasarea egală a capetelor barei de etalonare și nu prin aplicarea unor forțe (greutăți) la aceste capete, raza de încovoiere a barei devine independentă de variația de temperatură. Se știe că o variație de +1°C provoacă la oțel o variație a modulului de elasticitate de circa $-0{,}3\,‰$, astfel că la o bară de încovoire solicitată cu forțe (greutăți) deformația specifică se modifică cu circa $+0{,}3‰$. Aplicarea momentului încovoietor prin deplasări și nu prin forțe mai prezintă și avantajul unei tendințe minime de fluaj și de oscilație după încărcare.

Pe lungimea de utilizare a barei trebuie să se poată realiza o deformație specifică medie de pînă la ±3000 μm/m reglabilă cu o precizie de ±10 μm/m deci de 0,33%. Deformația specifică medie pe suprafața barei se va determina la fiecare încărcare cu o precizie de ±2 μm/m, respectiv de ±0,2%. Datorită variației toleranțelor de ajustare sau variației locale a modulului de elasticitate, pot să apară abateri locale de la valoarea medie a deformației specifice. Se recomandă ca aceste abateri să nu depășească ±0,5% din valoarea medie. Abaterea se poate determina din măsurări repetate în aceleași condiții [23; 24; 33].

Pentru încercarea și omologarea metrologică a traductoarelor tensometrice rezistive construite în țară, la Institutul Național de Metrologie Laboratorul Timișoara s-a realizat un banc pentru etalonarea acestora, conceput după schema din tabelul 11.3, c [29]. Bancul de etalonare (fig. 11.11) constă dintr-o masă-suport *1* care susține o șină rigidă de ghidaj *2* pe care culisează două suporturi *3* și *4* prevăzute cu un cuțit de

reazem fix *5* şi un cuţit de reazem mobil *6* pe care se aşează bara de etalonare *7*, pe care se lipesc traductoarele de etalonat *8* — fig. 11.12. Bara de etalonare *7* este prevăzută pe feţele verticale în zona fibrei neutre cu două şanţuri de secţiune triunghiulară, în care pătrund şuruburile *9* cu vîrf conic, ce permit fixarea unui suport *10* care susţine plăcuţa micrometrică

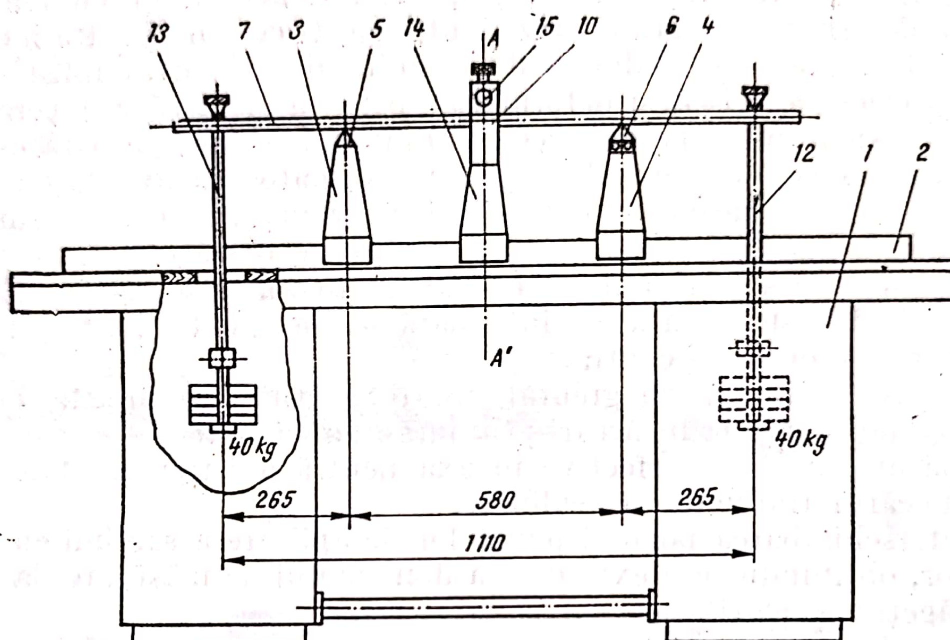


Fig. 11.11.

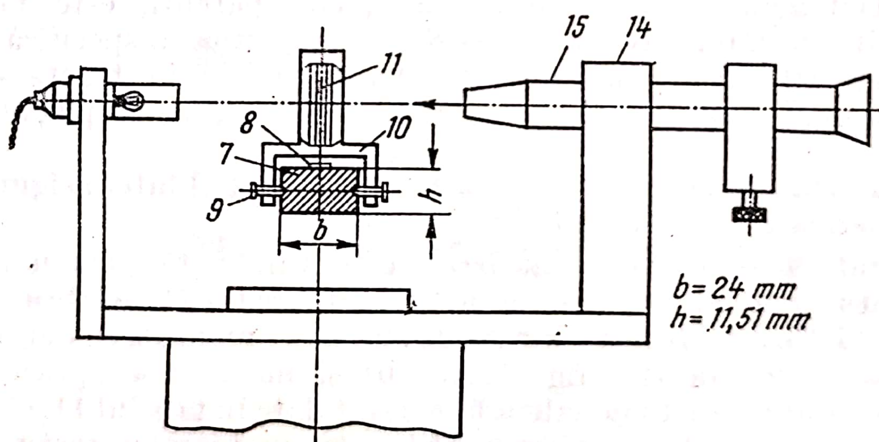


Fig. 11.12.

transparentă *11*, luminată lateral. Încărcarea barei *7* se realizează cu ajutorul unor juguri tarate *12* şi *13* fie în exteriorul reazemelor *3* şi *4* ca în fig. 11.11, fie în interiorul lor prin schimbarea reciprocă a poziţiei suporturilor *3* şi *4*, cu jugurile de încărcare *12* şi *13*. Pe şina de ghidaj *2* culisează un suport *14* care susţine un microscop cu spirală *15*, cu valoarea diviziunii de 1 μm. Pentru determinarea săgeţii efective a barei în dreptul unui

Scanned with OKEN Scanner

traductor de calibrat, se deplasează în zona acestuia plăcuţa micrometrică *11* şi se fixează suportul său *10* cu şuruburile *9*, după care se vizează plăcuţa micrometrică cu microscopul *15*, reglînd indicaţia acestuia la zero, iar apoi se încarcă bara de calibrare *7* pînă la o anumită sarcină şi se citeşte săgeata efectivă a barei la microscop. Din valoarea efectivă a săgeţii, dimensiunile barei şi valoarea sarcinii se determină deformaţia specifică efectivă pentru traductorul respectiv. Concomitent cu măsurarea săgeţii, se determină şi variaţia rezistenţei electrice $\Delta R/R$ a traductorului studiat. Constanta k a traductorului rezultă din raportul între variaţia rezistenţei electrice $\Delta R/R$ şi deformaţia specifică efectivă ε. Operaţiile se repetă în aceeaşi ordine pentru fiecare traductor *8*, lipit pe bara de etalonare *7*. Bancul de etalonare realizat prezintă următoarele avantaje :

— bara de etalonare este o grindă liber rezemată cu console simetrice, la care între reazeme — zona de lucru — apare o stare de solicitare de încovoiere pură fără forţă axială şi forţă tăietoare, astfel că pe cele două feţe ale barei — superioară şi inferioară — vor exista numai tensiuni normale egale şi de semn contrar,

— încărcare directă cu greutăţi tarate, evitîndu-se solicitările suplimentare ce pot apare la încărcări prin pîrghii articulate,

— măsurarea săgeţii efective în axa neutră a barei de etalonare în dreptul fiecărui traductor de calibrat,

— interschimbarea poziţiei punctelor de aplicare a sarcinii cu poziţia reazemelor, obţinîndu-se o extindere a domeniului de măsurare (la aceeaşi sarcină săgeţi mai mari),

— poziţia reazemelor este astfel aleasă, încît bara aşezată pe reazeme nu se deformează sub acţiunea greutăţii proprii,

— deformarea cauzată de aplicarea la mijlocul barei a suportului de material plastic cu plăcuţa micrometrică transparentă este neglijabilă,

— secţiunea barei este astfel aleasă încît deformaţia specifică respectiv tensiunea în bară ia valori convenabile, divizibile în trepte egale, iar săgeata maximă a barei intră în cîmpul de măsurare al plăcuţei micrometrice,

— bara este solicitată sub limita de proporţionalitate, asigurîndu-se o revenire elastică la poziţia iniţială,

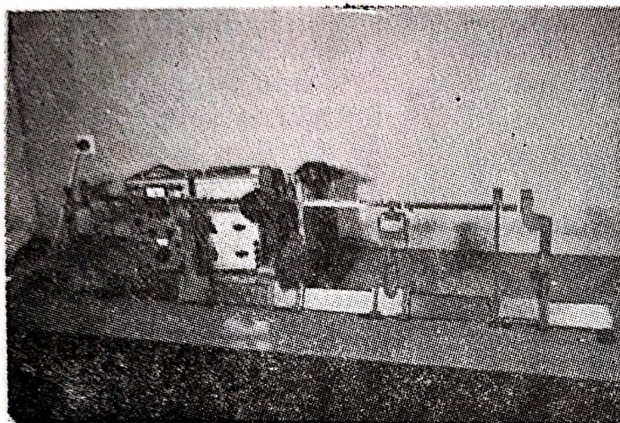
— suprafaţa zonei active a barei este suficientă pentru a permite aplicarea tuturor tipodimensiunilor de traductoare rezistive fabricate în ţară.

Figura 11.13, a reprezintă bancul de etalonare realizat, cu detalii privind aplicarea sarcinilor tarate (fig. 11.13, b) şi măsurarea optică a săgeţii (fig. 11.13, c). Caracteristicile sale tehnice sînt date în tabelul 11.4. Bancul de etalonare s-a utilizat la încercarea atît a traductoarelor rezistive clasice **cît şi** a celor cu straturi policristaline de germaniu realizate în ţară [12].

11.2.3. METODOLOGIA ETALONĂRII STATICE A TRADUCTOARELOR REZISTIVE

Etalonarea şi verificarea traductoarelor se execută în condiţiile **atmosferei standard** de încercare prevăzute de STAS 6300—73 şi anume **temperatura** 20 ±2°C, umiditatea relativă 65 ±5% şi presiunea [atmosfe-

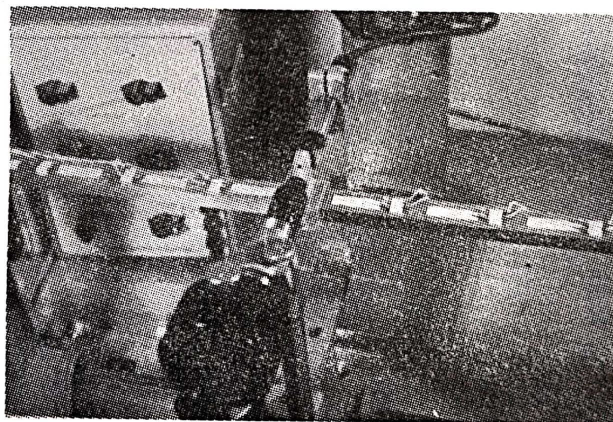
rică 960 ± 100 mbar. Traductoarele tensometrice rezistive fabricate în țară se calibrează și se verifică la controlul curent al lucrărilor de traduc-



a)



b)



c)

Fig. 11.13.

toare și la omologarea unui nou tip de traductor [19]. Pentru denumirea de „traductor electrotensometric rezistiv" se folosește prescurtarea „TER".

Etalonarea și verificarea traductoarelor rezistive se execută pe probe de TER extrase din lot, iar unele operații de verificare se extind asupra fiecărui exemplar din lot.

Prin probe de TER se înțelege un număr de TER extrase dintr-un lot. Prin lot de TER se înțelege un număr limitat din aceeași serie de fabricație,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11.4

Caracteristicile tehnice ale bancului de etalonare construit la Institutul Național de Metrologie București, Laboratorul Timișoara

1. *Date constructive*		2. *Domeniul de utilizare*	
Secțiunea barei de încovoiere	11,51 × 24 mm²	Lungimea bazei de măsurare	1... 200 mm
Lungimea utilă a barei	580 mm	Lățimea bazei de măsurare	1... 20 mm
Sarcina maximă aplicată	2 × 40 daN	Rezistența electrică a TER	100... 1000 Ω
Săgeata teoretică maximă	7547,42 μm	Domeniul compensatorului MK	±26.10³ μm/m
Tensiunea teoretică maximă	21,6 daN/mm²	Valoarea diviziunii la MK	1 μm/m
Deformația specifică maximă	1030 μm/m	Precizia de citire la microscop	0,2 μm
3. *Toleranțe de execuție a barei*		4. *Precizia de reproducere*	
Grosimea	± 0,01 mm	Sarcina	± 0,02 %
Lățimea	± 0,01 mm	Săgeata	± 0,1 %
Brațul momentului încovoietor	± 0,5 mm	Rezistența electrică	± 0,2 %

Precizia globală asigurată la calibrare 0,5 %

Scanned with OKEN Scanner

adică realizat în condiţii identice: executat cu acelaşi dispozitiv şi de acelaşi operator, cu element sensibil din acelaşi material, cu aceleaşi dimensiuni şi cu aceeaşi configuraţie a reţelei, avînd suportul din acelaşi material şi cu aceleaşi dimensiuni, lipit cu acelaşi adeziv, cu acelaşi fel de fire de conexiune (terminale) şi avînd aceeaşi bază de măsurare l_0, rezistenţă electrică R şi constantă k (cu anumite toleranţe maxime admise de standarde sau norme). Un lot se consideră constituit din maximum 100 exemplare la care caracteristicile urmărite pot fi stabilite pe fiecare TER în parte [11].

Un nou tip de TER se consideră realizat prin modificarea valorii nominale a oricărui parametru constructiv (l_0, R, k, dimensiuni, materiale, configuraţie, etc.) a tipului de TER din loturi deja omologate. Pentru omologarea unui nou tip de TER se etalonează şi se verifică un număr minim de 5—6 bucăţi din fiecare lot livrat, admiţîndu-se că există o repartiţie normală (după Gauss) a erorilor mărimilor verificate. Probele de TER din lot se iau la întîmplare.

Operaţiile de verificare se pot executa asupra fiecărui exemplar din lot şi asupra probelor extrase din lot. Verificarea fiecărui exemplar din lot constă din:

— verificarea aspectului exterior şi a execuţiei elementelor componente,
— verificarea lungimii bazei de măsurare,
— verificarea rezistenţei electrice a elementului sensibil.

Verificarea fiecărei probe extrase din lot constă din:

— verificările menţionate mai sus pentru fiecare exemplar din lot,
— verificarea rezistenţei de izolaţie a suportului,
— stabilirea prin etalonare a constantei k.

La omologarea unui nou tip de TER se efectuează în mod suplimentar determinarea caracteristicilor metrologice ale probelor, în cadrul unor încercări funcţionale pentru determinarea erorilor relative maxime de justeţe, fidelitate, creştere a indicaţiilor, liniaritate, revenire şi revenire la zero, precum şi a rezistenţei de izolaţie, pragului de sensibilitate şi a valorii medii a diviziunii (TER fiind asociat cu un anumit aparat sau punte de măsurare). Atît la omologarea unui nou tip de TER cît şi la controlul curent al livrărilor, se verifică inscripţiile pe ambalejele loturilor de TER.

Verificarea aspectului exterior, a dimensiunilor şi a asamblării părţilor componente a TER se face constatîndu-se îndeplinirea condiţiilor tehnice prescrise pentru elementul sensibil, suportul său, adezivul, firele terminale, contactul intermediar (ca anexă a TER) şi foiţa sau pelicula de protecţie (dacă există). Aceste verificări se execută prin observaţie vizuală sau prin măsurări cu aparate obişnuite.

Verificarea lungimii bazei de măsurare, a rezistenţei electrice a elementului sensibil şi a rezistenţei de izolaţie a suportului se face constatînd dacă acestea corespund condiţiilor tehnice fixate în norme sau standarde. Măsurarea lungimii l_0 şi a lăţimii l' a bazei TER se face cu precizia de 0,1 mm pentru l_0 şi $l' \geqslant 10$ mm şi cu precizia de 0,1 mm pentru l_0 şi $l' < 10$ mm. Măsurarea rezistenţei electrice R a elementului sensibil respec-

tiv a variației sale relative $\Delta R/R$ trebuie efectuată cu o punte, un compensator sau un montaj de măsurare a cărui eroare maximă de măsurare să nu depășească $\pm 0{,}1\%$ respectiv ± 5 $\mu\Omega/\Omega$. Măsurarea se face prin comparație cu rezistențe-etalon cu domeniul de măsurare pînă la 20000 $\mu\Omega/\Omega$, divizibil în trepte mari de 2000 $\mu\Omega/\Omega$ $\pm 0{,}02\%$, respectiv în trepte mici de 200 $\mu\Omega/\Omega$ $\pm 0{,}05\%$. Măsurarea rezistenței de izolație a suportului se execută cu un megohmmetru sau punte cu tensiunea de alimentare de maximum 50 V (baterii) pentru evitarea străpungerii. Rezistența de izolație a suportului se măsoară între firele de conexiune (terminale) ale TER și suprafața unei plăci de metal pe care traductorul este apăsat cu ajutorul unei plăcuțe de cauciuc.

Determinarea constantei k a probelor trebuie făcută pentru valoarea maximă a deformației specifice pînă la care TER se comportă liniar, deci poate fi utilizat pentru măsurări. Valoarea lui k astfel obținută urmează a fi atribuită întregului lot din care s-au extras probele încercate.

Stabilirea constantei k prin etalonare comportă o serie de operații și anume:

a) Lipirea probelor pe bara de încovoiere, astfel ca jumătate din numărul lor să fie repartizate pe partea superioară, iar cealaltă jumătate pe partea inferioară a barei. Traductoarele se lipesc paralel cu axa longitudinală a barei, cu abateri maxime de $\pm 1°$.

b) Verificarea stării probelor în urma lipirii și uscării (continuitate, scurtcircuit, izolație).

c) Măsurarea rezistenței electrice a probelor nesolicitate.

d) Solicitarea barei de etalonare alternativ de cîte 3 ori cu încărcări prealabile de $\pm$ respectiv $\mp$ (1100 ± 50) μm/m.

e) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcările prealabile), cu controlul valorii de zero a săgeții barei.

f) Solicitarea barei într-un sens pînă ce $|\varepsilon|$ atinge valoarea $(1000 \pm \pm 10)$ μm/m și măsurarea variației relative de rezistență $\Delta R/R$ a probelor și a valorii săgeții barei.

g) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcarea într-un sens), pentru controlul aplicării sarcinii.

h) Solicitarea barei în sens contrar pînă ce $|\varepsilon|$ atinge valoarea (1000 ± 10) μm/m și măsurarea variației relative de rezistență $\Delta R/R$ a probelor și a valorii săgeții barei.

i) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcarea în sens contrar), pentru controlul aplicării sarcinii.

j) Măsurarea săgeții barei se face conform fig. 11.14, iar determinarea deformației medii ε_m pe suprafața barei se face cu ajutorul relațiilor [15; 16]

$$\varepsilon_m = \frac{\pm h}{\dfrac{a^2}{p_1} + p_1 + h}\,; \quad \varepsilon_m = \frac{\pm h}{\dfrac{a^2}{p_2} + p_2 - h} \qquad (11.3)$$

după cum săgeata p_1 se măsoară pe partea concavă, respectiv p_2 pe partea convexă a barei de încovoiere.

k) Deformația specifică efectivă ε a rețelei traductorului aflată la distanța e de suprafața barei de etalonare (fig. 11.15) se obține din relația

$$\varepsilon = \varepsilon_m \left(1 + \frac{2e}{h}\right). \qquad (11.4)$$

În cazul sistemului optic de măsurare a săgeții arătat în fig. 11.12, nu este necesară aplicarea acestei corecții.

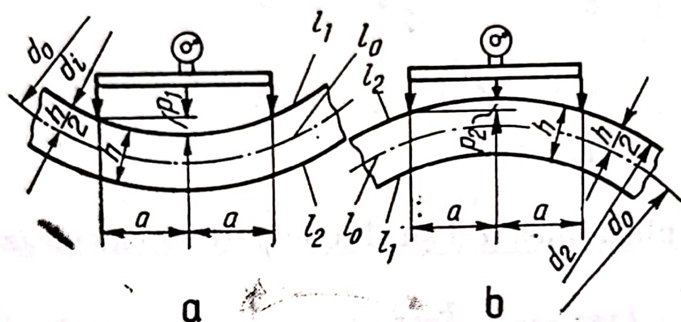


Fig. 11.14

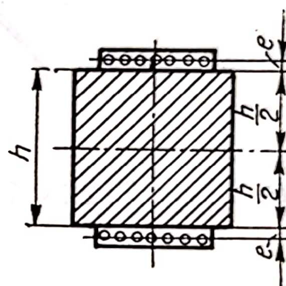


Fig. 11.15

l) Variația relativă de rezistență efectivă $\Delta R/R$ se obține din variația relativă de rezistență măsurată $\frac{\Delta R}{R + R_c}$ cu ajutorul relației

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R}{R + R_c}\left(1 + \frac{R_c}{R}\right) \qquad (11.5)$$

în care R_c este valoarea rezistenței electrice a cablurilor de legătură dintre traductoare și echipamentul de măsurare.

m) Constanta k a probelor calibrate rezultă din relația [35]

$$k = \frac{\left|\overline{\frac{\Delta R}{R_{poz}}}\right| + \left|\overline{\frac{\Delta R}{R_{neg}}}\right|}{|\bar{\varepsilon}_{poz}| + |\bar{\varepsilon}_{neg}|} \qquad (11.6)$$

unde $\left|\overline{\frac{\Delta R}{R_{poz}}}\right|$ și $\left|\overline{\frac{\Delta R}{R_{neg}}}\right|$ reprezintă valorile medii ale variațiilor relative de rezistență efective, obținute la aplicarea repetată a operațiilor menționate la pct. f) și h), $|\bar{\varepsilon}_{poz}|$ și $|\bar{\varepsilon}_{neg}|$ reprezintă valorile medii ale deformațiilor specifice efective, obținute din săgețile măsurate la aplicarea repetată a operațiilor menționate la pct. f) și h).

În fig. 11.16 se arată definirea constantei k ca panta dreptei trasată între cele două valori extreme determinate.

n) Operaţiile menţionate la pct. e), f), g), *h*) şi i) se repetă în aceleaşi condiţii de 6 ori, obţinîndu-se valorile $k_1, k_2, \ldots, k_6$ pentru fiecare traductor etalonat. Valoarea medie k_{TER} a constantei unui traductor etalonat rezultă din relaţia

$$k_{TER} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} k_i \cdot \tag{11.7}$$

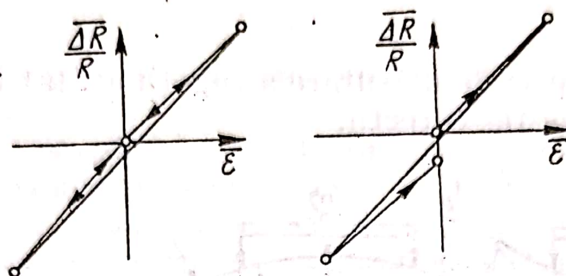


Fig. 11.16

Conform STAS 7122–72 amplitudinea w a şirului de date se calculează din

$$w = k_{TER\,max} - k_{TER\,min} \tag{11.8}$$

iar calculul abaterii medii pătratice s cu ajutorul amplitudinii se efectuiază cu relaţia

$$s = \frac{1}{d_n} \bar{w} \tag{11.9}$$

$\bar{w}$ fiind amplitudinea medie iar valoarea factorului $1/d_n$ fiind :

Numărul de date din şir	5	6	7	8	9	10
Factorul $1/d_n$	0,43	0,40	0,37	0,35	0,34	0,32

Dacă de exemplu se calibrează 6 traductoare, cu ajutorul relaţiei (11.7) se vor obţine valorile $k_{TER\,1}$; $k_{TER\,2}$; ...; $k_{TER\,6}$. Plaja de toleranţă admisă de normele VDE/VDI 2635 [35] este de $\pm 2\,s$.

Conform STAS 2631–72 pct. 2.8, formula corectată a dispersiei de sondaj este

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (k_{TER\,i} - \bar{k}_{TER})^2} \cdot \tag{11.10}$$

Ca rezultat la omologarea unui nou tip de traductor se va indica valoarea medie $\bar{k}_{TER}$

$$\bar{k}_{TER} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} k_{TER\,i} \tag{11.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi intervalul de încredere pentru o precizie statistică de $P = 95\%$. Intervalul de încredere se calculează :

$$- \text{absolut} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s \,; \quad - \text{relativ} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\bar{k}_{TER}} \cdot 100\% \qquad (11.12)$$

unde pentru $P = 95\%$ conform STAS 2631—72 rezultă :

n	5	6	7	8	9	10
t	2,571	2,447	1,365	1,306	2,262	2,228
$t/\sqrt{n}$	1,150	0,999	0,974	0,815	0,754	0,705

o) Pentru determinarea caracteristicilor metrologice funcţionale ale traductoarelor, este necesară încărcarea-descărcarea barei de etalonare la 5 trepte de solicitare de cîte (200 ± 2) μm/m deci pînă la $(1000 \pm \pm 10)$ μm/m (pct. f şi h), şi repetarea operaţiilor de cîte 6 ori (pct. n). Din rezultatele astfel obţinute se calculează caracteristicile metrologice definite în tabelul 11.1, iar încadrarea probelor de traductoare într-o anumită clasă de precizie se va face conform tabelului 11.5 [7 ; 3].

Etalonarea dinamică a traductoarelor tensometrice este tratată în literatura tehnică [5], urmărind determinarea limitei superioare a frecvenţei admise şi rezistenţa la oboseală a TER [31].

11.3. ETALONAREA PUNŢILOR ŞI A AMPLIFICATOARELOR TENSOMETRICE

La măsurarea deformaţiilor specifice cu traductoarele rezistive, se utilizează punţi şi amplificatoare tensometrice. Aceste aparate necesită un control periodic care să le ateste menţinerea funcţionării în limitele clasei de precizie. Controlul se face cu ajutorul unei instalaţii de etalonare care permite reproducerea unor variaţii de rezistenţă relativă $\Delta R/R$ în condiţii de simulare a deformaţiilor specifice de măsurat.

În fig. 11.17 se arată schema electrică de principiu utilizată la etalonarea aparatelor tensometrice (AT) [32]. La baza schemei stă divizorul inductiv de tensiune tip DIT 5 (DIT 4) realizat de Institutul Naţional de Metrologie Bucureşti [20] avînd valoarea raportului de divi-

Tabelul 11.5

Condiții tehnice pentru caracteristicile metrologice ale traductoarelor rezistive

Clasa de precizie **)	Caracteristici constructive					Caracteristici funcționale *)							
	Toleranța max. admisă la				Rezistența de izolație minimă R_i	Eroarea relativă maximă admisă pentru						Pragul de sensibilitate v_s	Valoarea medie a diviziunii v_d
	baza de măsurare l_0, l'.		rezistența electrică R	constanta traductorului k		Justețe e_j	Fidelitate e_f	Creșterea indic. e_c	Liniaritate e_l	Revenire e_r	Revenire la zero e_{r0}		
	% din valoarea nominală				MΩ	% din valoarea măsurată					% din valoarea maximă		
	< 10 mm	⩾ 10 mm											
1	±10	± 5	±0,2	±0,5	10^3	±1	1	±1	±1	±2	±0,5	0,1	1
2	±15	±10	±0,4	±1,0	10^2	±2	2	±2	±2	±4	±1,0	0,2	2
3	±20	±15	±0,6	±1,5	10	±3	3	±3	±3	±6	±1,5	0,3	3
Efectuarea verificărilor	Se determină pentru fiecare exemplar din lot			Se determină pe 5–6 probe extrase din lotul examinat									
	Se determină la controlul curent al livrării de traductoare					Se determină suplimentar la omologarea unui nou tip de traductor							

*) În domeniul deformațiilor elastice ale barei de etalonare, pînă la $\varepsilon \cong 1000\ \mu m/m = 10^{-3}$

**) Pentru traductoarele cu semiconductoare se admite cl. 5 și cl. 10.

zare 0...1,111111 şi rezoluţia 10^{-7}, ceea ce corespunde la 0,1 μm/m. Se menţionează că valorile de etalonare ale schemei din fig. 11.17 au o mare precizie datorită reproductibilităţii rapoartelor de divizare asigurate

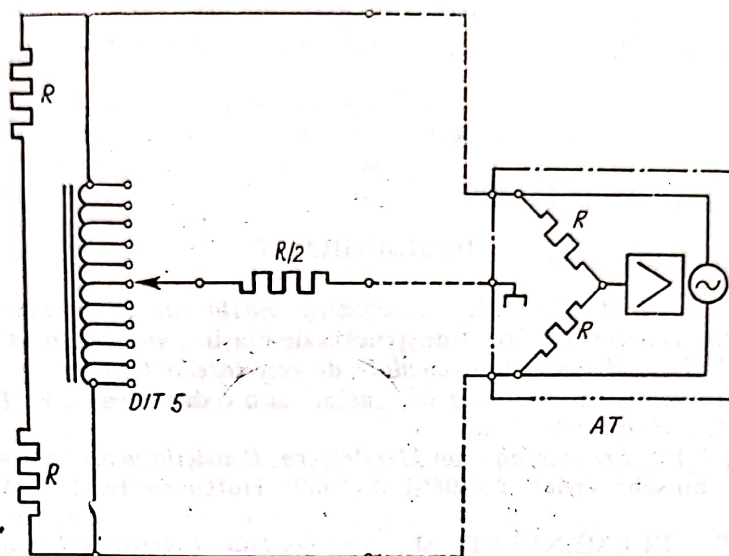


Fig. 11.17

de divizorul inductiv ; punctele de etalonare sînt stabile în timp, contactele de comutare a rapoartelor fiind numai în diagonala de măsurare, în timp ce rezistenţa totală la borne rămîne constantă pe întreg domeniul de etalonare.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. ARGHIRIADE, J., ŞOFLETE, L., *Evaluarea erorilor în determinările extensometrice cu traductoare electrice rezistive (TER)*. Construcţia de maşini, vol. 26, nr. 4, 1974.
2. BIDERMAN, V. L., *Metode experimentale de cercetare a tensiunilor şi deformaţiilor*. În „Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini" sub redactarea S. D. Ponomariov, vol. 1. Editura Tehnică, Bucureşti 1960
3. BORNHARDT, J. F., *Bestimmung von Messfehlern, Beurteilung und Aussage von Messfehlerangaben*. Messtechnische Briefe 2 (1969), 3 (1969). Hottinger Baldwin Messtechnik, Darmstadt 1969.
4. BUZDUGAN, G., BLUMENFELD, M., *Tensometria electrică rezistivă*. Editura Tehnică, Bucureşti 1966
5. CZAIKA, N., *Geberdynamik*. In „Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Grössen" herausgeg. von C. Rohrbach. VDI Verlag, Düsseldorf 1967.
6. FINK, K., ROHRBACH, C., *Handbuch der Spannungs-und Dehnungsmessung*. VDI Verlag, Düsseldorf 1958.
7. FÎNTÎNARU, N., *Despre normalizarea traductoarelor extensometrice rezistive (TER)*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 4.
8. FÎNTÎNARU, N., *Despre precizia de determinare a tensiunilor prin măsurarea deformaţiilor cu mărci tensometrice*. Metrologia aplicată, vol. 13 (1966), nr. 4.
9. FÎNTÎNARU, N., *Etalonarea mărcilor extensometrice*. Metrologia aplicată, vol. 14 (1967), nr. 8.
10. FÎNTÎNARU, N., *Scheme şi dispozitive pentru calibrarea statică a traductoarelor extensometrice rezistive (TER)*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 7.
11. FÎNTÎNARU, N., *Verificarea şi calibrarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive (TER) pe bază de probe extrase din loturi*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 12.
12. GRIGOROVICI, R., DEVENYI, A., BELU, A., COSTĂCHESCU, C., *Traductor piezorezistiv cu straturi semiconductoare şi procedeu de fabricare*. Brevet de invenţie nr. 54614/1971, titular Institutul de Fizică Bucureşti.
13. HANN, F., *Problema aprecierii preciziei unui dispozitiv de calibrare a traductoarelor electrice rezistive*. Metrologia aplicată, vol. 13 (1966), nr. 4.
14. HANN, F., *Metode şi aparate de măsurat în incercarea prin încărcare a construcţiilor*. În „Încercarea construcţiilor" sub redactarea S. Bălan şi M. Arcan. Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.
15. HOFMANN, K., *Über die Ermittlung von Kenngrössen metallischer Dehnungsmesstreifen (DMS)*. ATM-Archiv für Technisches Messen, V 1372—3, 1975.
16. HOFMANN, K., *Methoden zur Bestimmung technischer Daten von Dehnungsmesstreifen (DMS)*. Proceedings of the Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Paper 16, Udine 1974.
17. HUGGENBERGER, A., SCHWAIGERER, S., *Messverfahren und Messeinrichtungen für Verformungsmessungen*. In „Handbuch der Werkstoffprüfung, Prüf-und Messeinrichtungen" herausgeg. von Siebel E. und Ludwig N. Springer Verlag, Berlin 1958.
18. *Instrucţiuni 3—76—75 pentru verificarea şi calibrarea extensometrelor mecanice cu comparator cu cadran, elaborate de Institutul Naţional de Metrologie* Bucureşti, sub redactarea *R. Prexl* şi *L. Doboşan*. Editura Tehnică, Bucureşti 1976.
19. *Instrucţiuni 3—78—75 pentru verificarea şi calibrarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive (TER), elaborate de Institutul Naţional de Metrologie Bucureşti, sub redactarea N. Fîntînaru*. Editura Tehnică, Bucureşti 1976.

Scanned with OKEN Scanner

20. MILLEA, A., BURCĂ, V., POMÎRLAN, M., *Schemă cu divizoare inductive pentru etalonarea statică a aparatelor tensometrice electrice.Institutul Național de Metrologie București.* Referat de laborator nepublicat, 1974.
21. MOCANU, D., BUGA, M., HALCHINI, C., TEODORU, M., *Utilizarea tensometriei electrice la determinarea eforturilor unitare.* Institutul central de documentare tehnică, București, 1967.
22. *Mohr Federhaff Mannheim. Prospecte de fabricație.*
23. *National Aerospace Standard NAS—942.* Strain Gages Bonded Resistance. National Standard Association, Inc., Washington, D.C. 1960.
24. *Proposed Revisions to NAS—942 from Sept. 1, 1967.* BLH-Electronics, Inc., Waltham, Mass., 1967.
25. RAȚIU, M., *Încadrarea extensometriei în disciplina metrologică.* Lucrare în curs de publicare 1976.
26. RAȚIU, M., PREXL, R., MATKOVICI, I., *Calibrator pentru extensometre.* Brevet de invenție nr. 52265/13.6.70, titular Institutul Național de Metrologie București.
27. RAȚIU, M., PREXL, R., MATKOVICI, I., *Calibrarea și verificarea extensometrelor optice și mecanice.* Institutul Național de Metrologie București, Laboratorul Timișoara. Studiu nepublicat, 1967.
28. RAȚIU, M., PREXL, R., *Calibrator pentru extensometre.* Metrologia aplicată, vol. 17 (1970), nr. 12.
29. RAȚIU, M., FÎNTÎNARU, N., MATKOVICI, I., *Banc pentru calibrarea traductoarelor tensometrice rezistive (TER).* Brevet de invenție nr. 54255/11.8.71, titular Institutul Național de Metrologie București.
30. ROHRBACH, C., *Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Grössen.* VDI Verlag, Düsseldorf 1967.
31. RUZHA, Z., *Elektriceskie tenzometri soprotivlenia.* Gosenergoizdat, Moskova 1961.
32. SILVIAN, S., *Metodă și aparat pentru etalonarea statică a aparatelor tensometrice electrice.* Brevet de invenție nr. 51356/22.10.68, titular INCERC București.
33. *Tentative Methods of Test for Performance Characteristics of Bonded Resistance Strain Gages.* ASTM Standards Book, Part 30 (1965), Standard Nr. E 251—64 T. American Society for Testing Materials, Philadelphia 1965.
34. *Tentative Method of Verification and Classification of Extensometers.* ASTM Standards Book, Part 3 (1965), Standard Nr. E 83—64 T. American Society for Testing Materials, Philadelphia 1965.
35. VDE/VDI Richtlinie 2635. *Dehnungsmesstreifen mit metallischem Messgitter.* Kenngrössen und Prüfbedingungen. Herausgeg. von Hofmann K. und Czaika N. VDE/VDI-Handbuch Messtechnik II, Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin/Köln 1974.
36. *Zwick Werkstoffprüfmaschinen Einsingen/Ulm.* Prospecte de fabricație.

Scanned with OKEN Scanner

12

PRELUCRAREA STATISTICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

Prof. dr. ing. M. BUGA
Dr. ing. I. CONSTANTINESCU

12.1. GENERALITĂŢI

Efectuarea măsurării unei mărimi implică un postulat : se admite că se poate asocia un număr sau un indice mărimii ce se măsoară, adică se admite că mărimea corespunde unei dimensiuni sau unui nivel bine definit [4].

În urma procesului experimental de măsurare se obţine o informaţie sub forma unui număr ce reprezintă raportul dintre valoarea mărimii măsurate şi valoarea unei alte mărimi, considerată drept unitate de măsură [7]. În consecinţă, procesul de măsurare se compune din operaţia de comparare, cea de codificare precum şi o operaţie de prelucrare a informaţiilor obţinute.

În timpul comparării şi a codificării, informaţia pe care experimentatorul doreşte să o obţină este „perturbată" de influenţe întîmplătoare care nu se cunosc, sau care se cunosc dar nu pot fi înlăturate ; se spune că informaţia este afectată de erori. Pentru a se putea estima valoarea adevărată a mărimii măsurate, este necesară prelucrarea rezultatelor măsurării. Această prelucrare se face pe baze fundamentate ştiinţific, după metode generale elaborate în acest scop de către statistica matematică. Metodologia de prelucrare, relaţiile de calcul şi terminologia corespunzătoare fac obiectul a numeroase normative şi standarde [9], [10], [11], care au stat la baza întocmirii acestui capitol.

Expresia matematică a măsurării unei mărimi scalare este

$$M = m\ [M] \tag{12.1}$$

în care M este o mărime fizică concretă, de o speţă dată, $[M]$ un submultiplu al lui M, de aceeaşi speţă, luat ca unitate de măsură, iar m un număr [5]. În relaţia (12.1) m este un factor numeric, cantitativ, iar $[M]$ este un factor calitativ, care defineşte speţa mărimii măsurate M, factor luat ca unitate de măsură presupusă cunoscută riguros. Rezultatul M al măsurării se numeşte măsură sau valoare a mărimii considerate, iar rezultatul numeric m al operaţiei de măsurare este valoarea numerică.

Definită în acest mod, operaţia de măsurare este o *măsurare directă*. Valoarea M obţinută considerînd unitatea de măsură lipsită de eroare se numeşte *valoarea reală* sau *valoare adevărată*, aceasta fiind pentru studiul erorilor *valoarea de referinţă*.

Diferenţa dintre rezultatul măsurării unei mărimi şi valoarea adevărată a mărimii respective este *eroarea de măsurare*. Cînd se face o măsurare repetată a unei mărimi M, şirul de valori m obţinut conţine erori de măsurare necunoscute. Principala problemă a prelucrării matematice a rezultatelor măsurărilor este cea a determinării cît mai precise a valorii m. Pentru aceasta este necesară cunoaşterea proprietăţilor erorilor de măsurare.

12.2. ERORI DE MĂSURARE

Studiul erorilor de măsurare poate fi abordat din diverse puncte de vedere, după scopul urmărit. În cele ce urmează se face doar o clasificare şi enunţare a acestora, insistîndu-se numai asupra acelor aspecte care sînt esenţiale pentru dezvoltările ulterioare.

12.2.1. CLASIFICAREA ERORILOR DUPĂ ORIGINEA LOR [2]

Erorile pot avea drept cauză :

a) *Principiul de măsurare*. Este posibil ca teoria însăşi a procedeului de măsurare utilizat să nu fie riguros valabilă pentru operaţia de măsurare ce se realizează.

b) *Mijloacele de măsurare*. Pentru ca erorile de măsurare să fie cît mai mici este necesară alegerea judicioasă a metodelor şi a mijloacelor de măsurare, precum şi a condiţiilor în care urmează să se efectueze măsurarea. Mijloacele de măsurare se aleg avînd în vedere caracteristicile lor tehnice de construcţie şi de funcţionare, precum şi caracteristicile metrologice : justeţea, fidelitatea, sensibilitatea.

c) *Operatorul*. Erorile comise de operator pot fi datorate imperfecţiunii simţurilor (văzul, auzul), neatenţiei, incompetenţei, neglijenţei etc.

12.2.2. CLASIFICAREA ERORILOR DUPĂ NATURA LOR

a) *Erori grosolane*. Caracteristic erorilor grosolane este faptul că nu sînt conforme cu realitatea. Ele constituie greşeli de măsurare şi provin din încălcarea principiilor generale de măsurare sau dintr-o eroare gravă aparţinînd operatorului. Un rezultat care conţine o eroare grosolană diferă esenţial de rezultatele celorlalte măsurări. De regulă, la o repetare a măsurărilor, erorile grosolane nu se reproduc, ceea ce permite depistarea şi înlăturarea lor.

b) *Erori sistematice*. Cînd o influenţă oarecare, acţionînd singură asupra măsurării, produce o eroare avînd o anumită valoare — nenulă — totdeauna aceeaşi, se spune că măsurarea este afectată de o eroare sistema-

Scanned with OKEN Scanner

tică. Erorile sistematice pot fi datorate unei reglări sau etalonări incorecte a instrumentelor, unei erori a operatorului (de exemplu face sistematic o eroare de paralaxă) sau condițiilor experimentale (de exemplu un aparat se utilizează la o temperatură diferită de cea la care a fost etalonat sau reglat).

Se remarcă faptul că erorile sistematice sînt foarte grave, deoarece ele nu se elimină cînd se repetă de mai multe ori măsurarea unei aceleași mărimi și cînd se adoptă ca valoare a mărimii măsurate media aritmetică a rezultatelor măsurărilor.

Uneori este posibil ca erorile sistematice să fie depistate, prin măsurarea aceleiași mărimi prin metode diferite sau prin măsurarea cu același aparat a mai multor mărimi cunoscute. Odată determinate valorile erorilor sistematice, ele pot fi eliminate prin corectarea corespunzătoare a rezultatelor măsurărilor.

c) *Erori aleatorii*. Deoarece în natură și în tehnică nu există fenomene izolate, orice proces de măsurare este influențat de o multitudine de factori care reprezintă efecte ale unor alte fenomene ce se produc simultan cu cel ce se studiază. Influența individuală a fiecăruia din acești factori este neglijabilă, din care cauză nu este posibilă depistarea și înlăturarea lor, efectul global fiind producerea unor erori aleatorii inevitabile ce nu pot fi înlăturate din rezultatele individuale ale măsurărilor.

Teoria probabilităților și statistica matematică permit să se determine în ce măsură erorile aleatorii influențează estimațiile adevăratelor valori ale mărimilor măsurate și cum se pot afla acestea cu o eroare determinată. În acest scop se definește un model probabilistic al apariției erorilor aleatorii și o lege a repartiției acestora.

12.3. REPARTIȚIA NORMALĂ A ERORILOR ALEATORII DE MĂSURARE

12.3.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE. DEFINIȚII [9]

Dacă prin efectuarea unor măsurări pentru o mărime, a căror adevărată valoare este m, se obțin erorile aleatorii z_i, atunci înseși rezultatele măsurărilor

$$x_i = m + z_i \tag{12.2}$$

sînt aleatorii. Repetînd de un număr mare de ori, în condiții identice, măsurarea mărimii m, se constată că rezultatele aleatorii x_i ale măsurării sînt caracterizate de o lege de repartiție bine determinată.

În termenii teoriei probabilităților, orice rezultat al unui experiment se numește eveniment, sigur fiind evenimentul care se produce cu certitudine la orice efectuare a experimentului. Eveniment imposibil este cel care nu se poate produce.

Probabilitatea unui eveniment este o măsură a șanselor de realizare a acelui eveniment. Dacă un experiment se desfășoară astfel încît producerea

Scanned with OKEN Scanner

oricărui eveniment legat de acesta are un număr finit de șanse egal — posibile, probabilitatea evenimentului este raportul dintre numărul rezultatelor favorabile producerii evenimentului și numărul tuturor rezultatelor posibile. Probabilitatea evenimentului x se notează $P(x)$ și este un număr cuprins între 0 și 1, valoarea 0 corespunzînd unui eveniment imposibil, iar 1 unui eveniment sigur.

Variabila aleatorie X este funcția numerică definită pe mulțimea rezultatelor x_i ale unui experiment. Variabila X ale cărei valori x_i pot umple un interval x_1, x_2 și căreia i se poate atașa o funcție $f(x)$ cu proprietățile

$$f(x) \geqslant 0\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{12.3}$$

astfel încît :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{12.4}$$

se numește variabilă aleatorie continuă.

Funcția $f(x)$ se numește densitate de probabilitate, sau densitate de repartiție, a variabilei $X(x)$.

12.3.2. REPARTIȚIA NORMALĂ A ERORILOR ALEATORII DE MĂSURARE [6] [9]

Dacă măsurarea unei mărimi m se efectuează, în condiții identice, de un număr mare de ori n, obținîndu-se șirul de valori aleatorii x_i, iar din acestea, q valori se află în intervalul x_1, x_2, probabilitatea

$$\frac{q}{n} = P(x_1 < x < x_2) \tag{12.5}$$

este o caracteristică a intervalului x_1, x_2 și se numește frecvență relativă a variabilei x în intervalul considerat.

Funcția care permite ca pentru orice interval x_1, x_2 să se determine probabilitatea $P(x_1 < x < x_2)$ se numește repartiție de probabilitate a variabilei x.

În calculele inginerești cel mai des se folosește repartiția de probabilitate normală (Gauss — Laplace), definită prin densitatea de probabilitate de forma

$$\underset{m;\sigma^*}{f(x)} = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^{*2}}} \tag{12.6}$$

pentru $-\infty < x < +\infty$; $\sigma^* > 0$, în care m este adevărata valoare a mărimii măsurate, iar σ^* este un parametru.

Observaţie: În normativul [9], ca şi în majoritatea lucrărilor de statistică matematică pentru parametrul σ^* din relaţia (12.6) se foloseşte notaţia σ. Pentru a evita unele confuzii ca urmare a utilizării în capitolele anterioare a notaţiei σ pentru tensiunile normale, în acest capitol se va folosi notaţia σ^*.

În figura 12.1 s-a reprezentat grafic funcţia $f(x)$, care în cele ce urmează se va numi curbă de repartiţie.

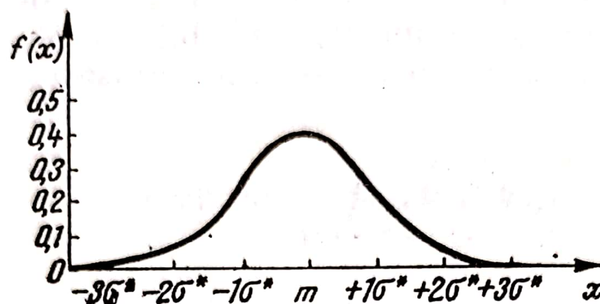


Fig. 12.1.

În calcule este mai comod ca în locul densităţii de probabilitate (12.6), definită pentru rezultatele măsurărilor x_i, să se utilizeze densitatea de probabilitate $p(z)$ a erorilor aleatorii z_i. În acest scop se face schimbarea de variabilă (v. relaţia 12.2))

$$z_i = x_i - m \qquad (12.7)$$

şi se obţine

$$p_{0;\sigma^*}(z) = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^{*2}}}. \qquad (12.8)$$

Dacă se spune despre $\underset{m;\sigma^*}{f(x)}$ că este centrată în m, atunci $p_{0;\sigma^*}(z)$ este centrată în origine.

12.3.3. PROPRIETĂŢILE PRINCIPALE ALE REPARTIŢIEI NORMALE [6]

Legea de repartiţie normală a erorilor aleatorii (12.8) este de regulă într-o bună concordanţă cu experienţa. În acest caz se pot formula metode de calcul privind estimarea adevăratei valori a mărimii măsurate şi a preciziei măsurărilor. Însă, pentru fundamentarea acestor calcule trebuie verificat pentru fiecare caz în parte, aşa cum se va arăta la § 12.5, dacă repartiţia este normală.

Principalele proprietăţi ale repartiţiei normale a erorilor aleatorii de măsurare sînt:

a) *Simetria.* Erorile aleatoii de semne diferite se întîlnesc la fel de frecvent.

b) *Concentrarea.* Erorile aleatorii mici în valoare absolută, sînt mai frecvente decît cele mari şi aceasta cu atît mai mult cu cît parametrul σ^* are valori mai mici (v. fig. 12.2).

c) *Regula „trei sigma"*. Probabilitatea ca variabila aleatorie z să depășească limitele $\pm 3\ \sigma^*$ este foarte mică și anume

$$P(|z| > 3\sigma^*) = 0{,}0027,$$

ceea ce arată că practic erorile de măsurare sînt mărginite în valoare absolută de limita $3\sigma^*$.

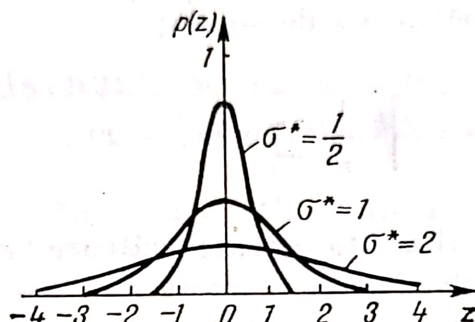


Fig. 12.2

12.3.4. PARAMETRII STATISTICI PRINCIPALI [10], [11]

Normativul [11] prevede că în cazul unei repartiții normale a șirului de date x_i obținute prin n măsurări, desfășurate în condiții identice, pentru o aceeași mărime, se pot calcula parametrii statistici principali definiți după cum urmează (în ordinea importanței lor) :

a) *Parametri de tendință*

— Media aritmetică de sondaj a șirului de date :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (12.9)$$

— Mediana de sondaj a șirului de date, aceasta fiind valoarea față de care frecvența valorilor mai mici decît ea este egală cu frecvența valorilor mai mari decît ea. Valorile x_i se aranjează în ordine crescătoare sau descrescătoare și mediana este :

— dacă n este impar

$$M_e = x_{(n+1)/2}; \qquad (12.10,\ a)$$

— dacă n este par

$$M_e = \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}). \qquad (12.10,\ b)$$

— Modul de sondaj al șirului de date :

$$M_0 = \bar{x} + 3(M_e - \bar{x}). \qquad (12.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

— Valoarea centrală a șirului de date :

$$x_c = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min}), \tag{12.12}$$

în care x_{max} este cea mai mare din valorile x_i, iar x_{min}, cea mai mică.

b) *Parametri folosiți ca indici de împrăștiere*

— Abaterea medie pătratică de sondaj

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2}, \tag{12.13}$$

în care n_i este frecvența absolută corespunzătoare valorii x_i.

— Dispersia șirului de date :

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2, \tag{12.14, a}$$

sau se poate folosi formula aproximativă

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2. \tag{12.14, b}$$

— Amplitudinea șirului de date, care este diferența dintre valoarea cea mai mare (x_{max}) și valoarea cea mai mică (x_{min}) din șirul de date

$$\bar{R} = x_{max} - x_{min}. \tag{12.15}$$

— Coeficientul de variație al șirului de date :

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}}; \tag{12.16}$$

— Abaterea medie absolută a șirului de date :

$$A_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i|x_i - \bar{x}|. \tag{12.17}$$

— Coeficientul de asimetrie al șirului de date :

$$\beta_1 = \frac{(\bar{\mu}_3)^2}{(s^2)^3}, \tag{12.18}$$

în care s^2 este dat de relația (12.14, a) iar

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^3. \qquad (12.19)$$

Observație: Cu excepția coeficientului de variație și a coeficientului de asimetrie, toți parametrii statistici definiți mai sus se exprimă în aceleași unități de măsură ca și datele șirului

12.4. CARACTERISTICILE METROLOGICE ALE MIJLOACELOR DE MĂSURARE

La paragraful 12.2.1, b s-au făcut unele mențiuni privind alegerea metodelor și mijloacelor de măsurare, precum și a condițiilor în care urmează să se efectueze măsurarea. Detalierea acestora nu se poate face decît pentru fiecare situație concretă în parte, printr-un studiu aprofundat al fenomenului care se măsoară, al scopului care se urmărește și de cele mai multe ori al mijloacelor de măsurare avute la dispoziție. În cele ce urmează se vor face doar cîteva considerații generale privind principalele caracteristici metrologice ale mijloacelor (aparatelor) de măsurare [4].

12.4.1. FIDELITATEA

Caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a da indicații cu o variație maximă cît mai mică, la măsurarea aceleiași mărimi, în condiții identice, se numește fidelitatea aparatului respectiv.

Fidelitatea unui aparat se apreciază prin mărimea dispersiei erorilor ce se obțin la utilizarea sa. În cele ce urmează se presupune că erorile sistematice ale aparatului sînt nule.

a) *Cazul cînd adevărata valoare a mărimii ce se măsoară este constantă.* Dacă măsurările sînt nedistructive, este posibilă repetarea de n ori a măsurării mărimii m avută în vedere și aparatul furnizează indicațiile

$$x_i = m + z_i, \quad 1 < i < n.$$

Dacă valorile x_i au o repartiție normală, înseamnă că și variația erorilor z_i este normală, fiind centrată în raport cu m. Înseamnă că definirea fidelității aparatului se poate face pornind de la valorile observate x_i, pentru care se calculează dispersia s^2.

b) *Cazul cînd adevărata valoare a mărimii ce se măsoară este variabilă.* Dacă nu se utilizează decît un singur aparat de măsură, care nu măsoară decît o singură dată o anumită valoare m_i a mărimii ce se studiază se obține

$$x_i = m_i + z_i, \quad 1 < i < n.$$

În acest caz este imposibil să se separe dispersia erorilor de dispersia adevăratelor valori ale mărimii (variabile) ce se studiază. Între cele trei dispersii va exista relaţia

$$s_x^2 = s_m^2 + s_z^2.$$

Pentru rezolvarea unei asemenea probleme, fie se repetă măsurările, fie se utilizează mai multe aparate care fac măsurări simultan.

12.4.2. JUSTEŢEA

Justeţea este caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a da indicaţii cît mai apropiate de cele ale adevăratei valori a mărimii pe care o măsoară. Justeţea unui aparat de măsură se poate aprecia prin erorile sistematice ale indicaţiilor sale. Dar cum aceste erori afectează valoarea mediei aritmetice $\bar{x}$ a indicaţiilor aparatului, înseamnă că justeţea unui aparat nu se poate verifica decît prin comparaţie cu alte aparate.

a) *Compararea erorilor sistematice.* Dacă c este numărul aparatelor de măsură cu care se măsoară n mărimi, se obţine pentru fiecare aparat cîte un şir de n valori x_i. Se spune că justeţea aparatelor este aceeaşi, dacă media aritmetică $\bar{z}$ a abaterilor aleatorii corespunzătoare fiecăruia din cele c şiruri de date este aceeaşi. Această concluzie este valabilă sub rezerva verificării prealabile a egalităţii fidelităţii aparatelor.

b) *Etalonarea unui aparat de măsură.* Etalonarea unui aparat de măsură are o influenţă nemijlocită asupra justeţei acestuia.

Curba de etalonare a unui aparat de măsură trebuie privită ca o funcţie $\varphi(m)$ dintre adevăratele valori m ale mărimilor ce se măsoară şi indicaţiile x ale aparatului, funcţie care este afectată de erorile aleatorii z, adică

$$x = \varphi(m) + z. \tag{12.20}$$

Pentru o mărime m_0 dată, există o zonă de incertitudine A_0B_0 ca urmare a împrăştierii indicaţiilor x ale aparatului (fig. 12.3). Se presupune că repartiţia indicaţiilor aleatorii ale aparatului este normală şi centrată pe valoarea x, ea avînd abaterea medie pătratică s. Dacă această repartiţie se limitează la $\pm 3\ s$ (§ 12.3.3, c) atunci există probabilitatea de 95% ca indicaţia x_0 a aparatului să se afle în zona A_0B_0.

În practică problema este inversă : pentru o indicaţie x_0 a aparatului, să se spună cît este m_0. Dar lui x_0 îi corespunde un interval de încredere asociat IS avînd probabilitatea de 95% să îl conţină pe m_0.

În [4] se arată că

$$m_S - m_I = 3{,}92\,\frac{s}{\varphi(m_0)}.$$

Rezultă că este inutil ca diviziunile scării aparatului să fie mai mici decît cele corespunzătoare intervalului de încredere IS, orice interpolări în interiorul acestui interval fiind iluzorii.

Scanned with OKEN Scanner

12.4.3. SENSIBILITATEA

Sensibilitatea este caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a pune în evidență cele mai mici variații ale mărimii ce se măsoară. Adică, avînd două rezultate x_1 și x_2 a două măsurări, se pune întrebarea dacă valorile adevărate corespunzătoare sînt diferite.

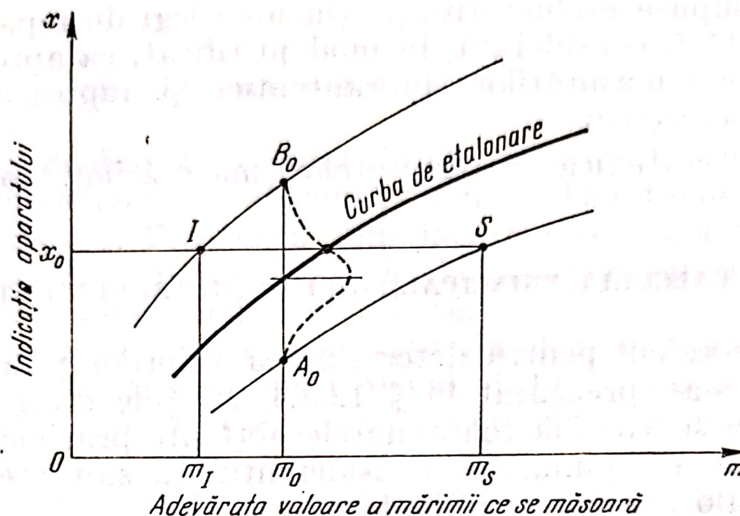


Fig. 12.3

Similar cu (12.20) se poate scrie

$$x_1 = \varphi(m_1) + z_1;$$

$$x_2 = \varphi(m_2) + z_2,$$

de unde, scăzînd a doua relație din prima, rezultă

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \varphi(m_1) - \varphi(m_2) + z_1 - z_2.$$

În [4] se arată că Δx minim care se traduce printr-o variație semnificativă a acului indicator al aparatului are valoarea

$$|\Delta x| = 5{,}5 \frac{s}{\varphi(m)}$$

în care s și $\varphi(m)$ au semnificațiile definite la paragraful 12.4.2.

12.5. PRELUCRAREA STATISTICĂ A REZULTATELOR MĂSURĂRILOR

Metodele de prelucrare statistico-matematice a datelor provenite din măsurări se bazează pe următoarele ipoteze [11]:

a) Datele experimentale sînt șiruri statistice de valori ale unor variabile aleatorii unidimensionale.

Scanned with OKEN Scanner

b) Șirurile de valori obținute în urma măsurărilor nu sînt funcție de timp, adică toate determinările experimentale s-au făcut în aceleași condiții, deși ele sînt decalate în timp.

c) Mijloacele de măsurare (aparatele) au funcționat corect, în condiții de precizie egale, determinările nefiind afectate de erori sistematice sau grosolane.

d) Datele supuse prelucrării aparțin unei legi de repartiție normală sau care să poată fi considerată, în mod justificat, ca aproape normală.

e) Rezultatele măsurărilor sînt autentice și reprezentative pentru fenomenul ce se cercetează.

Prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor constă din [6], [10], [11]:

12.5.1. CALCULUL PRINCIPALILOR PARAMETRI STATISTICI

Relațiile de calcul pentru determinarea valorilor principalilor parametri statistici s-au prezentat în § 12.3.4 (relațiile (12.9 — 12.19)). La calculul acestora se vor lua toate datele obținute prin măsurare, fără a elimina unele din ele numai pe considerentul că sînt prea împrăștiate față de restul valorilor din șirul de date.

Uneori, în scopul reducerii volumului calculelor, se rotunjesc valorile mărimilor măsurate, intervalul maxim admisibil de rotunjire fiind 0,6 din abaterea medie pătratică a șirului de valori.

Toți parametrii statici principali se calculează fie pe baza valorilor rotunjite, fie pe baza datelor brute.

În toate operațiile aritmetice care se efectuează asupra șirului de date, se recomandă a se reține la rezultate două cifre semnificative în plus față de numărul de cifre semnificative ale datelor șirului.

12.5.2. VERIFICAREA NORMALITĂȚII REPARTIȚIEI DATELOR

Prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor își propune să facă estimări ale adevăratelor valori ale mărimilor măsurate și să formuleze unele concluzii privind precizia metodei de măsurare folosite și a erorilor de măsurare. Toate aceste concluzii se bazează pe ipoteza că datele supuse prelucrării au o reapartiție normală sau aproape normală. Din aceste motive trebuie ca pentru fiecare experiment să se verifice concordanța repartiției datelor cu legea repartiției normale.

În acest scop trebuie mai întîi ca datele să fie grupate pe intervale de variație a valorilor, pentru a le condensa ordonat. Aceste intervale se numesc clase. De obicei, mărimea intervalelor care constituie clasele se ia aceeași pentru toate clasele.

Normativul [11] recomandă ca numărul claselor să fie între 13 și 20. Cînd numărul n al datelor este mai mic de 250, este suficientă împărțirea în 10 clase. Pentru un număr de date mai mic de 25, gruparea datelor în clase nu are decît o importanță redusă din punctul de vedere al unui supliment de informație.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul k al claselor se poate determina cu relația

$$k = 1 + 3{,}322 \log n \tag{12.21}$$

căruia îi corespunde o amplitudine a intervalului unei clase

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} \tag{12.22}$$

în care x_{max} și x_{min} sînt cea mai mare, respectiv ce mai mică dintre valorile șirului de date.

Numărul n de date aparținînd clasei i se numește frecvență absolută, iar raportul dintre frecvența absolută și numărul n total de date, se numește frecvență relativă f_i. Frecvența cumulată F este suma frecvențelor relative sau absolute corespunzătoare valorilor mai mici sau cel mult egale cu o valoare oarecare aparținînd șirului de date.

Verificarea normalității repartiției datelor se poate face prin mai multe metode, dintre care normativul [11] recomandă următoarele:

a) Prezentarea frecvențelor relative cumulate ale valorilor în rețeaua de probabilitate.

Pe o diagramă, numită rețea de probabilitate, avînd trasate un sistem special de coordonate, se reprezintă în abscisă limita superioară a claselor iar în ordonată frecvențele relative cumulate corespunzătoare. Dacă curba trasată prin puncte se apropie de o dreaptă, atunci distribu-

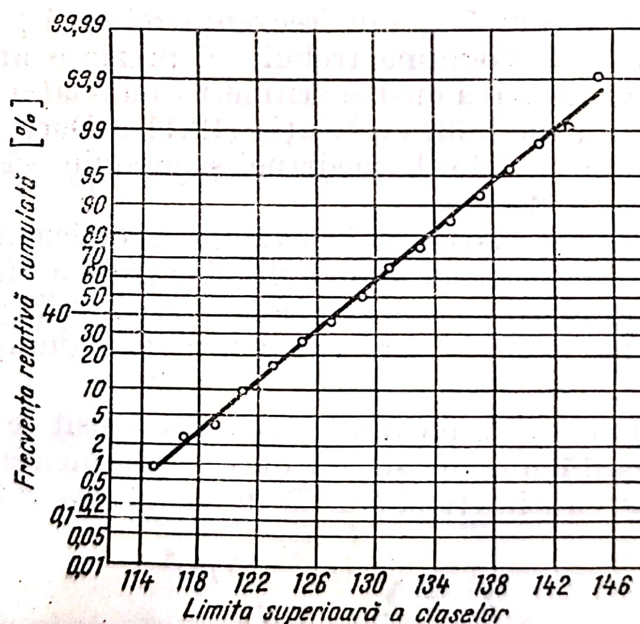


Fig. 12.4.

ția de frecvențe poate fi considerată ca provenind de la o lege de repartiție normală. În figura 12.4 se pezintă spre exemplificare o astfel de reprezentare, extrasă din lucrarea [3].

Metoda este rapidă și comodă, însă este aproximativă.

Cînd se constată că datele au abateri mari față de dreaptă, se poate căuta o transformare simplă a acestora, de exemplu $x^* = \ln x$, $x^* =$

$= \sqrt{x}$, etc., în urma căreia datele să aibă o repartiţie normală. În aceste cazuri, tot ce se referă la mărimile x se va aplica pentru mărimile transformate x_0, după care se face din nou trecerea la mărimile iniţiale.

b) *Verificarea valorilor unora dintre parametrii statistici principali.* Metoda este mai ales calitativă şi constă în următoarele verificări :

— se constată dacă repartiţia de frecvenţă are un singur maxim. În acest scop se trasează o diagramă ca în figura 12.5, numită histo-

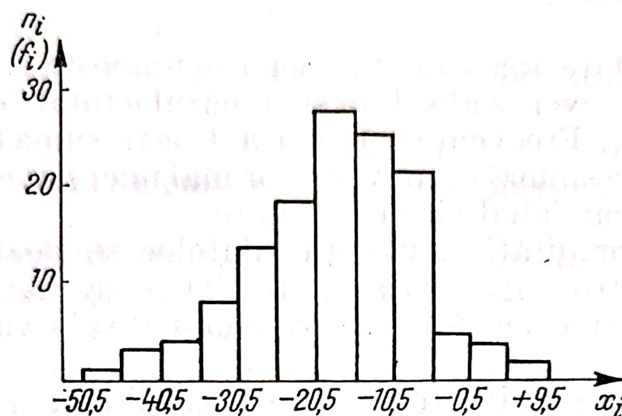


Fig. 12.5.

gramă [10], care are reprezentate în abscisă limitele claselor x_i, iar în ordonată frecvenţa absolută n_i sau frecvenţa relativă f_i. Dacă repartiţia datelor este normală, histograma trebuie să prezinte un singur maxim ;

— se calculează valoarea mediei aritmetice cu relaţia (12.9), a medianei cu relaţia (12.10) şi a modului cu relaţia (12.11). Dacă repartiţia datelor este normală, trebuie ca valorile medianei şi modului să nu difere semnificativ de cea a mediei aritmetice ;

— se calculează, cu relaţia (12.18), valoarea coeficientului de asimetrie, care în cazul unei repartiţii normale a datelor trebuie să fie aproape zero.

Dacă aceste verificări nu duc la concluzii favorabile privind normalitatea repartiţiei datelor, este necesară o analiză mai amănunţită, cantitativă, a şirului de date.

c) *Testul* χ^2. Cel mai important şi mai des folosit [8] dintre testele de verificare a normalităţii unui şir de date experimentale este testul χ^2. Acesta este un test cantitativ şi constă în calcularea valorii

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \tag{12.23}$$

în care :

n_i este numărul de valori al clasei i ;

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — numărul total de valori (date) ;

k — numărul claselor ;

p_i — probabilitatea teoretică corespunzătoare frecvenţei de apariţie a valorii x_i, în cazul unei repartiţii normale.

Valoarea χ^2 calculată cu relaţia (12.23) se compară cu o valoare χ^2 critică, determinată funcţie de un parametru ν numit grad de libertate şi pentru un nivel de încredere α. Dacă suma (12.23) depăşeşte valoarea critică $\chi^2_{\nu,\alpha}$, atunci cu o certitudine avînd probabilitatea α se poate considera că funcţia de repartiţie a datelor experimentale diferă de cea normală. În caz contrar, nu sînt suficiente dovezi pentru o astfel de concluzie.

Se recomandă ca la aplicarea testului χ^2 să fie îndeplinite condiţiile [11].

$$N \geqslant 50\,;\; n_i \geqslant 5\,;\; 10 \leqslant k \leqslant 20. \tag{12.24}$$

Dacă clasele extreme au mai puţin de cinci date fiecare, atunci aceste clase se contopesc cu cele alăturate lor şi numărul gradelor delibertate este egal cu numărul claselor, minus 3. Dacă una din clasele extreme are mai puţin de cinci date, atunci această clasă se contopeşte cu clasa alăturată şi numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 2. Dacă toate clasele au mai mult de 5 date fiecare, atunci numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 1.

Pentru calculul efectiv al sumei (12.23) se procedează după cum urmează [6] :

— se calculează media aritmetică $\bar{x}$ şi abaterea medie pătratică s a şirului de date, utilizînd relaţiile (12.9) respectiv (12.13) ;

— se calculează pentru fiecare clasă i, valoarea

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \tag{12.25}$$

în care x_i este limita superioară a clasei i.

Observaţie. Se consideră totdeauna că şirul de date are limitele $-\infty$, $+\infty$. Deci limita inferioară a primei clase este $-\infty$, iar limita superioară a ultimei clase este $+\infty$.

— se calculează probabilităţile teoretice p_i cu relaţia

$$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) \tag{12.26}$$

pentru care se va avea în vedere că

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \tag{12.27}$$

este funcţia de probabilitate integrală şi că $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

Valorile funcţiei $\Phi(t)$ se pot obţine prin integrare numerică pe calculator, sau se pot lua din tabelul 12.1.

— se calculează suma (12.23) ;

— se caută în tabelul 12.2 valoarea χ^2 critică, corespunzătoare numărului gradelor de libertate ν, stabilit aşa cum s-a arătat mai sus, şi unui nivel de încredere α, convenabil ales ;

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12.1

Valorile funcției $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ [6]

t	Φ(t) 0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

Tabelul 12.1 (continuare)

t	Φ (t)	t	Φ (t)	t	Φ (t)	t	Φ (t)
2,5	0,49379	3,2	0,49931	3,9	0,499952	4,5	0,4999966
2,6	0,49534	3,3	0,49952	4,0	0,499968	4,6	0,4999979
2,7	0,49653	3,4	0,49966	4,1	0,499979	4,7	0,4999987
2,8	0,49774	3,5	0,499767	4,2	0,499987	4,8	0,4999992
2,9	0,49813	3,6	0,499841	4,3	0,499991	4,9	0,4999995
3,0	0,49865	3,7	0,499892	4,4	0,499995	5,0	0,4999997
3,1	0,49903	3,8	0,499927				

Tabelul admite o interpolare liniară cu o eroare de pînă la 10^{-4}

— se compară valoarea χ^2 calculată cu relația (12.23), cu valoarea χ^2 critică și se formulează o concluzie privind acceptarea sau respingerea ipotezei de normalitate a repartiției datelor, așa cum s-a arătat mai sus.

În legătură cu aplicarea testului χ^2, în lucrarea [6] se fac următoarele observații :

— cînd nu există suficiente argumente pentru a respinge ipoteza normalității repartiției datelor, se *acceptă* această ipoteză ; o valoare mică a sumei (12.23) nu poate constitui o demonstrație a normalității ;

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12.2

Valorile critice χ^2 pentru nivelul de încredere α și numărul de grade de libertate ν [6]

ν \ α	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,9	16,9	18,5
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,3	18,9	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,80	12,02	14,07	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,24	14,68	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,44	15,99	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,63	17,30	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,7	35,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,2	37,1	39,3
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,1	45,3

— cu cît numărul măsurărilor este mai mare, certitudinea concluziei formulate pe baza testului χ^2 crește;

— eficiența testului χ^2 crește dacă în fiecare din clasele de grupare a datelor se află aproximativ același număr de date.

12.5.3. ESTIMAȚII ALE ADEVĂRATEI VALORI ALE UNEI MĂRIMI MĂSURATE (6)

a) *Tipuri de estimații, proprietăți.* Estimarea adevăratei valori m a unei mărimi măsurate prin n determinări independente, ale căror rezultate au fost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (presupunînd că nu au existat erori grosolane sau sistematice) constă în:

— determinarea unei funcții $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, numită estimația punctuală sau estimație a valorii m, care să dea o valoare suficient de apropiată de valoarea m;

— determinarea unui interval $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ care cu o probabilitate dată α, să acopere adevărata valoare m. Această estimare se numește *estimație de încredere*, probabilitatea α se numește *nivel de încredere*, intervalul $g - \varepsilon, g + \varepsilon$ — interval de încredere, iar ε — limită de încredere.

Estimația $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ asigură o aproximație suficient de bună a valorii adevărate m, cînd ea îndeplinește următoarele condiții:

— este *nedeplasată*, adică valoarea ei medie teoretică coincide cu valoarea m;

— este *consistentă*, adică ea tinde către m cînd numărul n al măsurărilor crește;

— este *eficientă*, adică ea are cea mai mică împrăștiere dintre estimațiile nedeplasate ale valorii m obținute pe baza rezultatelor măsurărilor.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Estimații punctuale.* Dacă cele n măsurări ale mărimii m au fost efectuate cu aceeași precizie și dacă rezultatele măsurărilor se supun unei legi normale de repartiție, estimația nedeplasată, consistentă și eficientă a mărimii măsurate este media aritmetică a rezultatelor măsurărilor, adică

$$m \approx \bar{x}, \tag{12.28}$$

în care $\bar{x}$ se calculează cu relația (12.9).

c) *Estimații prin intervale de încredere.* Estimațiile de încredere pentru adevărata valoare m a mărimii măsurate prin măsurări de egală precizie, avînd o repartiție normală, este

$$|m - \bar{x}| < \varepsilon \tag{12.29}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{s}{\sqrt{n}} t(\alpha, \nu), \tag{12.30}$$

în care:

s este abaterea medie pătratică a rezultatelor măsurărilor;
n — numărul măsurărilor;
$t(\alpha, \nu)$ — factor provenind din repartiția Student;
α — nivel de încredere;
$\nu = n - 1$ — numărul gradelor de libertate.

Valoarea nivelului de încredere α se poate alege arbitrar, dar se recomandă ca aceasta să se stabilească folosind regula trei sigma (§ 12.3.3, c). În tabelul 12.3 se dau valorile lui α stabilite în acest mod, funcție de numărul n al măsurărilor.

Tabelul 12.3

Valorile nivelului de încredere α, funcție de numărul n al măsurărilor

n	α	n	α	n	α
5	0,960	12	0,988	25	0,994
6	0,970	14	0,990	30	0,995
7	0,976	16	0,991	50	0,996
8	0,980	18	0,992	150	0,997
9	0,983	20	0,993	∞	0,9973
10	0,985				

În tabelul 12.4 se dau valorile factorului $t(\alpha, \nu)$ pentru nivelul de încredere α și numărul gradelor de libertate ν.

În final, se poate spune să intervalul $\bar{x} - \varepsilon$, $\bar{x} + \varepsilon$ acoperă, cu un nivel de încredere α, valoarea m.

12.5.4. ESTIMAREA PRECIZIEI MĂSURĂRILOR

Se presupune că măsurările sînt independente, de egală precizie și că au o repartiție normală.

Indicatorul preciziei măsurărilor este abaterea medie pătratică sau dispersia șirului de date.

Tabelul 12.4

Valorile factorului $t = t(\alpha, \nu)$ [6]

ν \ α	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Interpolarea este permisă numai pentru argumentul ν (cu o precizie de 7.10^{-3}). Pentru $\nu > 100$ se va utiliza relaţia (cu o precizie de 10^{-3})

$$t(\alpha, \nu) = t(\alpha, \infty) + \frac{100}{\nu}[t(\alpha, 100) - t(\alpha, \infty)].$$

a) *Estimarea punctuală a dispersiei.* În cazul măsurării unei mărimi m cunoscute (etalon), estimaţie eficientă a dispersiei este media pătratelor abaterilor rezultatelor măsurărilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la valoarea m

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2. \qquad (12.31)$$

Cînd se măsoară o mărime necunoscută, estimaţia nedeplasată şi consistentă a dispersiei este dispersia şirului de date, calculată cu una din relaţiile (12.14). Această estimaţie este numai asimptotic eficientă.

b) *Intervale de estimaţie pentru eroarea medie pătratică.* Estimaţia cu ajutorul unui interval de încredere a abaterii medii pătratice se defineşte prin relaţia

$$\left|\frac{\sigma^* - s}{s}\right| < q \qquad (12.32, a)$$

sau

$$s(1-q) < \sigma^* < s(1+q) \qquad (12.32,\ b)$$

în care :

σ^* este abaterea medie pătratică standard ;
$q=q(\alpha, \nu)$ — factor, funcție de nivelul de încredere α și numărul gradelor de libertate ν.
s — abaterea medie pătratică a șirului de date, calculată cu relația (12.13).

Dacă s-au făcut n măsurări, numărul gradelor de libertate este egal cu n în cazul măsurării unei mărimi cunoscute (etalon) și $\nu = n - 1$ în cazul măsurării unei mărimi necunoscute.

Relațiile (12.32) sînt valabile numai pentru $n > 17$. În acest caz, valorile lui $q(\alpha, \nu)$ sînt cele din tabelul 12.5.

Tabelul 12.5

Valorile factorului $q = q(\alpha, \nu)$ [6]

ν \ α	0,95	0,99	0,999	ν \ α	0,95	0,99	0,999
17	0,400	0,639	0,961	55	0,196	0,280	0,398
18	0,385	0,602	0,916	60	0,187	0,266	0,375
19	0,371	0,578	0,875	65	0,179	0,253	0,356
20	0,358	0,556	0,838	70	0,172	0,242	0,339
22	0,336	0,518	0,776	80	0,160	0,224	0,311
24	0,318	0,487	0,724	90	0,150	0,209	0,289
26	0,302	0,460	0,679	100	0,142	0,196	0,271
28	0,288	0,437	0,641	110	0,135	0,186	0,257
30	0,276	0,416	0,609	120	0,129	0,177	0,246
35	0,253	0,375	0,544	150	0,115	0,159	0,220
40	0,234	0,343	0,494	200	0,099	0,135	0,184
45	0,219	0,318	0,455	250	0,089	0,120	0,162
50	0,207	0,297	0,424	300	0,081	0,109	0,146

Interpolarea este permisă numai pentru argumentul ν. Pentru $\nu < 150$ eroarea de interpolare liniară nu depășește 2.10^{-3}.

Pentru $\nu > 150$ se vor utiliza relațiile (precizie 10^{-3}) :

$$q(0{,}95,\ \nu) = \frac{1{,}40}{\sqrt{\nu}}; \quad q(0{,}99,\ \nu) = \frac{1{,}83 + \frac{16}{\nu}}{\sqrt{\nu}};$$

$$q(0{,}999,\ \nu) = \frac{2{,}33 + \frac{60}{\nu} - \frac{800}{\nu^2}}{\sqrt{\nu}}.$$

Și pentru această estimație, similar cu ceea ce s-a arătat la paragraful 12.5.3, c, nivelul de încredere α se poate stabili funcție de numărul ν al

Scanned with OKEN Scanner

gradelor de libertate (care la rîndul său este funcție de numărul măsurărilor, așa cum s-a arătat mai sus) și anume :

$$\alpha = 0{,}99 \quad \text{pentru } \nu > 47$$

$$\alpha = 0{,}992 \text{ pentru } \nu > 100$$

$$\alpha = 0{,}995 \text{ pentru } \nu > 200.$$

12.5.5. ELIMINAREA DATELOR AFECTATE DE ERORI GROSOLANE

La § 12.5.1 s-a menționat că un se pot elimina unele din valorile determinate experimental numai pe considerentul că sînt prea împrăștiate față de restul datelor șirului. Pentru eliminarea acelor valori care sînt susceptibile a fi afectate de erori grosolane se aplică teste de verificare, formulate de statistica matematică [6], [7], [8].

a) *Testul Irwin* (*denumit și testul* λ). Dacă șirul de n date se ordonează în sens crescător sau descrescător, rezultatele susceptibile a fi afectate de erori grosolane sînt cele de la extremitățile șirului [7]. Pentru verificarea valorii suspecte x_n se calculează valoarea

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{s}, \tag{12.33}$$

în care s este abaterea medie pătratică a șirului celor n date, determinată cu relația (12.13).

Comparînd valoarea lui λ cu valoarea critică λ critic, din tabelul 12.6, determinarea x_n se elimină din șirul de date dacă $\lambda > \lambda$ critic ; în caz contrar, nu sînt motive suficiente pentru aceasta. Nivelul de încredere al concluziei este α.

Dacă valoarea x_n a fost eliminată, se recalculează abaterea medie pătratică s pentru cele $n-1$ valori rămase și testul λ se aplică din nou, pînă cînd nu se mai elimină date ale șirului.

Tabelul 12.6

Valorile critice pentru testul Irwin

n \ α	0,95	0,99
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

b) *Testul Chouvenet* [6], [8]. Fie x^* valoarea din șirul de date pentru care se face verificarea. Se calculează expresia

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{s} \tag{12.34}$$

în care $\bar{x}$ este media aritmetică, iar s abaterea medie pătratică a șirului de date, din care s-a eliminat valoarea x^*. Comparînd valoarea t cu valoarea critică $t^*(n, \alpha)$ din tabelul 12.7, determinarea x^* se elimină dacă

$$t > t^*(n, \alpha)$$

concluzia avînd un nivel de încredere α.

Tabelul 12.7

Valorile critice $t^*(n, \alpha)$ pentru eliminarea valorilor susceptibile de a fi afectate de erori grosolane [6]

n \ α	0,95	0,98	0,99	0,999	n \ α	0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,923	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,852	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,04	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Interpolarea liniară după argumentul n poate da erori de pînă la 10^{-2}.
Pentru $n > 100$ se poate folosi relația (precizie 10^{-3}).

$$t^*(n, \alpha) = t^*(\infty, \alpha) + \frac{t^*(100, \alpha) - t^*(\infty, \alpha)}{n} \times 100$$

12.5.6. NUMĂRUL NECESAR DE MĂSURĂRI [6]

Pentru atingerea unui interval de încredere avînd limita ε la măsurarea unei mărimi m, adică

$$|m - \bar{x}| < \varepsilon$$

se poate estima numărul necesar de măsurări, dacă se adoptă apriori o valoare pentru raportul $q = \varepsilon/s$, în care s este abaterea medie pătratică a datelor obținute prin măsurări. Pentru un nivel de încredere α și diverse valori q, numărul n necesar de măsurări se obține din tabelul 12.8.

Tabelul 12.8

Valorile raportului q, pentru determinarea numărului necesar de măsurări

q \ α	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

Scanned with OKEN Scanner

12.5.7. PROPAGAREA ERORILOR DE MĂSURARE

Adeseori se întîmplă ca o mărime să nu poată fi măsurată direct, ci să se determine prin calcul, cu ajutorul valorilor a două sau mai multe mărimi măsurate. De exemplu, acesta este cazul determinării tensiunilor principale și direcțiilor principale pentru o stare plană de solicitare. În astfel de situații se spune că mărimea respectivă a fost măsurată indirect.

Dacă mărimea u se determină prin măsurarea valorilor lui $x, y, v, \ldots$, adică dacă

$$u = u(x, y, v, \ldots) \tag{12.35}$$

este necesar să se poată face o estimare a preciziei de determinare a mărimii u cunoscînd preciziile cu care s-au determinat mărimile $x, y, v, \ldots$.

Pentru cazul cînd mărimile $x, y, v, \ldots$ sînt măsurate independent, dispersia s_u^2 a mărimii u este dată de relația [8]

$$s_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 s_v^2 + \ldots \tag{12.36}$$

în care $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 \ldots$ sînt pătratele derivatelor parțiale ale funcției $u(x, y, v, \ldots)$ în raport cu variabilele $x, y, v, \ldots$, iar s_x^2, s_y^2, $s_v^2, \ldots$ sînt dispersiile rezultatelor măsurărilor mărimilor $x, y, v, \ldots$.

Pentru diverse forme particulare ale funcției (12.35), se dau în tabelul 12.9 expresiile mediei aritmetice $\bar{u}$ și abaterii medii pătratice s_u ale mărimii u funcție, de valorile corespunzătoare ale variabilelor $x, y, v, \ldots$.

Tabelul 12.9

Expresiile mediei aritmetice $\bar{u}$ și ale abaterii medii pătratice s_u pentru diverse forme ale funcției $u(x, y, v, \ldots)$

$u(x, y, v, \ldots)$	$\bar{u}$	s_u
$u = \pm x \pm y \pm v \pm \ldots$	$\pm \bar{x} \pm \bar{y} \pm \bar{v} \pm \ldots$	$\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_v^2 + \ldots}$
$u = (x)^{\pm 1} \cdot (y)^{\pm 1} \cdot (v)^{\pm 1} \ldots$	$(\bar{x})^{\pm 1} \cdot (\bar{y})^{\pm 1} \cdot (\bar{v})^{\pm 1} \ldots$	$u\sqrt{\left(\frac{s_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{s_v}{\bar{v}}\right)^2 + \ldots}$
$u = Kx^\xi$	$K\bar{x}^\xi$	$\xi \frac{\bar{u}}{\bar{x}} s_x$

12.5.8. DETERMINAREA CELOR MAI FAVORABILE CONDIȚII PENTRU MĂSURĂRI [8]

Relația (12.36) poate fi folosită pentru obținerea unor indicații prețioase privind cele mai bune condiții în care trebuie să se efectueze o măsurare.

Dacă este necesar să se determine mărimea u astfel încît abaterea medie pătratică s_u să nu depășească o anumită limită, presupunînd că $x, y, v, \ldots$ se determină în condiții de egală precizie, atunci din relația (12.36) se pot determina valorile maxime admisibile ale lui $s_x, s_y, s_v, \ldots$. Prin urmare se va putea preciza care dintre mărimile care se măsoară se vor putea determina cu o precizie mai mică, care trebuie măsurată cu o precizie mai mare și dacă metoda de măsurare și aparatura ce urmează să se utilizeze sînt sau nu adecvate scopului urmărit.

12.6. METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

12.6.1. FORMULAREA METODEI [6], [8], [10]

Metoda celor mai mici pătrate are numeroase aplicații în prelucrarea matematică a datelor experimentale. În cele ce urmează se fac referiri numai la cea mai importantă aplicație a acestei metode și anume determinarea celei mai bune funcții — de un anumit tip — pentru reprezentarea valorilor unor mărimi determinate experimental.

Dacă pentru cercetarea unui anumit fenomen s-a determinat experimental dependența variabilei y de variabila x prin efectuarea de măsurări asupra acestora, se pune adeseori problema găsirii unei reprezentări analitice care să exprime rezultatele experimentului, sub forma unei funcții $y = y(x)$.

Deoarece determinările valorilor mărimilor x și y au fost afectate de erori aleatorii, este imposibilă și lipsită de sens alegerea unei formule $y = y(x)$ care ar descrie toate cele N valori determinate experimental. Un același ansamblu de date experimentale se poate descrie printr-o varietate oarecare de tipuri de funcții $y(x)$. *Metoda celor mai mici pătrate nu indică cea mai bună formă de funcție* $y(x)$ pentru reprezentarea datelor experimentale. Ea permite determinarea valorilor celor mai probabile ale coeficienților ce intră într-o funcție aleasă apriori pe baza unor considerente teoretice sau de altă natură privind fenomenul ce se studiază [8].

Dacă funcția $y(x)$ este aleasă sub forma

$$y = y(x\,;\ a_0, a_1, \ldots, a_k) \tag{12.37}$$

în care parametrii $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sînt niște constante, metoda celor mai mici pătrate permite obținerea unor estimații nedeplasate, consistente și eficiente ale acestora (§ 12.5.3, a) pe baza măsurărilor valorilor $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ale funcției (12.37), dacă acestea sînt independente și dacă au o repartiție normală [6].

Dacă măsurările s-au efectuat în condiții de egală precizie, parametrii $a_0, a_1, \ldots, a_k$ se determină din condiția ca expresia

$$S = \sum_{i=1}^{N} [y_i - y(x_i\,;\ a_0, a_1, \ldots, a_k)]^2 \tag{12.38}$$

să fie minimă, ceea ce duce la sistemul liniar de ecuații

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \qquad (12.39)$$

În expresia (12.38) sumarea se face pentru toate cele N perechi de valori y_i, x_i determinate experimental.

12.6.2. DETERMINAREA PARAMETRILOR FORMULELOR UZUALE

Se presupune că numai determinările valorilor y_i au fost afectate de erori (sau că erorile valorilor x_i sînt mult mai mici decît cele ale valorilor y_i).

În tabelul 12.10 se dau expresiile parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_k$ ai unor forme uzuale de funcții $y(x)$ [8]. Pentru toate cazurile sumele se fac de la $i = 1$ la $i = N$.

Tabelul 12.10

Expresiile parametrilor unor forme uzuale de funcții $y(x)$

$y=y(x; a_0, a_1, \ldots, a_k)$	$a_0, a_1, \ldots, a_k$
$y = a_1x$	$a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$
$y = a_0 + a_1x$	$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$ $a_1 = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
$y = a_1x + a_2x^2$	$a_1 = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}$ $a_2 = \frac{\sum x_i^2 y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}$

Observații:

1. Pentru determinarea parametrilor unei funcții $y(x)$ avînd forma unui polinom de grad mai mare decît doi, este mai comod pentru calcule să se utilizeze polinoamele ortogonale ale lui Cebîșev [6].

2. Determinarea parametrilor ce intră neliniar în funcția $y(x)$ se face de obicei prin efectuarea unei schimbări de variabile care să ducă la liniarizarea acesteia. Valorile obținute în acest mod sînt aproximative, deoarece se încalcă principiul celor mai mici pătrate.

Scanned with OKEN Scanner

12.6.3. VERIFICAREA CONCORDANȚEI

Dacă pentru reprezentarea analitică a unui șir de valori x_i, y_i determinate experimental, s-au utilizat două forme diferite ale funcției (12.37), se pune întrebarea care dintre cele două funcții asigură o concordanță mai bună cu datele experimentale. Pentru aceasta se aplică criteriul de concordanță al lui Gauss, care constă în calcularea expresiei [8]

$$\Omega = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i^* - y_i)^2}{N - k} \tag{12.40}$$

unde :

y_i^* este valoarea măsurată de rang i ;

y_i — valoarea calculată cu ajutorul funcției obținute prin metoda celor mai mici pătrate, corespunzătoare rangului i ;

N — numărul perechilor de valori x_i, y_i^* măsurate ;

k — numărul parametrilor a_0, a_1, etc. ai funcției $y(x)$ utilizate.

Dintre două sau mai multe funcții $y(x)$ utilizate pentru reprezentarea valorilor măsurate, cea mai adecvată este cea pentru care expresia (12.40) are valoarea cea mai mică.

12.7. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE ÎN CAZUL REPARTIȚIILOR MULTIDIMENSIONALE

12.7.1. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Variabilă aleatorie n — dimensională x este un sistem ordonat de n variabile aleatorii reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă $\vec{X}$ este un vector aleatoriu n — dimensional, atunci variabilele aleatorii reale x_1, x_2, ..., x_n sînt componentele vectorului $\vec{X}$ [9].

Metodele de prelucrare statistico-matematică a rezultatelor măsurărilor ce sînt considerate ca șiruri statistice de valori ale unei variabile aleatorii multidimensionale urmăresc obținerea informațiilor asupra [11] :

— interdependenței dintre diferiți parametri ;

— influenței pe care o are cunoașterea valorilor luate de unii parametri asupra valorilor celorlalți parametri.

În construcția de mașini apar astfel de situații cînd se studiază fenomene dinamice și în special vibrații.

Dacă în cadrul unui fenomen ce se studiază experimental știm că y este o funcție de x și de alte variabile necunoscute, se pune problema determinării dependenței lui y de x cu un nivel de încredere cît mai ridicat. În acest scop se aplică metode de analiză a corelației.

Scanned with OKEN Scanner

Noţiunea de corelaţie se utilizează cînd dependenţa reciprocă dintre diverşi factori, atribute sau caracteristici ale unui fenomen este numai parţială.

Studiul influenţei pe care o are cunoaşterea valorii pe care a luat-o variabila y asupra valorilor variabilei x se face cu ajutorul regresiei.

12.7.2. CORELAŢIA

Dacă între variabilele x şi y există o corelaţie şi nu o legătură funcţională, nu se mai poate pune problema determinării „celei mai bune" valori a lui y care corespunde unei valori a lui x, ci se poate estima numai cea mai probabilă valoare a lui y în jurul căreia pot fi distribuite valorile determinate experimental. Cu cît valorile măsurate sînt mai apropiate de valoarea cea mai probabilă, cu atît relaţia dintre x şi y este mai bine precizată, acest postulat stînd la baza evaluării cantitative a gradului de corelaţie [8].

Coeficientul corelaţiei simple de sondaj, care indică intensitatea interdependenţelor dintre variabilele aleatorii normale x, y, este definit prin relaţia [11]

$$R_{x,y} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \qquad (12.41)$$

în care x_i, y_i sînt perechile de valori determinate experimental, iar n numărul acestor perechi.

Valorile limită ale lui $R_{x,y}$ sînt 0 şi ± 1. Cu cît valoarea coeficientului de corelaţie este mai apropiată de 1, cu atît legătura dintre cele două variabile x şi y este mai puternică şi invers, dacă valoarea $R_{x,y}$ se apropie de zero. Un coeficient de corelaţie negativ este, de fapt, un coeficient pozitiv pentru corelaţia inversă.

În cazul existenţei mai multor variabile aleatorii, ca indicator al interdependenţei dintre două variabile, în cazul cînd una sau mai multe dintre celelalte variabile sînt considerate constante, se utilizează coeficientul corelaţiei parţiale de sondaj, definit prin relaţia [11]

$$R_{x_2 y, x_1} = \frac{R_{x_2, y} - R_{x_1, y} \cdot R_{x_1, x_2}}{\sqrt{(1 - R^2_{x_1, y})(1 - R^2_{x_1, x_2})}} \qquad (12.42)$$

în care x_1 este variabila considerată constantă, iar R_{x_1, x_2}, $R_{x_1; y}$, $R_{x_2; y}$ sînt coeficienţii corelaţiilor simple de sondaj dintre variabilele x_1, x_2, y, luate două cîte două.

Scanned with OKEN Scanner

12.7.3. REGRESIA

Dacă s-au determinat experimental n perechi de valori x_i, y_i ale variabilelor aleatorii x şi y, funcţia de regresie a lui y în raport cu x este $y = y(x)$ şi reprezintă media valorilor pe care le ia variabila y pentru o anumită valoare a lui x. Dacă

$$y = a_0 + a_1 x, \tag{12.43}$$

regresia este liniară. În acest caz

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x},$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{12.44}$$

în care $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ sînt mediile aritmetice de sondaj ale şirurilor de date x_i, respectiv y_i şi se calculează cu relaţia (12.9).

12.8. EXEMPLE DE CALCUL. CONCLUZII

Pentru ilustrarea principalelor etape ale prelucrării datelor experimentale, se prezintă în continuare două exemple de calcul pentru măsurări efectuate cu traductoare tensometrice rezistive.

Exemplul 1. S-au efectuat măsurări pe distribuitorul unei centrale hidroelectrice solicitat cu presiune interioară, amplasarea punctelor de măsurare fiind cea din figura 12.6.

S-au utilizat cinci rozete dreptunghiulare cu cîte trei traductoare, cu baza 6 mm, tip 6/120 RE11, fabricaţie Hottinger Baldwin Messtechnik şi o punte Vishay tip P—350 A, cu două cutii de comutare-echilibrare tip SB—2.

S-au făcut citiri la puntea tensometrică pentru două cicluri de încărcare-descărcare, definite prin presiunile

0 — 22,8 — 42,8 — 22,8 — 0 — 22,8 — 0 atm,

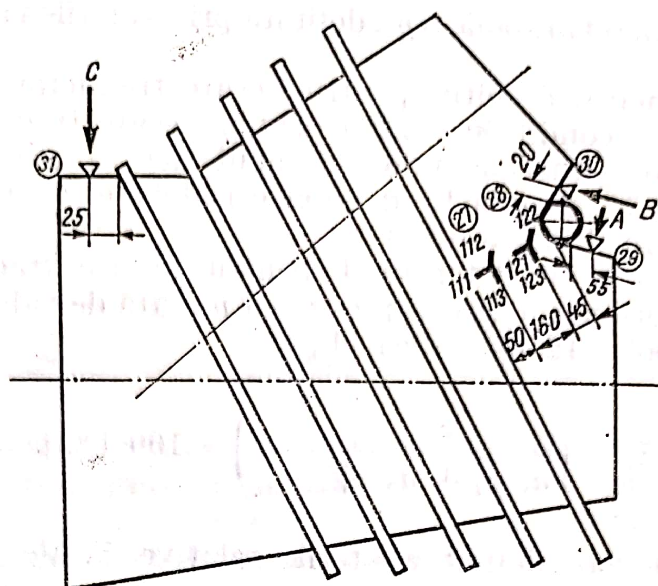
citiri care sînt prezentate în tabelul 12.11.

Pentru a putea lua în considerare efectele neliniare ale elementelor de etanşare nemetalice, ale jocurilor şi frecărilor din reazemele distribuitorului şi conductei forţate cu care acesta era asamblat, deşi materialul a fost solicitat în stadiul elastic, s-a adoptat pentru funcţia $\varepsilon(p)$, a dependenţei deformaţiilor specifice ε de presiunea interioară p, (care defineşte starea de solicitare a distribuitorului) un polinom de gradul doi, de forma

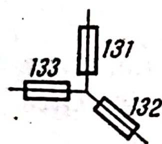
$$\varepsilon(p) = a_1 p + a_2 p^2, \tag{12.45}$$

în care parametrii a_1 şi a_2 se calculează cu relaţiile de pe ultima linie a tabelului 12.10, înlocuind y cu ε, iar x cu p. În acest mod fiecărui tra-

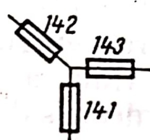
Scanned with OKEN Scanner



Vedere din A
Punctul 29
de măsurare



Vedere din B
Punctul 30
de măsurare



Vedere din C
Punctul 31
de măsurare

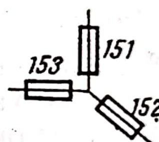


Fig. 12.6.

Tabelul 12.11

Punct de măsurare nr.	Traductor nr.	Citiri la puntea tensometrică μm/m						
		Presiunea atm.						
		0	22,8	42,8	22,8	0	22,8	0
27	111	255	436	590	449	251	435	247
	112	148	189	222	190	145	186	145
	113	234	154	92	154	236	157	235
28	121	144	203	253	204	145	202	145
	122	120	135	147	137	121	135	121
	123	75	44	11	36	68	39	68
29	131	141	182	219	184	141	182	140
	132	120	153	178	154	120	151	120
	133	91	106	117	110	93	107	93
30	141	161	222	273	222	160	221	161
	142	177	257	318	256	172	250	174
	143	171	250	310	247	164	246	162
31	151	193	284	365	290	188	248	189
	152	139	189	239	194	135	190	131
	153	117	123	131	125	117	125	117

ductor i se ataşează o parabolă $\varepsilon(p)$, definită prin valorile parametrilor a_1, a_2 corespunzători.

Deoarece numărul de citiri pentru fiecare traductor este foarte mic, nu se pot îndeplini condiţiile (12.24) pentru fiecare traductor în parte şi prelucrarea datelor experimentale s-a făcut pentru toate traductoarele, concluziile ce se vor formula fiind aprecieri globale, cantitative şi calitative, asupra măsurării în ansamblu.

În acest scop, s-au determinat pentru fiecare traductor abaterile relative ξ_i ale valorilor ε_i citite la presiunea p_i, faţă de valorile corespunzătoare de pe parabola (12.45), adică [1]

$$\xi_i = \left(\frac{\varepsilon_i}{a_1\, p_i + a_2\, p_i^2} - 1\right) \times 100\ [\%]. \qquad (12.46)$$

De asemenea s-au definit abaterile relative ξ_j^0 ale citirilor de zero (pentru $p = 0$)

$$\xi_j^0 = \frac{C_j^0 - C_{j+1}^0}{a_1\, p_{max\,j} + a_2\, p_{max\,j}^2} \times 100\ [\%], \qquad (12.47)$$

în care:

C_j^0 şi C_{j+1}^0 sînt citirile de zero pentru ciclul j de încărcare-descărcare;
$p_{max\,j}$ — valoarea maximă a presiunii p, la care s-au făcut măsurări în decursul ciclului j;
a_1, a_2 — parametrii parabolei $\varepsilon(p)$, pentru traductorul considerat.

Definind un ciclu de încărcare-descărcare ca ansamblul treptelor de aplicare a sarcinilor (pentru care s-au făcut citiri la puntea tensometrică) între două stări de zero (de referinţă), atunci pentru fiecare citire la puntea tensometrică se determină două valori ale abaterii ξ_i: una faţă de citirea de zero iniţială (abaterea ξ_i' la încărcare) şi una faţă de citirea de zero finală (abaterea ξ_i'' la descărcare). Abaterile citirilor de zero ξ_j^0, se determină cîte una pentru fiecare ciclu, pentru fiecare traductor.

Citirile la puntea tensometrică pentru care au rezultat abateri ξ şi ξ^0 în afara intervalului de $\pm 15\,\%$ s-au considerat afectate de erori grosolane şi au fost eliminate. Apoi s-au recalculat parametrii a_1 şi a_2 ai parabolelor $\varepsilon(p)$ şi abaterile ξ_i, ξ_j^0 faţă de noua parabolă. Calculul s-a repetat pînă cînd pentru toate citirile rămase şi pentru toate traductoarele abaterile s-au încadrat în limitele $\pm 15\,\%$.

În acest proces s-au eliminat 10 abateri din totalul celor 150 iniţiale, astfel încît prelucrarea s-a făcut pentru cele 140 valori ale abaterilor ξ_1, ξ_j^0 rămase.

Valorile obţinute pentru parametrii a_1, a_2 ai parabolelor ataşate celor 15 traductoare sînt date în tabelul 12.12.

În acest fel, pentru fiecare traductor, se pot calcula deformaţiile specifice ε pentru valorile dorite ale lui p. Apoi se pot determina în fiecare

Tabelul 12.12

Traductor nr.	a_1	a_2	Traductor nr.	a_1	a_2
111	8,70072	−0,01932	133	0,74200	−0,00369
112	1,96240	−0,00463	141	2,74458	−0,00271
113	−3,71552	0,00875	142	3,71785	−0,00853
121	2,58519	−0,00117	143	3,86965	−0,01262
122	0,70205	−0,00194	151	4,12796	−0,00119
123	−1,22781	−0,00434	152	2,47675	−0,00219
131	1,84889	−0,00062	153	0,37798	−0,00119
132	1,52122	−0,00388			

punct de măsurare deformaţiile specifice principale, direcţiile principale ale solicitării, tensiunile principale şi eventual tensiunile echivalente, după teoria de rezistenţă considerată ca cea mai adecvată.

Verificarea normalităţii repartiţiei abaterilor s-a făcut prin aplicarea testului χ^2 (§ 12.5.2, c).

În acest scop datele s-au grupat în 10 clase de amplitudini egale. Deoarece clasele extreme aveau mai puţin de 5 date s-au contopit astfel încît în final, au rezultat 7 clase conţinînd următoarele numere de date 9, 6, 27, 48, 29, 14, 7. Pentru testul χ^2 s-a obţinut valoarea $\chi^2 = 11,5981$, care comparată cu valoarea critică, egală cu 14,9, din tabelul 12.2, pentru $\nu = 4$ grade de libertate şi un nivel de încredere $\alpha = 0,995$, rezultă că repartiţia este normală.

S-au calculat apoi valorile următorilor parametri ai şirului abaterilor ξ şi s-au obţinut valorile (§ 12.3.4 şi relaţiile (12.9) — (12.19)) :

— media aritmetică

$$\bar{x} = 0,04384\ \%;$$

— valoarea centrală

$$x_c = 0,88169\ \%;$$

— abaterea medie pătratică

$$s = 3,70156\ \%$$

— dispersia

$$s^2 = 13,70155\ (\%)^2$$

— amplitudinea

$$\bar{R} = 24,903915\ \%$$

— coeficientul de variaţie

$$C_v = 84,43339.$$

În aceste condiţii, avînd în vedere cele arătate la § 12.5.3,b şi la § 12.5.4, a, estimaţiile punctuale ale adevăratei valori a abaterilor ξ şi a dispersiei acestora vor fi $\bar{x} = 0,04384\ \%$, respectiv $s^2 = 13,70155\ (\%)^2$.

Exemplul 2. Pentru măsurarea sarcinilor pe roţile unui excavator cu roată cu cupe ce se deplasa pe o cale de rulare formată din două şine, s-au realizat o serie de captoare de tipul prezentat în paragraful 3.5.4, pagina 176.

Un astfel de captor s-a obţinut prin montarea a opt traductoare tensometrice rezistive tip RC 120, fabricaţie Mikrotehna—RSC, pe un cupon de şină de cale ferată tip 49.

Scanned with OKEN Scanner

În vederea etalonării, captorul a fost montat într-o presă hidraulică de 600 kN, tip MB 60, fabricaţie WPM — RDG şi i s-au aplicat cinci cicluri de încărcare şi anume :

— 3 cicluri de forma :

0 — 20 — 40 — 60 — 80 — 100 — 120 — 140 — 160 — 180 — 200 kN,

— 2 cicluri de forma :

0 — 50 — 100 — 150 — 200 — 250 kN.

Citirile la puntea tensometrică (tip MK, fabricaţie HBM) corespunzătoare celor 5 cicluri de încărcare au fost cele din tabelul 12.13.

Tabelul 12.13

Forţa P_i kN	Citiri la puntea tensometrică ε_i μm/m		
20	134	131	129
40	282	281	282
60	432	432	432
80	581	582	583
100	732	733	732
120	886	883	884
140	1040	1040	1040
160	1199	1200	1203
180	1360	1362	1415
200	1522	1528	1525
50	354	351	
100	734	729	
150	1108	1122	
200	1497	1500	
250	1894	1905	

Avînd în vedere condiţiile în care s-a făcut etalonarea, s-a apreciat că determinarea constantei captorului trebuie să se facă considerînd perechile de valori ε_i, p_i determinate experimental, ca o repartiţie bidimensională a erorilor de măsurare. Aceasta înseamnă că atît citirile ε_i la puntea tensometrică cît şi P_i la presa hidraulică au fost considerate ca fiind afectate de erori.

Înlocuind în relaţia (12.41) pe x_i cu P_i şi pe y_i cu ε_i, s-a calculat coeficientul corelaţiei simple de sondaj pentru cele 40 perechi de valori ε_i, P_i din tabelul 12.13. S-a obţinut $R_{P,\varepsilon} = 0{,}9997$, valoare care este foarte aproape de 1, ceea ce indică o bună interdependenţă între variabilele aleatorii P, ε.

Funcţia de regresie liniară a lui ε în raport cu P va fi în acest caz (analog cu relaţia (12.43))

$$\varepsilon = a_0 + a_1 P, \tag{12.48}$$

unde : a_2 şi a_1 se calculează cu (12.44), în care s-au introdus mediile aritmetice de sondaj ale celor două şiruri de date ε_i, respectiv P_i şi anume

$$\bar{\varepsilon} = 893{,}975 \ \mu\text{m/m} \text{ şi } \bar{P} = 120 \text{ kN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a obținut, în final,

$$\varepsilon = -33{,}11068 + 7{,}72571P \ \mu\text{m/m}. \qquad (12.49)$$

Faptul că dreapta (12.49) nu trece prin origine pune în evidență o eroare sistematică P_0 la măsurarea forțelor P_i, ca urmare a frecărilor dintre pistonul și cilindrul presei, precum și a greutății cuponului de șină din care a fost realizat captorul.

Dacă determinarea constantei captorului se face în ipoteza că numai citirile la puntea tensometrică au fost afectate de erori și se admite o dependență liniară, de forma

$$\varepsilon = kP,$$

în care (conform tabelului 12.10, prima linie)

$$k = \frac{\sum \varepsilon_i P_i}{\sum P_i^2},$$

rezultă $k = 7{,}51039$ μm/m kN, valoare ce este cu 2,867 % mai mică decît cea a parametrului a_1 din relația (12.49) a regresiei lui ε în raport cu P.

BIBLIOGRAFIE

1. BLUMENFELD, M., BUGA, M., CONSTANTINESCU, I., VOICU, C., GHEORGHIU, H., *Considerații asupra prelucrării și interpretării rezultatelor măsurărilor tensometrice rezistive*, Buletinul Institutului politehnic București, tomul 37, nr. 1, 1975.
2. DEFIX, A., *Erreurs de mesurage* (R570), Paris, Dunod, 1960.
3. DIETER, G. E., *Metalurgie mecanică*, București, Editura tehnică, 1970.
4. MOTHES, J., *Mesure et statistique* (R560, R562), Paris, Dunod, 1960.
5. PLĂCINȚEANU, I., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, București, Editura tehnică, 1957.
6. RUMȘISKI, L. Z., *Prelucrarea matematică a datelor experimentale*, București, Editura tehnică, 1974.
7. TIRON, M., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, București, Editura tehnică, 1972.
8. WORTHING, A. G., GEFFNER, J., *Prelucrarea datelor experimentale*, București, Editura tehnică, 1959.
9. * * * STAS 1839 — 72, *Teoria probabilităților — Terminologie și simboluri.*
10. * * * STAS 2631 — 72, *Statistică matematică — Terminologie și simboluri.*
11. * * * STAS 7122 — 72, *Statistică matematică — Prezentarea și prelucrarea datelor experimentale și de observație.*

13

INTRODUCERE ÎN ANALIZA TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

Dr. ing. I. PASCARIU

13.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Progresele tehnicii din ultimele trei decenii au revelat tot mai pregnant imposibilitatea de a obţine soluţii matematice riguroase în multe probleme inginereşti. În aceeaşi perioadă de timp, dezvoltarea impetuoasă a maşinilor electrice cu viteză mare de calcul a generat un interes crescînd pentru utilizarea metodelor numerice la soluţionarea problemelor complexe ale ingineriei. Drept urmare, multe dintre metodele numerice de „modă veche" ce se dezvoltaseră înainte de era calculatoarelor au fost „acomodate" rînd pe rînd, spre a fi folosite în noile maşini. În această categorie intră analiza numerică prin diferenţe finite, metodele reziduale şi metodele variaţionale. Dar cu toate progresele vădite în utilizarea acestor tehnici de calcul numeric în calculatoarele electronice digitale, soluţionarea problemelor în mecanica structurilor continua să întîmpine dificultăţi de netrecut. Acestea apăreau în urma utilizării materialelor neomogene, cu comportare neliniară, cît şi din cauza neregularităţilor geometrice ale structurilor mecanice, complexităţii sarcinilor exterioare şi condiţiilor la limită.

Analiza prin elemente finite este un produs al erei calculatoarelor electronice digitale. Nu a existat înainte. S-a născut în această eră şi a progresat uimitor de repede, ca şi calculatoarele înseşi. A început ca o metodă numerică de analiză a tensiunilor în mecanica corpurilor deformabile şi, deşi continuă să fie utilizată cel mai mult în acest domeniu, aria utilizărilor ei s-a lărgit considerabil şi va continua, fără îndoială, să se extindă tot mai mult incluzînd, spre rezolvare, o mare varietate de probleme, altele decît cele din mecanica structurilor. Printre ramurile tehnicii în care analiza prin elemente finite a dobîndit deja o mare răspîndire sînt de exemplificat, în primul rînd, cele cu probleme la limită, ca fiind de cea mai mare dificultate, cum sînt: transmisia căldurii, dinamica percolărilor, hidrodinamica, hidraulica, mecanica rocilor şi a solurilor, tehnica nucleară.

Capitolul de faţă se limitează la analiza tensiunilor prin elemente finite în mecanica structurilor, revelînd conceptele de bază ale acestei analize. Ele sînt prezentate în cea mai simplă formă posibilă, cu convingerea că de îndată ce conceptele de bază ale analizei prin elemente finite

sînt înţelese în termeni simpli, interesul pentru rezolvarea problemelor inginereşti specifice va stimula eforturile în direcţia adîncirii cunoştinţelor fundamentale şi a soluţionării celor mai complicate probleme. După anul 1960 au apărut cărţi cît şi un imens număr de alte publicaţii care discută variatele aspecte ale analizei tensiunilor prin elemente finite în mecanica structurilor. Citarea tuturor acestora ar putea constitui o carte cu multe sute de pagini.

Esenţa analizei tensiunilor prin elemente finite o constituie înlocuirea corpului deformabil, respectiv a continuumului real printr-un sistem structural articulat ale cărui subregiuni sînt numite elemente finite şi care, de fapt, sînt părţi componente ale acelui corp. Se poate deci vorbi de o structură de elemente finite ce substituie structura reală. Astfel, grinda cu zăbrele poate fi privită ca un sistem structural alcătuit din elemente finite unidimensionale ce corespund barelor îmbinate prin articulaţii ce formează aşa-numitele puncte nodale sau, simplu, nodurile elementelor. Elementele pot fi definite şi în sisteme de coordonate bi şi tridimensionale, cum sînt : triunghiul, patrulaterul, tetraedrul, prisma dreaptă, hexaedrul torul triunghiular, torul patrulater ş.a. Alegerea unui anumit element finit, pentru rezolvarea unei probleme specifice, depinde în mare măsură de competenţa şi experienţa inginerului. În general, profilul elementului trebuie să descrie cît mai bine posibil geometria întregului a cărui parte componentă este.

Un element este deci o regiune bine definită a corpului, dar nu numai atît. Este necesar ca proprietăţile elementului să fie în mod adecvat formulate astfel încît acesta să aibă o funcţionalitate dependentă de restricţiile impuse prin comportamentul întregului din care face parte. Formularea corectă a acestor proprietăţi se face prin intermediul metodelor matriceale cunoscute din mecanica structurilor. Algebra matriceală şi calculatoarele electronice digitale sînt cele două verigi de bază prin intermediul cărora analiza tensiunilor prin elemente finite a cunoscut impetuoasa dezvoltare în cadrul căreia inginerii şi-au formulat simplu problemele, rezolvîndu-le repede şi cu precizia dorită.

Formularea proprietăţilor elementelor finite, ca parte a unui întreg, constituie punctul de plecare în rezolvarea problemei şi se bazează pe cunoaşterea precisă a caracteristicilor geometrice şi mecanice a fiecărui element în parte, cît şi pe evaluarea, tot prin calcul separat pentru fiecare element, a forţelor nodale (forţe şi cupluri). În componenţa forţelor nodale intră două tipuri de forţe şi anume : forţe concentrate preluate *de* către noduri şi transmise elementului, şi forţe transmise *în* noduri de către elementul însuşi. Acestea din urmă sînt cauzate de sarcinile distribuite de-a lungul elementului şi de solicitările datorite temperaturii, inexactităţilor de montaj şi altor cauze. Pe scurt, forţele nodale se exprimă fie direct prin componentele lor, fie indirect, prin intermediul deplasărilor nodale, (săgeţi şi rotiri).

Admiţînd o comportare elastică a elementului, relaţia de echilibru este de forma

$$\{r\}_e + \{r\}_p + \{r\}_T + \{r\}_{\sigma_0} = [k]\{\delta\}_e \tag{13.1}$$

în care $\{r\}_e$ reprezintă forțele aplicate în noduri, $\{r\}_p$ este matricea forțelor transmise de element în noduri și cauzate de sarcinile distribuite, $\{r\}_T$ reprezintă forțele în noduri cauzate de temperatură și inexactități de montaj, $\{r\}_{\sigma_0}$ este matricea componentelor forțelor nodale datorite tensiunilor remanente și altor cauze, $\{\delta\}_e$ formează vectorul deplasărilor nodale ale elementului, iar $[k]$ este matricea de rigiditate a elementului. Asamblarea tuturor elementelor finite are ca echivalent ecuația

$$\sum_{n=1}^{m} (\{r\}_{e,n} + \{r\}_{p,n} + \{r\}_{T,n} + \{r\}_{\sigma_0,n}) = \left(\sum_{n=1}^{m} [k]_n\right) \{\delta\}$$

încît, notînd membrul întîi cu $\{R\}$, se obține

$$\{R\} = [K]\,\{\delta\}. \tag{13.2}$$

Prin substituirile făcute, în mod tacit s-a presupus că matricele $[k]_n$, $\{r\}_{e,n}$, $\{r\}_{p,n}$, $\{r\}_{T,n}$ și $\{r\}_{\sigma_0,n}$ au fost extinse la dimensiunea structurii întregi, că în acest proces de extindere termenii au fost rearanjați în așa fel încît să corespundă cu termenii din matricea $\{\delta\}$ a deplasărilor nodale. Procedeul de asamblare, respectiv de „extindere'' de la dimensiunea elementului la dimensiunea structurii și apoi de „rearanjare'' a matricelor respective nu este tipic analizei prin elemente finite și nici inedit. Procedeul este de mult folosit în analiza circuitelor electrice interconectate, sau în analiza rețelelor complexe de conducte ce transportă fluide tehnologice.

Numărul deplasărilor nodale din $\{\delta\}$ corespunde cu numărul gradelor de libertate al întregului sistem structural; la rîndul său, acest număr este egal cu suma gradelor de libertate ale tuturor punctelor nodale ale sistemului. Dacă proprietățile elementelor sînt adecvat formulate în matricea $[K]$, deplasările nodale $\{\delta\}$ vor aproxima suficient de bine pe cele ale structurii originale. Determinînd valorile deplasărilor din relația

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\,\{R\}$$

în continuare se pot obține atît deformațiile cît și tensiunile, cu ajutorul relațiilor din elasticitate (v. cap. 1).

În expunerea anterior făcută, au fost revelate trei concepte de bază ale analizei tensiunilor prin elemente finite și anume: deplasările nodale, forțele nodale și matricea de rigiditate a elementului. Nu este însă acesta unicul mod de a pune și rezolva o problemă cînd aceasta se rezolvă prin elemente finite. În general, problema poate fi rezolvată printr-una din următoarele trei căi. Prima cale o formează metoda deplasărilor, despre care s-a vorbit în parte și în care deplasările nodale sînt necunoscutele problemei. A doua cale este alegerea tensiunilor ca necunoscute, în care caz se vorbește de metoda de echilibru. În cea de a treia opțiune, este vorba de o metodă mixtă în care se aleg ca necunoscute atît unele deplasări


Scanned with OKEN Scanner

nodale cît și unele tensiuni. În acest capitol va fi expusă doar metoda deplasărilor, fiind cea mai preferată în rezolvarea problemelor practice.

Cel mai mult, analiza prin elemente finite este folosită în cazul sarcinilor statice. De fapt, cu excepția oboselii materialelor prin solicitări variabile în timp, orice altă problemă din mecanica corpurilor deformabile este soluționabilă prin analiza cu elemente finite, dintre care se citează : învelișuri de orice fel, structuri cu concentratori de tensiuni, baraje, elemente solicitate la flambaj, piese solicitate dinamic (inclusiv analiza solicitărilor seismice), structuri cu comportare neliniară a materialului (în domeniul plastic și în condiții de fluaj).

Pentru a rezolva astfel de probleme, inginerul trebuie să le cunoască formularea teoretică din manualele clasice. El trebuie, de asemenea, să aibă cunoștințe generale de statică, dinamică și rezistența materialelor, de algebră matriceală, analiză numerică și calcul variațional. El trebuie să fie versat în elaborarea programelor de calculator în limbajul FORTRAN, în utilizarea subrutinelor și fișierelor pe disc, precum și să aibă abilitatea de a folosi eficient și optim capacitatea de memorizare disponibilă a mașinilor moderne de calcul.

În practică, un program de calculator bine construit are un rol esențial în analiza prin elemente finite a unei structuri, cînd spre exemplu se pregătește construirea prototipului acesteia sau se lucrează la optimizarea proiectării structurii respective. Pentru program, inginerul s-ar putea adresa unui bun analist din domeniul calculatoarelor, sau să lucreze în strînsă colaborare cu acesta. Este de reținut însă că o înțelegere confuză, din partea oricăruia dintre colaboratori, a sistemului fizic privind „tehnicitățile" asociate cu specialitatea celuilalt, nu poate „convinge" și nici „forța" vreo mașină de calcul să dea răspunsuri corecte, oricît de perfecționată ar fi această mașină.

Pe de altă parte, aspectul fizic, intuiția, îndemînarea pentru programare scutesc pe inginer de multe și obositoare ore de calcule matematice, furnizîndu-i-se în schimb timp suplimentar pentru activitatea tehnică de creație. Or, tocmai aceasta este principala însușire caracteristică a analizelor prin elemente finite care a făcut ca această cale de rezolvare a celor mai dificile probleme să se bucure de o răspîndire crescîndă în lumea inginerilor. Mînuirea ușoară a conceptelor de bază, acceptarea sensului fizic în formularea caracteristicilor și proprietăților unui element finit, procedeul elementar de suprapunere a unor astfel de formulări, simplitatea operațiilor din algebra matriceală și adaptabilitatea acestora pentru lucru la calculatoarele digitale, toate, separat sau la un loc, pot fi înțelese fără fundamentări matematice de mare dificultate, acceptarea lor fiind plauzibilă sub aspect fizic. Se reamintește că în rezistența materialelor, de asemenea, studentul, inginerul acceptă unele concepte de bază și felurite interpretări ce justifică dezvoltările ulterioare, fără a recurge totdeauna la demonstrații matematice exacte. Dacă le dorește, el le află oricînd prin studii ulterioare pe care le întreprinde pe cont propriu. Un procedeu analog va fi folosit în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

13.2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ MATRICEALĂ UTILE ANALIZEI PRIN ELEMENTE FINITE

Sînt necesare cîteva definiţii şi un număr limitat de cunoştinţe privind operaţiile matriceale care, în esenţă, pleacă de la relaţiile ce formulează sistemul general de ecuaţii liniare

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Sub formă matriceală, sistemul de ecuaţii precedent poate fi scris concentrat astfel

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

sau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

în care $[A]$ este matricea coeficienţilor, $\{x\}$ reprezintă matricea necunoscutelor, iar $\{b\}$ constituie matricea constantelor. Matricele de forma unei coloane de numere, ca matricele $\{x\}$ şi $\{b\}$ se numesc vectori coloană, sau matrice coloană. Există şi matrice în care elementele sînt aranjate orizontal, pe o singură linie

$$\{c\} = \{c_1 \; c_2 \ldots c_n\}$$

ele fiind numite vectori liniari sau matrice liniare. Aşadar, o matrice este un şir de numere, numite elemente, aranjate într-un tablou de formă dreptunghiulară avînd m linii şi n coloane, elementele putînd fi nule, diferite de zero sau sub formă polinomială. Cînd $m = n$, se obţine o matrice pătratică de ordinul n, ce este de un tip aparte, unic în felul său, putînd avea o reprezentare numerică numită determinant.

Tot ca definiţie se include aici şi aceea a matricei transpuse matricei $[A]$: se obţine schimbînd liniile în coloane şi coloanele în linii. Transpusa unei matrice $[A]$ este notată cu $[A]^T$; încît, dacă

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

În continuare se menţionează operaţiile matriceale ce sînt adesea întîlnite în practica analizelor cu elemente finite.

Adunarea (*scăderea*). Două matrice se pot aduna, sau scădea, dacă sînt compatibile, adică au dimensiuni de acelaşi ordin. Exemplu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

care, sub formă concentrată, se poate scrie

$$[A] + [B] = [C].$$

Scăderea se efectuează potrivit aceloraşi reguli.

Înmulţirea. Două matrice se pot înmulţi dacă sînt conforme, adică numărul coloanelor din prima matrice este egal cu numărul liniilor din a doua matrice, ceea ce este echivalent cu

$$[A]_{m \times n} \; [B]_{p \times r} = [C]_{m \times r}$$

cu $m = p$, iar $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n=p} a_{ik} b_{kj}$. Exemplu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 10 + 6 & 1 + 18 + 9 \\ 20 + 30 + 14 & 5 + 54 + 21 \\ 36 + 50 + 22 & 9 + 90 + 33 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 16 & 20 \\ 27 & 33 \end{bmatrix}.$$

A rezultat că o matrice se înmulţeşte, sau se împarte cu un număr k, înmulţind, respectiv împărţind toate elementele acesteia prin k.

Transpusa unui produs. Această operaţie se efectuează potrivit cu relaţia care se exemplifică prin următoarea aplicaţie numerică :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 10 + 6 & 20 + 30 + 14 & 36 + 50 + 22 \\ 1 + 18 + 9 & 5 + 54 + 21 & 9 + 90 + 33 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 5 & 16 & 27 \\ 7 & 20 & 33 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sumă de produse. În analiza prin elemente finite se întîlnește adesea expresia lucrului mecanic al forțelor exterioare sub forma sumei de produse dintre forțe și deplasări, după cum urmează

$$W = \sum_{i=1}^{n} F_i \; \delta_i$$

în care

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}.$$

Noțiunea de matrice transpusă este aici foarte utilă, putîndu-se scrie

$$W = \{F_1 \; F_2 \ldots F_n\} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} = \{\delta\}^T \{F\}.$$

Matrice asociată sau reciprocă. Matricea asociată sau reciprocă $[A^*]$ a matricei $[A]$ este matricea transpusă a matricei complementelor algebrice ale lui $[A]$. Ca aplicație numerică, fie matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

căreia i se caută reciproca.

În primul rînd se precizează că $[A]$ trebuie să fie o matrice pătratică. Procedînd conform definiției, în prima etapă se obține

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 3 & -11 & 12 \\ 7 & -13 & 9 \\ -1 & 10 & -4 \end{bmatrix}^T$$

în care elementele matricei, respectiv complementele algebrice ale lui $[A]$. sînt minorii determinantului $|A|$ înmulțiți cu $(-1)^{i+j}$. În final, rezultă

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin evaluarea produsului matriceal

$$[A][A^*]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7 & -1\\ -11 & -13 & 10\\ 12 & 9 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 0 & 0\\ 0 & 19 & 0\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}$$

se obţine o matrice diagonală în care toate elementele de pe diagonala principală sînt egale cu valoarea determinantului

$$|A| = -(-2)(-1)(3) - (4)(2) + (-1)(3) + (3)(4)(3) = 19.$$

Aceasta este o proprietate generală a produsului unei matrice cu matricea asociată acesteia.

Inversa unei matrice. Se spune că $[A]^{-1}$ este matricea inversă a matricei pătratice de ordinul n, dacă

$$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$$

unde

$$[I]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

este matricea unitate de ordinul n, definită ca o matrice diagonală avînd toate elementele de pe diagonala principală egale cu unitatea.

Matricea inversă se obţine folosind relaţia

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|}$$

dar există şi alte metode pentru calculul acesteia, ca metoda Gauss-Jordan, metoda Choleski ş.a.

Dacă se consideră din nou matricea

$$[A]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 9 & 3 & 2\end{bmatrix},$$

atunci inversa acesteia este

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix}3 & 7 & -1\\ -11 & -13 & 10\\ 12 & 9 & -4\end{bmatrix}.$$

Pentru verificare, se obține

$$[A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13.3. BAZELE TEORETICE ALE ANALIZEI TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

În faza de inițiere, pentru a avea o înțelegere completă și solidă a analizei prin elemente finite, cea mai potrivită cale pare a fi startul de la o aplicație numerică simplă, căreia urmează să i se efectueze calculele cu mîna sau rigla de calcul și totodată să se asocieze acestui procedeu o formulare teoretică adecvată. În problema ce urmează, structura analizată este divizată în triunghiuri care formează elementele finite ale acesteia. În fig. 13.1 este arătată o structură plană, divizată în triunghiuri, fiecare nod avînd două grade de libertate (deplasări nodale), astfel încît fiecare element finit triunghiular are șase grade de libertate.

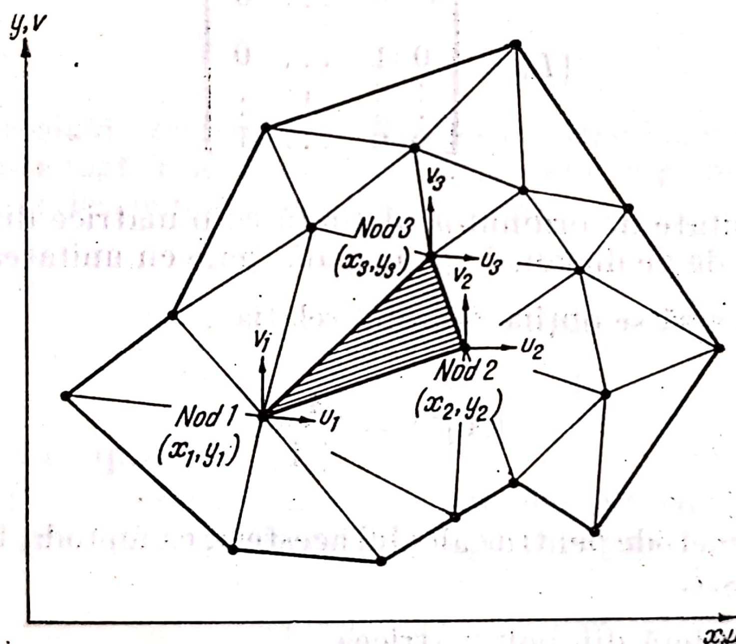


Fig. 13.1.

Matricea deplasărilor $\{\delta\}$ este alcătuită din necunoscutele problemei

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

în care cu litera u sînt notate deplasările în direcția x, iar cu v sînt exprimate deplasările în direcția y. În funcție de aceste deplasări nodale trebuie exprimat cîmpul $\{f\}$ al deplasărilor oricărui punct aparținînd elementului finit. Pentru aceasta, dintre alternativele posibile, următoarea formulare liniară este dintre cele mai convenabile

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a_1+a_2x+a_3y \\ a_4+a_5x+a_6y \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}=[N]\,\{\delta\} \quad (13.3)$$

în care a-urile sînt valori constante, iar $[N]$ reprezintă o matrice ce definește natura cîmpului deplasărilor. Atît a-urile cît și matricea $[N]$ urmează să fie explicit exprimate. Valorile constantelor $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sînt calculate folosind coordonatele și deplasările nodale, respectiv prin rezolvarea următorului sistem de ecuații cu șase necunoscute

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2\,x_1 + a_3\,y_1 \\ u_2 &= a_1 + a_2\,x_2 + a_3\,y_2 \\ u_3 &= a_1 + a_2\,x_3 + a_3\,y_3 \\ v_1 &= a_4 + a_5\,x_1 + a_6\,y_1 \\ v_2 &= a_4 + a_5\,x_2 + a_6\,y_2 \\ v_3 &= a_4 + a_5\,x_3 + a_6\,y_3 \end{aligned}$$

ce este obținut prin aplicarea relațiilor (13.3). Sub formă matriceală, expresiile deplasărilor nodale devin

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

încît, notînd cu $[A]$ matricea

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

expresiile deplasărilor nodale sînt

$$\{u_e\} = [A]\{a_u\}$$

$$\{v_e\} = [A]\{a_v\}.$$

Prin inversare se obține

$$\{a_u\} = [A]^{-1}\{u_e\} \tag{13.4}$$

$$\{a_v\} = [A]^{-1}\{v_e\}$$

în care

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

unde $|A|$, respectiv valoarea determinantului matricei $[A]$, este de două ori valoarea ariei suprafeței triunghiului. Dacă nodurile 1, 2, 3 sînt numerotate în sensul acelor de ceasornic, valoarea determinantului $|A|$ devine negativă.

Introducerea expresiilor (13.4) în (13.3) și rearanjarea termenilor produce fie a-urile, fie matricea $[N]$, după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|A|}[D]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \tag{13.6}$$

respectiv

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\frac{1}{|A|}[D] \tag{13.7}$$

în care

$$[D] = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Funcțiile $[N]$, pentru diferitele tipuri de elemente și formulări ale proprietăților acestora, au rol cheie în analiza tensiunilor prin elemente finite. Acestea se numesc funcții de modelare, definind fie modelul ales

Scanned with OKEN Scanner

pentru cîmpul deplasărilor, fie geometria elementului adoptat, fie atît cîmpul deplasărilor cît şi geometria elementului în cazul opţiunii pentru aşa-numitele elemente finite izoparametrice.

În cazul problemei bidimensionale, deformaţiile specifice sînt date de relaţiile cunoscute din elasticitate

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

care, ţinînd seama de expresiile (13.3), produc

$$\varepsilon_x = a_2, \quad \varepsilon_y = a_6, \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5.$$

Se poate observa că deformaţiile specifice sînt independente de valorile constantelor a_1 şi a_3, cît şi de coordonatele locului în care se calculează ceea ce justifică denumirea dată uneori acestui tip de element finit, aceea de „element cu deformaţii constante".

Ţinînd seama de expresiile (13.3), ultimele relaţii pot fi scrise astfel

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\} \qquad (13.8)$$

în care

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{|A|} [D]$$

sau

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix} \qquad (13.9)$$

unde cu A s-a notat aria triunghiului.

Matricea $[B]$, denumită matrice de deformaţii-deplasări, are rol cheie în evaluarea matricei de rigiditate a elementului.

În prealabil, se observă că tensiunile se pot exprima deasemenea în funcţie de $[B]$ astfel

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\} = [E]\,[B]\,\{\delta\} \tag{13.10}$$

unde $[E]$ reprezintă matricea de elasticitate

$$[E] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{13.11}$$

în care E este modulul de elasticitate al materialului, iar μ este coeficientul lui Poisson.

Valorile deplasărilor nodale $\{\delta\}$, care intră în expresiile deformaţiilor specifice (13.8) şi respectiv în ale tensiunilor (13.10), se calculează cu relaţia (13.2), respectiv din relaţia

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{R\}.$$

Întrucît matricea de rigiditate structurală $[K]$ reprezintă o suprapunere a matricelor de rigiditate $[k]$ a elementelor, cele ce urmează se referă la matricea $[k]$ şi respectiv la forţele din nodurile elementului $\{r\}_e$. Expresia primei matrice se obţine pornind de la principiul conservării energiei, considerînd că elementului i se asociază deplasări nodale virtuale $d\{\delta\}_e$. În acest caz, lucrul mecanic al forţelor nodale corespunzătoare deplasărilor virtuale este dat de

$$(d\{\delta_e\})^T\,\{r\}_e$$

iar lucrul mecanic dat de reacţiunile interioare, reprezentate prin tensiuni pe unitatea de volum, este

$$(d\,\{\varepsilon\})^T\,\{\sigma\} \tag{13.12}$$

în care s-a considerat că elementului i se aplică doar sarcini concentrate în noduri şi că nu există sarcini distribuite, deformaţii iniţiale sau tensiuni remanente. Ţinînd seama de (13.8) şi (13.10), expresia (13.12) se transformă în

$$([B]\,d\{\delta\}_e)^T\;[E]\;[B]\,\{\delta\}_e.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru volumul întreg al elementului, lucrul mecanic al reacțiunilor interioare devine

$$\int_V (d\{\delta\}_e)^T \, [B]^T \, [E] \, [B] \, \{\delta\}_e \, dV. \qquad (13.13)$$

Egalînd lucrul mecanic al forțelor nodale cu lucrul mecanic al reacțiunilor interioare dat de (13.13), se obține

$$(d\{\delta\}_e)^T \{r\}_e = (d\{\delta\}_e)^T \left(\int_V [B]^T \, [E] \, [B] \, dV \right) \{\delta\}_e \qquad (13.14)$$

sau

$$\{r\}_e = [k] \, \{\delta\}_e$$

în care

$$[k] = \int_V [B]^T \, [E] \, [B] \, dV. \qquad (13.15)$$

În (13.15) se poate lua $dV = h \, dx dy$, dacă grosimea elementului h este constantă. Dacă h variază de-a lungul elementului, se poate obține o expresie de interpolare a grosimii variabile în funcție de grosimile h_1, h_2, h_3 ale elementului în noduri, folosind o expresie analogă aceleia din (13.3), adică

$$h = [N] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix}$$

în care $[N]$ are forma simplificată

$$[N] = [1 \; x \; y] \frac{1}{|A|} [A^*].$$

Pentru generalizarea relației (13.14), se consideră că pe element acționează sarcini distribuite p, ale căror valori în noduri sînt date de

$$\{p\} = \{p_1 \; p_2 \; p_3\}$$

și că elementul este supus unor deformații inițiale

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha T \;\; \alpha T \;\; 0\}$$

în care α este coeficientul de dilatare termică liniară. Incluzînd și eventuale tensiuni remanente inițiale $\{\sigma_0\}$, expresia generală a tensiunilor din relația (13.12) are forma

$$\{\sigma\} = [E] \, (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

încît expresia (13.13) devine

$$(d\{\delta_e\})^T\left(\left(\int_V [B]^T [E][B]\,dV\right)\{\delta\}_e-\int_V [B]^T [E]\{\varepsilon_0\}\,dV+\right.$$

$$\left.+\int_V [B]^T\{\sigma_0\}\,dV-\int_V [N]^T\{p\}\,dV\right).$$

Introducînd rezultatul precedent, în locul membrului doi din (13.14), se obține

$$\{r\}_e+\int_V [N]^T\{p\}\,dV+\int_V [B]^T [E]\{\varepsilon_0\}\,dV-\int_V [B]^T\{\sigma_0\}\,dV=[k]\{\delta\}_e$$

în care, potrivit cu relația (13.1), se poate recunoaște ușor că

$$\{r\}_p=\int_V [N]^T\{p\}\,dV$$

$$\{r\}_T=\int_V [B]^T [E]\{\varepsilon_0\}\,dV$$

$$\{r\}_{\sigma_0}=-\int_V [B]^T\{\sigma_0\}\,dV.$$

13.4. ETAPE ALE CALCULULUI TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

Aplicația numerică ce se tratează în continuare ilustrează modul de folosire, în practică, a formulărilor teoretice din paragraful precedent.

În linii mari, analiza prin elemente finite comportă următoarele etape:

1°. Divizarea (discretizarea) în elemente finite a structurii reale.

2°. Definirea proprietăților mecanice și a condițiilor la limită pentru elementele finite.

3°. Generarea matricelor de rigiditate a elementelor.

4°. Asamblarea matricelor de rigiditate a elementelor.

5°. Rezolvarea ecuațiilor structurale.

6°. Calculul tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

Fie o placă metalică avînd modul de rezemare, sarcina F şi dimensiunile arătate în fig. 13.2. Modulul de elasticitate al materialului este $E = 1{,}82 \cdot 10^6$ daN/cm², iar coeficientul lui Poisson este $\mu = 0{,}3$. Să se calculeze tensiunile σ_x, σ_y, τ_{xy}.

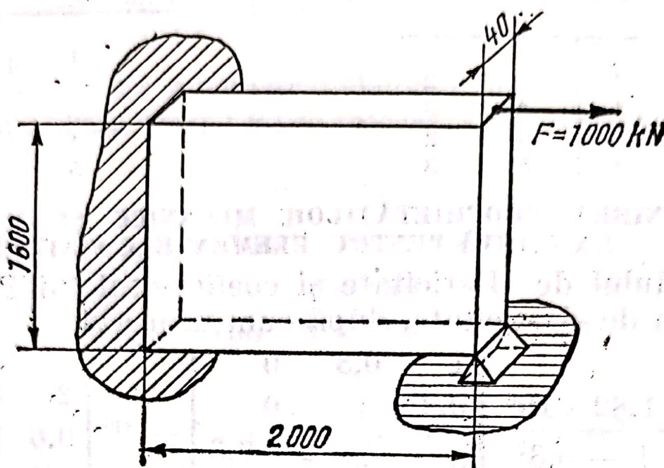


Fig. 13.2.

13.4.1. DIVIZAREA ÎN ELEMENTE FINITE A STRUCTURII REALE

În fig. 13.3 sînt arătate: divizarea în elemente finite triunghiulare a structurii reale, etichetarea elementelor şi a nodurilor respective, determinarea coordonatelor nodurilor.

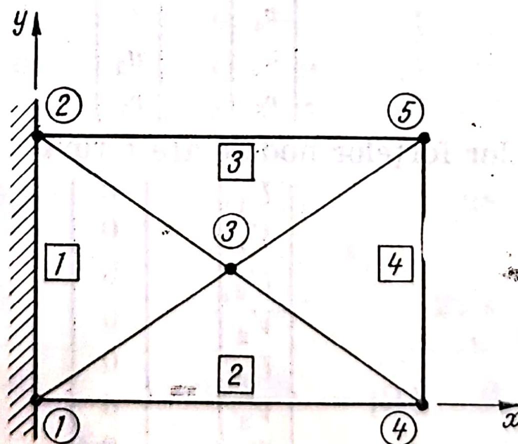


Fig. 13.3.

În tabelul 13.1 este indicată ordinea de succesiune a nodurilor în fiecare element finit, în sens antiorar, fiind însă indiferent nodul de la care începe ordonarea acestora.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13.1

Ordinea de succesiune a nodurilor elementelor

Nr. element. \ Nodurile	Nod 1	Nod 2	Nod 3
Elementul 1	1	3	2
Elementul 2	1	4	3
Elementul 3	3	5	2
Elementul 4	4	5	3

Tabelul 13.2

Coordonatele nodurilor

Nr. nodurilor \ Coordnate	x [cm]	y [cm]
1	0	0
2	0	160
3	100	80
4	200	0
5	200	160

13.4.2. DEFINIREA PROPRIETĂȚILOR MECANICE ȘI A CONDIȚIILOR LA LIMITĂ PENTRU ELEMENTELE FINITE

Avînd modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson, se poate alcătui matricea de elasticitate, după cum urmează

$$[E] = \frac{1{,}82\times10^6}{1-0{,}3^2}\begin{bmatrix}1 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-0{,}3}{2}\end{bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}.$$

Matricea deplasărilor nodale este

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ u_3\\ v_3\\ 0\\ 0\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix}.$$

Matricea componentelor forțelor nodale are forma

$$\{R\} = \begin{Bmatrix}U_1\\ V_1\\ U_2\\ V_2\\ U_3\\ V_3\\ U_4\\ V_4\\ U_5\\ V_5\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 10^5\\ 0\end{Bmatrix}$$

neexistînd sarcini distribuite, efecte termice, inexactități de montaj, tensiuni remanente.

13.4.3. GENERAREA MATRICELOR DE RIGIDITATE A ELEMENTELOR

Matricea $[k]$ de rigiditate este dată de expresia

$$[k]=\int_V [B]^T\,[E]\,[B]\,\mathrm{d}V=[B]^T\,[E]\,[B]\,hA$$

în care h este grosimea, iar A este aria elementului.

Pentru formarea matricei $[B]$ se folosește relația (13.9).

Elementul 1

$$[B]=\frac{1}{2\,\dfrac{1}{2}\,160\times 100}\begin{bmatrix} 80-160 & 0 & 160-0 & 0 & 0-80 & 0\\ 0 & 0-100 & 0 & 0 & 0 & 100-0\\ 0-100 & 80-160 & 0 & 160-0 & 100-0 & 0-80\end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B]=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5\\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4\end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$[k]_1=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -5\\ 0 & -5 & -4\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8\\ -4 & 0 & 5\\ 0 & 5 & -4\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix} 2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5\\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4\end{bmatrix}4\,\frac{1}{2}\,160\times 100$$

sau

$$[k_1]=\frac{1}{2}10^5\cdot\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 49{,}5 & 26 & -64 & -28 & 14{,}5 & -26\\ \multicolumn{2}{c|}{k_{11}} & \multicolumn{2}{c|}{k_{13}} & \multicolumn{2}{c}{k_{12}}\\ 26 & 16{,}2 & -24 & -22{,}4 & -2 & -16{,}2\\ \hline -64 & -24 & 128 & 0 & -64 & 24\\ \multicolumn{2}{c|}{k_{31}} & \multicolumn{2}{c|}{k_{33}} & \multicolumn{2}{c}{k_{32}}\\ -28 & -22{,}4 & 0 & 44{,}8 & 28 & 22{,}4\\ \hline 14{,}5 & -2 & -64 & 28 & 49{,}5 & 2\\ \multicolumn{2}{c|}{k_{21}} & \multicolumn{2}{c|}{k_{23}} & \multicolumn{2}{c}{k_{22}}\\ 2 & 6{,}2 & 24 & -22{,}4 & -26 & -6{,}2\end{array}\right].$$

Elementul 2

$$[B]=\frac{1}{2\,\frac{1}{2}\,200\times 80}\begin{bmatrix} 0-80 & 0 & 80-0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 100-200 & 0 & 0-100 & 0 & 200-0\\ 100-200 & 0-80 & 0-100 & 80-0 & 200-0 & 0\end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B]=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 10\\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0\end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$[k]_2=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -5\\ 0 & -5 & -4\\ 4 & 0 & -5\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix} 2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{800}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 0\\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0\end{bmatrix}4\,\frac{1}{4}\,200\times 80$$

sau

$$[k]_2=\frac{1}{2}10^5\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 49{,}5 & 15{,}2 & -14{,}5 & -2 & -35 & -24\\ & k_{11} & & k_{14} & & k_{13}\\ 26 & 61{,}2 & 2 & 38{,}8 & -28 & -100\\ \hdashline -14{,}5 & 12{,}8 & 49{,}5 & -26 & -35 & 24\\ & k_{41} & & k_{44} & & k_{43}\\ -2 & 38{,}8 & -26 & 61{,}2 & 28 & -100\\ \hdashline -35 & -28 & -35 & 28 & 70 & 0\\ & k_{31} & & k_{34} & & k_{33}\\ -24 & -100 & 24 & -100 & 0 & 200\end{array}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementul 3

$$[B] =$$

$$= \frac{1}{2\frac{1}{2}200\times 80}\begin{bmatrix} 160-160 & 0 & 160-80 & 0 & 80-160 & 0 \\ 0 & 0-200 & 0 & 100-0 & 0 & 200-100 \\ 0-200 & 160-160 & 100-0 & 160-80 & 200-100 & 80-160 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B] = \frac{1}{800}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$[k]_3 = \frac{1}{800}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{800}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} 4\,\frac{1}{2}200\times 80$$

sau

$$[k]_3 = \frac{1}{2}10^5 \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 70 & 0 & -35 & 28 & 35 & -28 \\ 0 & 200 & -24 & -50 & 24 & -100 \\ \hdashline -35 & -24 & 49,5 & 26 & -14,5 & -2 \\ -28 & -100 & 26 & 36,2 & 2 & 38,8 \\ \hdashline -35 & 24 & 14,5 & 2 & 49,5 & -26 \\ 28 & -100 & -2 & 13,8 & -26 & 61,2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}10^5\begin{bmatrix} k_{33} & k_{35} & k_{32} \\ k_{53} & k_{55} & k_{52} \\ k_{23} & k_{25} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementul 4

$$[B]=$$

$$=\frac{1}{2\frac{1}{2}\,160\times 100}\begin{bmatrix} 160-80 & 0 & 80-0 & 0 & 0-160 & 0 \\ 0 & 100-200 & 0 & 200-100 & 0 & 200-200 \\ 100-200 & 160-80 & 200-100 & 80-0 & 200-200 & 0-160 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B]=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$[k]_4=\frac{1}{800}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{800}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} 4\,\frac{1}{2}\,160\times 100$$

sau

$$[k]_4=\frac{1}{2}10^5\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 49{,}5 & -26 & 14{,}5 & -2 & -64 & 28 \\ \multicolumn{2}{c:}{k_{44}} & \multicolumn{2}{c:}{k_{45}} & \multicolumn{2}{c}{k_{43}} \\ -26 & 61{,}2 & 2 & -38{,}8 & 24 & -22{,}4 \\ \hdashline 14{,}5 & 2 & 49{,}5 & 26 & -64 & -28 \\ \multicolumn{2}{c:}{k_{54}} & \multicolumn{2}{c:}{k_{55}} & \multicolumn{2}{c}{k_{53}} \\ -2 & -38{,}8 & 26 & 61{,}2 & -24 & -22{,}4 \\ \hdashline -64 & 24 & -64 & -24 & 128 & 0 \\ \multicolumn{2}{c:}{k_{34}} & \multicolumn{2}{c:}{k_{35}} & \multicolumn{2}{c}{k_{33}} \\ 28 & -22{,}4 & -28 & -22{,}4 & 0 & 44{,}8 \end{array}\right].$$

13.4.4. ASAMBLAREA MATRICELOR DE RIGIDITATE A ELEMENTELOR

Matricea totală de rigiditate structurală are dimensiunile 10×10, cifra 10 reprezentînd numărul gradelor de libertate al structurii întregi, în timp ce matricele elementelor au dimensiunile 6×6, cifra 6 fiind numărul gradelor de libertate corespunzătoare unui element. Pentru asamblare, trebuie ca matricea fiecărui element să fie mai întîi extinsă la dimensiunea 10×10 și totodată rearanjată pentru a corespunde matricei deplasărilor din ecuația matriceală generală. Pentru exemplificare, considerînd elementul 3, ecuațiile de echilibru ale acestuia sînt

$$\left[\begin{array}{c:c:c} k_{33} & k_{35} & k_{32} \\ \hdashline k_{53} & k_{55} & k_{52} \\ \hdashline k_{23} & k_{25} & k_{22} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

în care elementele k_{ij} sînt matrice cu dimensiunile 2×2. În vederea asamblării, ultima relație matriceală se poate extinde și rearanja astfel

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} \\ \hdashline 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix}$$

De fapt, extinderea matricelor elementelor și rearanjarea acestora sînt operații virtuale. Propriu-zis, aceste operații nu se efectuează, elementele matriceale fiind plasate la „locurile'' lor în matricea generală $[K]$, de îndată ce aceste elemente sînt constituite. Structura matricei $[K]$ poate fi examinată în ecuația ce urmează

$$
\begin{bmatrix}
(k_{11})_1 + (k_{11})_2 & (k_{12})_1 & (k_{13})_1 + (k_{13})_2 & (k_{14})_2 & 0 \\
(k_{21})_1 & (k_{22})_1 + (k_{22})_3 & (k_{23})_1 + (k_{23})_3 & 0 & (k_{25})_3 \\
(k_{31})_1 + (k_{31})_2 & (k_{32})_1 + (k_{32})_3 & \begin{matrix}(k_{33})_1 + (k_{33})_2 + \\ +(k_{33})_3 + (k_{33})_4\end{matrix} & (k_{34})_2 + (k_{34})_4 & (k_{35})_3 + (k_{35})_4 \\
(k_{41})_2 & 0 & (k_{43})_2 + (k_{43})_4 & (k_{44})_2 + (k_{44})_4 & (k_{45})_4 \\
0 & (k_{52})_3 & (k_{53})_3 + (k_{53})_4 & (k_{54})_4 & (k_{55})_3 + (k_{55})_4
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix}
$$

în care, spre exemplu, $(k_{23})_1$ reprezintă matricea k_{23} cu dimensiunile 2×2 din elementul 1. Numeric, matricea $[K]$ are structura următoare

$$
[K] =
$$

$$
= \frac{1}{2} 10^5
\left[\begin{array}{rr:rr:rr:rr:rr}
99 & 41,2 & 14,5 & -26 & -99 & -52 & -14,5 & -2 & 0 & 0 \\
52 & 77,4 & -2 & -16,2 & -52 & -122,4 & 2 & 38,8 & 0 & 0 \\
\hdashline
14,5 & -2 & 99 & -24 & -99 & 52 & 0 & 0 & 14,5 & 2 \\
2 & 6,2 & -52 & 55 & 52 & -122,4 & 0 & 0 & -2 & 13,8 \\
\hdashline
-99 & -52 & -29 & -4 & 396 & 0 & -99 & 52 & -99 & 4 \\
-52 & -122,4 & 52 & -77,6 & 0 & 489,6 & 52 & -122,4 & -52 & -72,4 \\
\hdashline
-14,5 & 12,8 & 0 & 0 & -99 & 52 & 99 & -52 & 14,5 & -2 \\
-2 & 38,8 & 0 & 0 & 52 & -122,4 & -52 & 122,4 & 2 & -38,8 \\
\hdashline
0 & 0 & -14,5 & -2 & -99 & -52 & 14,5 & 2 & 99 & 52 \\
0 & 0 & 2 & 38,8 & -52 & -122,4 & -2 & -38,8 & 52 & 97,4
\end{array}\right]
$$

13.4.5. REZOLVAREA ECUAŢIILOR STRUCTURALE

Date fiind condiţiile la limită, rezultă că din sistemul celor zece ecuaţii structurale rămîn doar patru ecuaţii corespunzătoare celor patru deplasări diferite de zero

$$\frac{1}{2}\,10^5\begin{bmatrix}396 & 0 & -99 & 4\\ 0 & 489{,}6 & -52 & -72{,}4\\ -99 & -52 & 99 & 52\\ -52 & -122{,}4 & 52 & 97{,}4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 10^5\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Se poate astfel remarca faptul că 84 % din elementele matricei $[K]$ au rămas nefolosite. Acest procent, uneori fiind chiar 95 %, reprezentînd un efort de calcul în aparenţă irosit, constituie un aspect caracteristic al analizelor de tensiuni prin elemente finite, în general.

Din ultima ecuaţie matriceală rezultă

$$\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix}=\frac{2}{10^5}\begin{bmatrix}396 & 0 & -99 & 4\\ 0 & 489{,}6 & -52 & -72{,}4\\ -99 & -52 & 99 & 52\\ -52 & -122{,}4 & 52 & 97{,}4\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 10^5\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Efectuînd calculele pentru inversarea matricei $[K]$, se obţine

$$\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix}=0{,}158\times10^{-7}\begin{bmatrix}3{,}876 & -0{,}166 & 3{,}920 & -2{,}331\\ 0{,}361 & 2{,}061 & 0{,}936 & 1{,}037\\ 2{,}716 & -4{,}562 & 15{,}477 & -8{,}825\\ 0{,}489 & 2{,}796 & -5{,}041 & 13{,}325\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 10^5\\ 0\end{Bmatrix}$$

sau

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\end{Bmatrix}=0{,}00158\begin{Bmatrix}3{,}920\\ 0{,}936\\ 15{,}477\\ -5{,}041\end{Bmatrix},$$

în care deplasările nodale sînt rezultate în centimetri.

13.4.6. CALCLULUL TENSIUNILOR

Pentru calculul tensiunilor, folosind relația (13.10), se obține

Elementul 1

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}2 & 0,6 & 0\\ 0,6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0,7\end{bmatrix}\frac{1}{800}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5\\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_3\\ v_3\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}$$

în care

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_3\\ v_3\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}=0,00158\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 3,920\\ 0,936\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Rezultă

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{10^6}{800}\,0,00158\begin{bmatrix}2 & 0,6 & 0\\ 0,6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0,7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}31,360\\ 0\\ 7,488\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}124\\ 37\\ 10\end{Bmatrix}$$

rezultatele fiind date în daN/cm².

Elementul 2

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}2 & 0,6 & 0\\ 0,6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0,7\end{bmatrix}\frac{1}{800}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 10\\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_4\\ v_4\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}.$$

în care

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_4\\ v_4\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}=0,00158\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 3,920\\ 0,936\end{Bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{10^6}{800}\,0{,}00158\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 9{,}36\\ 39{,}20\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}11\\ 37\\ 54\end{Bmatrix}.$$

Elementul 3

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\frac{1}{800}\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5\\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}$$

în care

$$\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\\ u_5\\ v_5\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}=0{,}00158\begin{Bmatrix}3{,}920\\ 0{,}936\\ 15{,}477\\ -5{,}041\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Se obține

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{10^6}{800}\,0{,}00158\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}61{,}90\\ -34{,}56\\ 18{,}02\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}203\\ -63\\ 25\end{Bmatrix}.$$

Elementul 4

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=10^6\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\frac{1}{800}\begin{bmatrix}4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0\\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_4\\ v_4\\ u_5\\ v_5\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}$$

unde

$$\begin{Bmatrix}u_4\\ v_4\\ u_5\\ v_5\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}=0{,}00158\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 15{,}477\\ -5{,}041\\ 3{,}920\\ 0{,}936\end{Bmatrix}$$

Se obține

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{10^6}{800}\,0{,}00158\begin{bmatrix}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}30{,}55\\ -25{,}20\\ 49{,}73\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}91\\ -63\\ 64\end{Bmatrix}.$$

Pentru a obţine o precizie superioară a rezultatelor, elementele finite trebuie să fie mai numeroase şi cu dimensiuni mai mici, în care caz este nevoie de o maşină electronică de calcul, chiar şi pentru structura ce a fost examinată aici. Totodată, există elemente finite mai bune decît cele de tip triunghiular, a căror folosire duce la rezultate ce sînt, uneori, mult mai precise. Acestea sînt examinate în § 13.5. Deocamdată scopul propus a fost atins, utilizarea triunghiului fiind avantajoasă cînd calculele se efectuează cu mîna, ca şi în parcurgerea mai comodă a etapelor de soluţionare a unei analize prin elemente finite, respectiv în faza de pregătire a înţelegerii problemelor mai complexe. Şi astăzi acest element este adesea folosit, datorită tocmai simplităţii cît şi largii utilizări a acestuia în perioada de început. Elaborarea programelor intrate în biblioteca multor maşini de calcul electronic poartă amprenta acestei orientări timpurii.

13.5. ELEMENTE FINITE IZOPARAMETRICE

Este vorba de familia de elemente finite pentru care se folosesc aceleaşi funcţii de modelare (interpolare) atît pentru definirea cîmpului deplasărilor cît şi a formei elementului, ambele fiind importante în alcătuirea matricelor de rigiditate, aşa cum s-a putut remarca în aplicaţia numerică precedentă.

13.5.1. SISTEMUL „NATURAL" SAU „INTRINSEC" DE COORDONATE

În fig. 13.4 se poate sesiza diferenţa între un sistem global de coordonate xy, unul local $\bar{x}\bar{y}$ şi un sistem natural sau intrinsec de coordonate $\xi\eta$. În ultimul, care este de asemenea un sistem local, coordonatele punctelor sînt date prin numere adimensionale care însă nu depăşesc valoarea ± 1.

Dacă elementul este tridimensional, laturile hexaedrului sînt definite de $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ şi $\varsigma = \pm 1$. Sistemul $\xi\ \eta\ \zeta$ este definit de geometria elementului şi nicidecum de orientarea sistemului global de coordonate. De aceea, nu este necesar ca axele $\xi\eta\zeta$ să fie ortogonale. Laturile elementului sînt linii drepte, putînd avea şi forme arbitrare, ca în cazul unui patrulater distorsionat dintr-un dreptunghi.

Pentru exemplificare, fie dreptunghiul clasic ca bază a elementelor de tip patrulater, arătat în fig. 13.5. Laturile acestui element finit sînt definite de $\xi = \pm 1$ şi $\eta = \pm 1$, iar orice alt punct al elementului are coordonatele

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \text{ cu } d\xi = \frac{1}{a}dx$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b}, \text{ cu } d\eta = \frac{1}{b}dy.$$

Scanned with OKEN Scanner

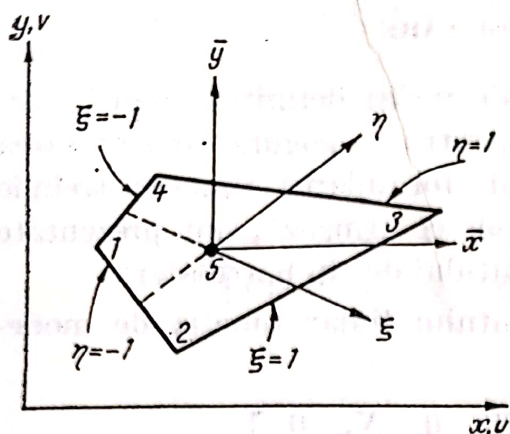


Fig. 13.4.

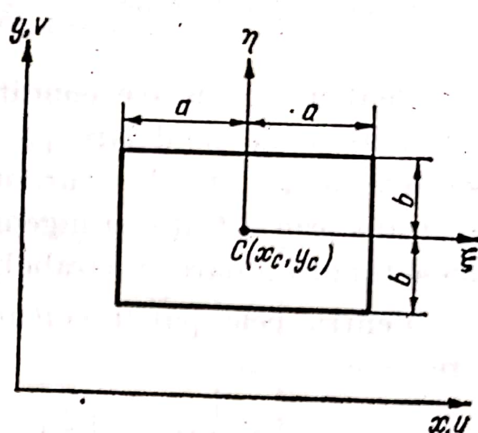


Fig. 13.5.

13.5.2. MODELE DE INTERPOLARE PENTRU DEPLASĂRI

Natura cîmpului deplasărilor este reprezentată prin forma funcţiei de modelare $[N]$ şi este de observat că există cel puţin două dezavantaje în modul în care această funcţie, dată de relaţia (13.7), defineşte cîmpul deplasărilor în formularea din relaţia (13.3). În primul rînd se pierde semnificaţia fizică. În al doilea rînd, evaluarea funcţiei $[N]$ pentru fiecare element în parte înseamnă inversarea tot de atîtea ori a matricei $[A]$, ceea ce presupune un efort mare de calcul necesar numai pentru o astfel de operaţiune, dat fiind că structurile reale de analizat pot avea multe sute sau chiar mii de elemente. Formularea izoparametrică a funcţiilor de interpolare înlătură astfel de inconveniente. Potrivit acestei formulări, $[N]$ este o funcţie de interpolare, uneori numită şi funcţie de formă sau funcţie de modelare, care are valoarea unu într-unul din noduri şi valoarea zero în toate celelalte noduri. Din însăşi definiţia funcţiei rezultă că în noduri deplasările trebuie să fie egale cu unu, ceea ce poate ajuta înţelegerea

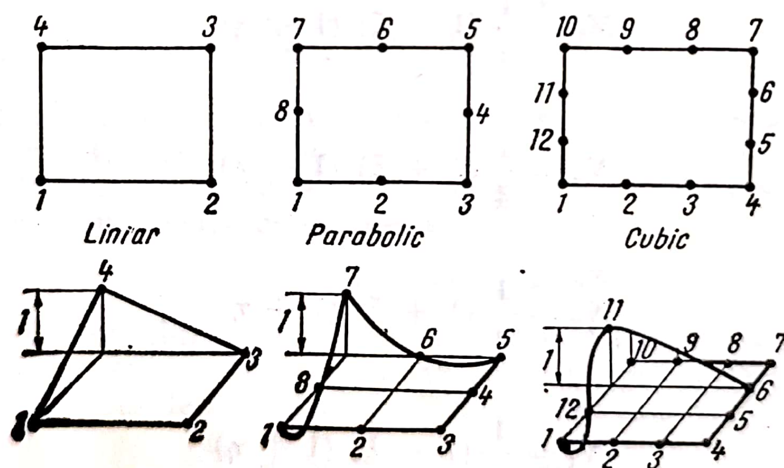


Fig. 13.6.

sensului fizic al idealizării cîmpului de deplasări. Cele mai uzuale funcţii de modelare sînt cele liniare şi parabolice; de asemenea, există funcţii de modelare cubice şi cuartice. Cîteva exemple ale modelelor de interpolare sînt arătate în fig. 13.6.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a satisface condițiile impuse de însăși definiția funcției izoparametrice de modelare $[N]$, respectiv pentru a asigura continuitatea acesteia de-a lungul laturilor elementului, formularea funcției trebuie realizată prin intuiție și ingeniozitate. În cele ce urmează, sînt prezentate unele funcții liniare și parabolice ale elementului de tip patrulater.

Pentru cele patru colțuri ale elementului liniar funcția de modelare este

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

unde

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\,\xi_i)\,(1 + \eta\eta_i)$$

în care pentru $i = 1, 2, 3, 4$ valorile consecutive ale coordonatelor nodurilor sînt

$$\xi_i = -1,\quad 1,\ 1,\ -1,$$

$$\eta_i = -1,\ -1,\ 1,\quad 1.$$

Rezultă

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)\,(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)\,(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)\,(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)\,(1 + \eta)$$

în care ξ și η sînt coordonatele oricărui punct de-a lungul elementului. Pentru exemplificare, dacă $i = 1$, ceea ce corespunde nodului 1 în fig. 13.4, se obține $N_1 = 1$ și $N_2 = N_3 = N_4 = 0$.

Cu ajutorul funcţiilor de modelare se pot scrie relaţii atît pentru deplasări

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (13.16)$$

cît şi pentru coordonatele unui punct oarecare

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (13.17)$$

sau sub forma

$$u = \sum_1^4 N_i u_i, \quad v = \sum_1^4 N_i v_i$$

$$x = \sum_1^4 N_i x_i, \quad y = \sum_1^4 N_i y_i.$$

Elementul liniar de tip patrulater astfel definit este cunoscut sub denumirea de Q4, spre a-l deosebi de elementele patrulatere Q5 şi Q6. Elementul Q5 are în plus două grade de libertate, nenodale, pentru care o nouă funcţie de modelare este necesară

$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

corespunzînd centrului elementului din fig. 13.4. Această funcţie are valoarea unu în centru, dar se anulează de-a lungul celor patru laturi ale elementului. Cîmpul deplasărilor are în acest caz expresiile

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^4 N_i u_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) u_5 \\ v &= \sum_1^4 N_i v_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) v_5 \end{aligned} \qquad (13.18)$$

neavînd efect asupra compatibilității dintre elemente. Mărimile u_5 și v_5 nu sînt deplasări ale vreunui imaginar „nod" central, ci trebuie privite ca elemente componente ale deplasărilor elementului, u_c și v_c, în punctul cu $\xi = \eta = 0$, respectiv

$$u_c = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_3) + u_5$$

$$v_c = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + v_5.$$

În problemele de încovoiere pură s-a dovedit eficientă folosirea elementului Q6, în care gradele de libertate suplimentare au forma

$$u = \alpha_1(1 - \xi^2) + \alpha_2(1 - \eta^2)$$

$$v = \beta_1(1 - \xi^2) + \beta_2(1 - \eta^2)$$

unde α_1, α_2 și β_1, β_2 sînt valori constante. În acest caz cîmpul deplasărilor este descris de

$$u = \sum_1^4 N_i u_i + (1 - \xi^2)u_5 + (1 - \eta^2)u_6$$

$$v = \sum_1^4 N_i v_i + (1 - \xi^2)v_5 + (1 - \eta^2)v_6$$

ceea ce face ca elementul Q6 să aibă 12 grade de libertate, față de Q5 care are numai 10 grade de libertate.

În cazul elementului parabolic, de tip patrulater, trebuie introduse trei funcții de modelare și anume

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \qquad \text{pentru } i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \qquad \text{pentru } i = 2, 6, \qquad (13.19)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \qquad \text{pentru } i = 4, 8.$$

Totodată, elementul parabolic poate avea grade de libertate interne, nenodale, de felul celor descrise anterior.

În probleme tridimensionale, funcţiile de modelare echivalente pot fi uşor deduse. Astfel, în cazul prismei drepte arătate în fig. 13.7, se poate opta pentru o funcţie de modelare lineară, cu 8 noduri, sau parabolică, cu 20 noduri, sau pentru o funcţie cubică avînd 32 noduri.

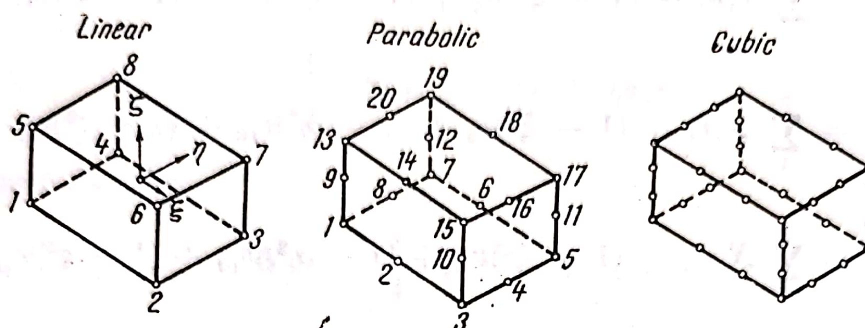


Fig. 13.7.

Pentru funcţia liniară există formularea

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \varsigma\varsigma_i)$$

în care, pentru $i = 1, 2, \ldots, 8$, valorile consecutive ale coordonatelor nodurilor sînt

$$\xi_i = -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1$$

$$\eta_i = -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1$$

$$\xi_i = -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1.$$

Cînd se optează pentru grade de libertate suplimentare, nenodale, relaţiile echivalente cu (13.18) sînt

$$u = \sum_1^8 N_i u_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \varsigma^2)u_9$$

$$v = \sum_1^8 N_i v_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \varsigma^2)v_9$$

$$w = \sum_1^8 N_i w_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \varsigma^2)w_9$$

Scanned with OKEN Scanner

elementul avînd 27 grade de libertate. Prin analogie cu elementul plan Q6, se poate deduce că în cazul elementului tridimensional cîmpul deplasărilor are 33 grade de libertate, fiind dat de relațiile

$$u = \sum_{1}^{8} N_i u_i + (1 - \xi^2) u_9 + (1 - \eta^2) u_{10} + (1 - \varsigma^2) u_{11}$$

$$v = \sum_{1}^{8} N_i v_i + (1 - \xi^2) v_9 + (1 - \eta^2) v_{10} + (1 - \varsigma^2) v_{11}$$

$$w = \sum_{1}^{8} N_i w_i + (1 - \xi^2) w_9 + (1 - \eta^2) w_{10} + (1 - \varsigma^2) w_{11}.$$

Pentru funcția tridimensională parabolică, în cazul nodurilor de colț există relația

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) (1 + \varsigma\varsigma_i) (\xi\xi_i + \eta\eta_i + \varsigma\varsigma_i - 2)$$

iar pentru nodurile de la mijlocul laturilor se dau următoarele trei funcții de interpolare

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta\eta_i) (1 + \varsigma\varsigma_i) \quad \text{pentru } i = 2, 6, 14, 18$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi\xi_i) (1 + \xi\xi_i) \quad \text{pentru } i = 4, 8, 16, 20$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) \quad \text{pentru } i = 9, 10, 11, 12.$$

13.5.4. TRANSFORMĂRI ALE CONCEPTELOR DE BAZĂ ÎN DIFERITE SISTEME DE COORDONATE

În continuare, se arată modul în care proprietățile elementelor finite descrise în § 13.3 sînt transpuse în coordonate intrinseci în cazul elementelor bidimensionale liniare, nefiind nici o dificultate pentru extinderea rezultatelor la cele tridimensionale.

Se pleacă de la

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \qquad (13.20)$$


Scanned with OKEN Scanner

şi de la

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$
$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \qquad (13.21)$$

în care

$$N_i = \frac{1}{4}\,(1 + \xi\xi_i)\,(1 + \eta\eta_i).$$

Se poate scrie că

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4}\,\xi_i(1 + \eta\eta_i)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{1}{4}\,\eta_i(1 + \xi\xi_i)$$

în care virgula din mebrul întîi simbolizează derivata parţială în raport cu variabila ce urmează după virgulă.

Plecînd de la relaţiile (13.21), derivatele parţiale ale deplasărilor în cele două sisteme de coordonate $\xi\eta$ şi xy sînt date, potrivit regulilor cunoscute, de

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (13.22)$$

şi de

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (13.23)$$

în care, potrivit cu (13.20), $[J]$ este o matrice jacobiană cu 2×2 elemente avînd forma

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}. \qquad (13.24)$$

Notînd cu $[J^*]$ inversa matricei $[J]$, respectiv

$$[J^*] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} J^*_{11} & J^*_{12} \\ J^*_{12} & J^*_{22} \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

apare posibil ca relaţiile (13.22) şi (13.23) să fie concentrate într-o ecuaţie matriceală de forma

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \tag{13.25}$$

in care, ţinînd seama de relaţiile (13.21), se poate face substituirea

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=4} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \tag{13.26}$$

Cu ajutorul relaţiei (13.25), în care se introduce relaţia (13.26) şi folosind cunoscutele relaţii din elasticitate

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

scrise matriceal, rezultă

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=4} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

sau

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u^{I} \\ v_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

unde $[B]$ este o matrice 3×8, respectiv

$$\underset{3\times 8}{[B]} = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} J_{11}^{*} & J_{12}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^{*} & J_{22}^{*} \\ J_{21}^{*} & J_{22}^{*} & J_{11}^{*} & J_{12}^{*} \end{bmatrix}} \underset{4\times 8}{\left[\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=4} \right]}.$$

În final, se obține

$$[B] = \left[\begin{bmatrix} (J_{11}^{*} N_{i,\xi} + J_{12}^{*} N_{i,\eta}) & 0 \\ 0 & (J_{21}^{*} N_{i,\xi} + J_{22}^{*} N_{i,\eta}) \\ (J_{21}^{*} N_{i,\xi} + J_{22}^{*} N_{i,\eta}) & (J_{11}^{*} N_{i,\xi} + J_{12}^{*} N_{i,\eta}) \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_{i=4} \right]. \tag{13.27}$$

Avînd stabilită expresia matricei $[B]$ se poate trece la evaluarea matricei de rigiditate $[k]$ din (13.15). Întîi, se observă că

$$dV = dx\, dy\, dz = |J|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

încît

$$[k] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^{T}\, [E]\, [B]\, |J|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{13.28}$$

În timp ce limitele de intrgrare sînt foarte simple, expresia de integrat este complexă din cauză că expresiile pentru $[B]$, $[J^{*}]$ și pentru determinantul $|J|$ sînt funcții de ξ și η. Integrarea nu se poate efectua exact în toate cazurile, încît se recurge la tehnicile aproximative de calcul numeric, dintre care se menționează doar metoda de integrare numerică denumită cuadratura lui Gauss.

13.5.5. CUADRATURA LUI GAUSS

Cea mai simplă cale pentru evaluarea numerică a integralei

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi$$

este de a evalua funcția $f(\xi)$ în $\xi = 0$, respectiv în punctul de la mijlocul intervalului de integrare, și a o înmulți cu lungimea intervalului, care este 2, așa cum se vede ușor urmărind fig. 13.8.

Rezultă

$$I = 2\, f(0)$$

în care factorul 2 se numește pondere și este de observat că abscisa a fost aleasă într-un mod judicios, aparent banal.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a îmbunătăţi precizia integrării numerice, se poate opta pentru două sau mai multe abscise. Din nou, opţiunea este făcută în modul cel mai judicios posibil, mărimea absciselor nefiind întîmplătoare. Corespunzător acestor abscise trebuie să fie determinate prin calcul ponderile respective care înmulţesc valorile numerice ale funcţiilor în punctele

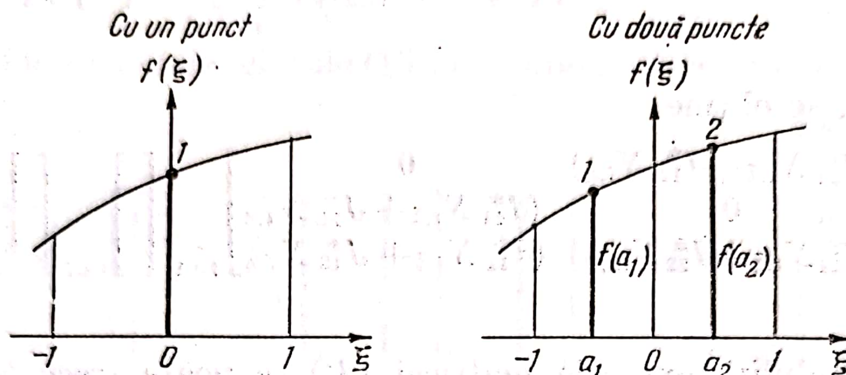


Fig.13.8.

avînd abscisele alese. S-a determinat că în cazul a două puncte de abscise $a_{1,2} = \mp 1/\sqrt{3}$, ponderile respective sînt egale cu unu, încît

$$I = (1) f(a_1) + (1) f(a_2)$$

iar pentru trei puncte, avînd abscisele

$$a_{1,3} = \mp \sqrt{3/5} \text{ şi } a_2 = 0$$

ponderile au valorile 5/9 şi respectiv 8/9, încît

$$I = \frac{5}{9} f(a_1) + \frac{8}{9} f(a_2) + \frac{5}{9} f(a_3).$$

Se poate alege orice număr de puncte, pentru care, dacă acesta este mai mare de trei, efortul de calcul ce revine unui mare număr de elemente finite devine un serios impediment.

Generalizînd, se poate scrie că

$$I = \sum_i H_i f(a_i)$$

unde H_i este ponderea asociată funcţiei calculate în punctul de abscisă $\xi_i = a_i$.

Pentru probleme bidimensionale există relaţia

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i}\sum_{j} H_i H_j f(a_i, b_i)$$

iar pentru cele tridimensionale relaţia este

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} H_i H_j H_k f(a_i, b_i, c_i).$$

Pentru exemplificare, fie elementul finit bidimensional arătat în fig. 13.9 avînd patru puncte Gauss, respectiv cîte două pe fiecare direcţie. Abscisele acestor puncte şi ponderile corespunzătoare au valorile

$$a_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}},\; b_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$H_i = 1,\; H_j = 1$$

încît

$$I = (1)(1)\, f(a_1, b_1) + (1)(1)\, f(a_2, b_1) + (1)(1)\, f(a_2, b_2) + (1)(1)\, f(a_1, b_2)$$

fără a fi însă absolut necesar să se folosească acelaşi număr de puncte Gauss de-a lungul fiecărei direcţii de coordonate.

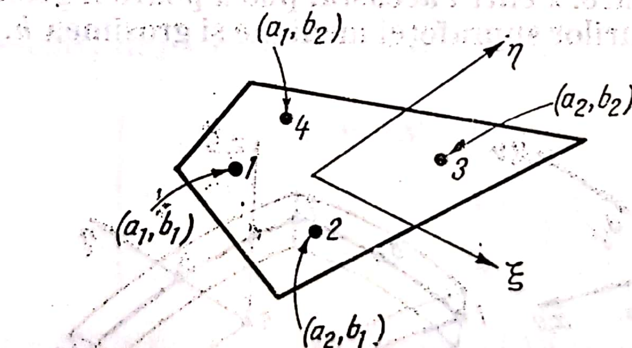
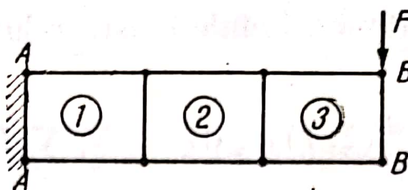


Fig. 13.9.

În fig. 13.10 este arătată o grindă consolă, discretizată în trei elemente finite de tip patrulater, eventual fiecare element putînd fi la rîndul său divizat în elemente finite de tip triunghiular. Din simpla examinare a rezultatelor, se constată un salt impresionant a preciziei, în %, cînd se trece de la elemente triunghiulare la elemente de tip patrulater.



Tipul de element / Mărimea calculată	Elemente tip patrulater			Elemente tip triunghiular	
v_{max} (în B)	100	99	65	53	26
σ_{max} (în A)	100	99	56	51	19

Fig. 13.10.

13.6. APLICAREA ELEMENTELOR FINITE ÎN CAZUL ÎNCOVOIERII PLĂCILOR PLANE. PROGRAM DE CALCULATOR

În cele ce urmează se va examina în mod succint încovoierea plăcilor plane, din punctul de vedere al analizei prin elemente finite, fără a insista asupra justificărilor matematice, cunoscute din teoria plăcilor.

13.6.1. FORMULAREA IZOPARAMETRICĂ A ELEMENTULUI FINIT SOLICITAT LA ÎNCOVOIERE

Sub aspect fizic, plăcile plane există în spațiul tridimensional, dar analiza lor poate fi concepută ca o problemă bidimensională dacă grosimea h a plăcii nu este prea mare. Pentru aceasta, placa poate fi geometric definită prin coordonatele nodurilor suprafeței mediane și grosimea h. Elementul fi-

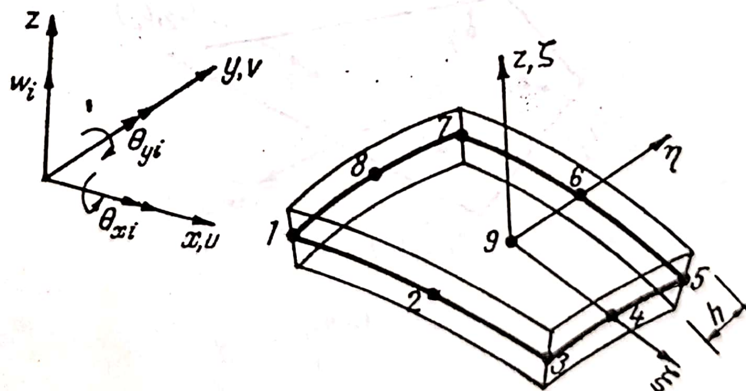


Fig. 13.11.

nit adoptat, arătat în fig. 13.11, este plan și are 8 noduri, în fiecare nod avînd cîte trei grade de libertate și anume : deplasarea w în sensul axei z paralelă cu axa intrinsecă ζ și rotirile θ_x și θ_y ale liniilor nodale de pe direcția

Scanned with OKEN Scanner

grosimii plăcii. Ca urmare, deplasările u şi v în direcţiile x şi y sînt funcţie de θ_x şi θ_y în aşa fel încît să producă deplasări nule ale suprafeţei mediane, dar diferite de zero în puncte aflate la distanţa z faţă de suprafaţa mediană. O astfel de formulare, tipică pentru încovoiere, se poate exprima prin relaţii de forma (13.16), adică

$$\begin{aligned} u &= z(N_1\theta_{y1} + N_2\theta_{y2} + \ldots + N_8\,\theta_{y8}) \\ v &= -z(N_1\theta_{x1} + N_2\theta_{x2} + \ldots + N_8\,\theta_{x8}) \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + \ldots + N_8 w_8. \end{aligned}$$

În total sînt 24 grade de libertate pe fiecare element, alese ca necunoscute ale problemei, eventual 27 grade de libertate dacă se suplimentează cu trei necunoscute nenodale centrale, respectiv

$$\{\delta\} = \{w_1\ \theta_{y1}\ \theta_{x1}\ w_2\ \theta_{y2}\ \theta_{x2}\ w_3 \ldots \theta_{x9}\}.$$

Relaţiile anterioare pentru deplasări se pot scrie sub forma unei matrice 3×27, astfel

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & zN_1 & 0 & 0 & zN_2 & 0 & \cdots & 0 & zN_9 & 0 \\ 0 & 0 & -zN_1 & 0 & 0 & -zN_2 & \cdots & 0 & 0 & -zN_9 \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_9 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ \theta_{x9} \end{Bmatrix}$$

sau, mai concentrat, după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{9} \begin{bmatrix} 0 & zN_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i \\ N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \end{Bmatrix} \qquad (13.29)$$

în care N_i sînt funcţiile de modelare date în (13.19). Din nou se procedează potrivit regulilor generale de derivare, obţinîndu-se

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \end{Bmatrix}$$

în care s-a luat $z_{,\xi} = z_{,\eta} = x_{,\zeta} = y_{,\zeta} = 0$, iar $z_{,\zeta} = 1$ întrucît $z = \zeta$.

Se notează matricea jacobiană cu

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13.30}$$

în care, ţinînd seama de o exprimare a coordonatelor x şi y în forma (13.20), se obţine

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \cdots & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \cdots & N_{8,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \end{Bmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{Bmatrix} w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix}.$$

Sub formă matriceală, derivatele parţiale ale deplasărilor u, v şi w devin

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^* & 0 & 0 \\ 0 & J^* & 0 \\ 0 & 0 & J^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \tag{13.31}$$

în care

$$[J^*] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & \dfrac{-J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & 0 \\ \dfrac{-J_{21}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & \dfrac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Din (13.29) se obține

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{9} \begin{bmatrix} 0 & zN_{i,\xi} & 0 \\ 0 & zN_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_{i,\xi} \\ 0 & 0 & -zN_{i,\eta} \\ 0 & 0 & -N_i \\ N_{i,\xi} & 0 & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \end{Bmatrix}. \tag{13.32}$$

Pe de altă parte, din elasticitate se cunosc relațiile

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix}. \tag{13.33}$$

Fie

$$a_i = J^*_{11}\, N_{i,\xi} + J^*_{12}\, N_{i,\eta}$$

$$b_i = J^*_{21}\, N_{i,\xi} + J^*_{22}\, N_{i,\eta}$$

Introducînd pe (13.32) în (13.31), iar rezultatul substituindu-l în (13.33), se obține

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \tag{13.34}$$

în care

$$[B] = \sum_{i=1}^{9} \begin{bmatrix} 0 & za_i & 0 \\ 0 & 0 & -zb_i \\ 0 & zb_i & -za_i \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.35}$$

Relațiile pentru tensiuni sînt date de

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}),$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, sub formă explicită

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & \mu_x E_y & 0 & 0 & 0 \\ \mu_y E_x & E_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \qquad (13.36)$$

în care $\mu_y E_x = \mu_x E_y$ pentru materiale ortotrope, axele x şi y fiind direcţii principale de ortotropie. Pentru materiale izotrope se ia

$$E_x = E_y = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

În ceea ce priveşte efectul termic, dacă T_0 este temperatura la suprafaţa superioară a plăcii, se poate opta pentru următoarea funcţie, în care temperatura variază în direcţia grosimii plăcii

$$T = 2\,\frac{T_0}{h}\,z.$$

În rest, α_x şi α_y sînt coeficienţi de dilatare termică.

13.6.2. INTEGRAREA EXPLICITĂ PE DIRECŢIA GROSIMII PLĂCII

Pentru calculul deformaţiilor cu relaţia (13.34) cît şi a tensiunilor cu (13.36) trebuie cunoscute deplasările nodale $\{\delta\}$. Acestea se obţin din relaţia (13.2)

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{R\}$$

dacă se cunosc matricele $\{R\}$ şi $[K]$, respectiv $[k]$-urile. Pentru formarea matricelor $[k]$ se foloseşte relaţia (13.15), respectiv

$$[k] = \int_V [B]^T[E][B]\,dx\,dy\,dz$$

în care matricea $[B]$ este formulată în (13.35).

În vederea integrării în raport cu variabila z, este convenabil a pune matricea $[B]$ sub forma unei sume, după cum urmează

$$[B] = [B_1] + z[B_2]$$

Scanned with OKEN Scanner

în care prima matrice este independentă de z, iar $z[B_2]$ este o matrice liniară în z. Explicit, se scrie

$$[B] = \sum_{i=1}^{9} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & -b_i \\ 0 & b_i & -a_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

Ținînd seama de acest ultim rezultat, matricea $[k]$ devine

$$[k] = \int_V [B_1 + zB_2]^T [E] [B_1 + zB_2] \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_S [B_1]^T [E] [B_1] \, dx \, dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \int_S [B_1]^T [E] [B_2] \, dx \, dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz +$$

$$+ \int_S [B_2]^T [E] [B_1] \, dx \, dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz + \int_S [B_2]^T [E] [B_2] \, dx \, dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz.$$

Întrucît

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = h, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0 \quad \text{și} \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

rezultă

$$[k] = h \int_S [B_1]^T [E] [B_1] \, dx \, dy + \frac{h^3}{12} \int_S [B_2]^T [E] [B_2] \, dx \, dy.$$

Din cauza distribuției zero-urilor în $[B_1]$, $[B_2]$ și $[E]$, se poate scrie

$$[k] = \int_S [B_1 + B_2]^T [D] [B_1 + B_2] \, dx \, dy = \int_S [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \, dx \, dy.$$

unde

$$[\bar{B}] = [B_1 + B_2] = \sum_{=1}^{9} \begin{bmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & -b_i \\ 0 & b_i & -a_i \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix} \qquad (13.37)$$

Scanned with OKEN Scanner

este o matrice cu dimensiunea 5×27, iar

$$[D] = \begin{bmatrix} E_x \frac{h^3}{12} & \mu_x E_y \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_y E_x \frac{h^3}{12} & E_y \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} h \end{bmatrix} \qquad (13.38)$$

în care $D_{44} = G_{yz}h$ şi $D_{55} = G_{xz}h$ sînt rigidităţi la forfecare, D_{33} este rigiditatea la răsucire, iar D_{11}, D_{12}, D_{21} şi D_{22} sînt rigidităţi la încovoiere, analoge rigidităţii $E\, h^3/12(1-\mu^2)$ pentru materiale omogene şi izotrope.

Final, se obţine

$$[k] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\bar{B}]^T\, [D][\bar{B}]\, |J|\, d\xi\, d\eta. \qquad (13.39)$$

Pentru formarea matricei $\{R\}$, trebuie evaluate contribuţiile sarcinilor distribuite p şi a deformaţiilor iniţiale ε_0.

Reluînd relaţiile pentru calculul forţelor nodale cauzate de sarcinile p şi respectiv de deformaţiile ε_0, date la sfîrşitul par. 13.3, se obţine

$$\{r\}_p = \int_S [N]^T \{p\}\, h\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [N]^T \{p\}\, h\, |J|\, d\xi\, d\eta$$

$$\{r\}_T = \int_V [B]^T\, [E]\, \{\varepsilon_0\}\, dV = \int_S [\bar{B}]^T\, [D]\, \{\bar{\varepsilon}_0\}\, dx\, dy.$$

Ultima relaţie devine

$$\{r\}_T = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\bar{B}]\, [D]\, \{\bar{\varepsilon}_0\}\, |J|\, d\xi\, d\eta \qquad (13.40)$$

în care

$$\{\bar{\varepsilon}_0\} = \frac{2T_0}{h} \{\alpha_x\ \alpha_y\ 0\ \ 0\ \ 0\}.$$

13.6.3. CALCULUL CURBURILOR, MOMENTELOR ŞI FORŢELOR TĂIETOARE

Din elasticitate se ştie că

$$\varepsilon_x = - z\, w_{,xx}$$

$$\varepsilon_y = - z\, w_{,yy}$$

$$\gamma_{xy} = - 2z\, w_{,xy}$$

din care, dacă se substituie valorile deformaţiilor $\{\varepsilon\}$ cu cele din (13.34) se obţin formule pentru curburi

$$w_{,xx} = - \sum_{i=1}^{9} a_i\, \theta_{yi}$$

$$w_{,yy} = \sum_{i=1}^{9} b_i\, \theta_{xi} \qquad (13.41)$$

$$w_{,xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} (- b_i\, \theta_{yi} + a_i\, \theta_{xi}).$$

Pentru momente, se pleacă de la

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\, z\, dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y\, z\, dz \qquad (13.42)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, z\, dz$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru forțele tăietoare transversale se folosesc relațiile

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \, dz$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \, dz. \qquad (13.43)$$

Substituind pe (13.36) în (13.42) și (13.43), rezultă

$$M_x = -\left[D_{11}\left(w_{,xx} + 2\frac{\alpha_x}{h} T\right) + D_{12}\left(w_{,yy} + 2\frac{\alpha_y}{h} T\right)\right]$$

$$M_y = -\left[D_{21}\left(w_{,xx} + 2\frac{\alpha_x}{h} T\right) + D_{22}\left(w_{,yy} + 2\frac{\alpha_y}{h} T\right)\right]$$

$$M_{xy} = -2 D_{33} w_{,xy}$$

$$Q_x = D_{44} \gamma_{xz}$$

$$Q_y = D_{55} \gamma_{yz}.$$

13.6.4. PROGRAM DE CALCULATOR

Pentru a ilustra aplicarea teoriei la o problemă concretă, este aleasă, în cele ce urmează, problema încovoierii plăcilor plane. Programul de calculator ce o rezolvă a fost elaborat de inginerii Vladimir Șerban și Dan Gîrbea, în cadrul unui curs de specializare în domeniul analizei tensiunilor și deformațiilor prin elemente finite. Organizat de conducerea Ministerului Transporturilor și Telecomunicațiilor, cursul a inclus prelegeri și aplicații la calculator privind tehnica programării, analiza numerică, algebra matriceală, analiza tensiunilor și deformațiilor prin elemente finite și s-a încheiat printr-un proiect constînd în analizarea la calculator a răspunsului plăcilor plane solicitate la încovoiere.

Programul de calcul, listat în anexa acestui capitol (anexa 13.1) asigură analiza prin elemente finite a unor tipuri variate de plăci, subțiri sau groase (grosime variabilă), rezemate oricum, putînd avea forme geometrice oarecari, sarcinile (forțe și cupluri) putînd fi aplicate oriunde pe placă. Este de asemenea prevăzută și prezența solicitărilor termice sau rezultînd din inexactități de montaj, plăcile putînd fi din materiale izotrope sau ortotrope. În cadrul aceleiași testări la calculator, programul permite rezolvarea succesivă a multor plăci de felul celor enumerate,

Scanned with OKEN Scanner

dar în anexă a fost dat, pentru exemplificare, doar cazul indicat în fig. 13.12, respectiv acela al unei plăci pătrate subţiri, confecţionată dintr-un material

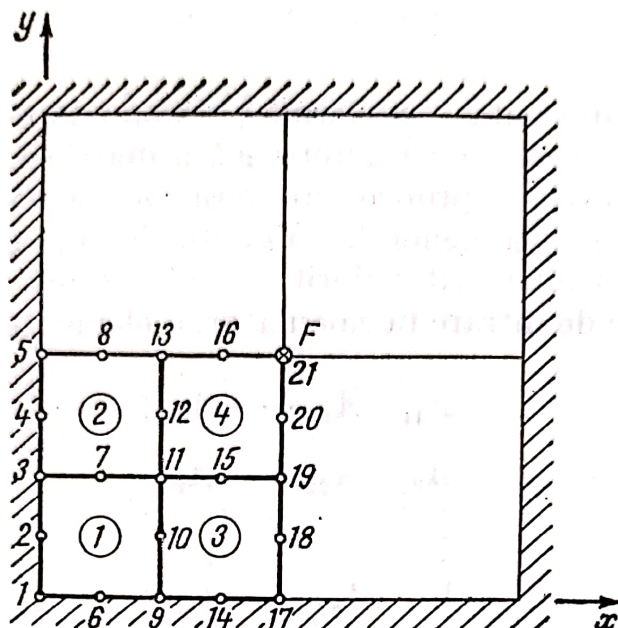


Fig. 13.12.

cu proprietăţi izotrope, încastrată pe contur şi fiind solicitată de o sarcină concentrată aplicată în centrul plăcii.

13.7. PROBLEME ALE VALORILOR PROPRII (FLAMBAJ ŞI VIBRAŢII)

13.7.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

În probleme de flambaj sau de vibraţii sînt de rezolvat sisteme de ecuaţii de forma

$$[A]\{X\} = \lambda \{X\} \tag{13.44}$$

în care $[A]$ este o matrice pătrată, $\{X\}$ este matricea coloană a vectorilor proprii, iar λ este un scalar al aşa-numitelor valori proprii. Ecuaţia matriceală (13.44), reprezentînd o problemă a valorilor proprii, poate fi scrisă astfel

$$(A - \lambda I)\, X = 0 \tag{13.45}$$

în care I este o matrice unitate de acelaşi ordin ca şi matricea A. Explicit, ecuaţia (13.45) se scrie

$$\begin{bmatrix} (A_{11}-\lambda) & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & (A_{22}-\lambda) & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2}-\lambda & \ldots & (A_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = 0$$

care are soluţia banală $\{X_1 X_2 \ldots X_n\} = 0$. Pentru a avea o soluţie nebanală, trebuie ca

$$|A - \lambda I| = 0,$$

determinant care, dezvoltat sub formă polinomială în λ şi egalat cu zero, produce aşa-numita ecuaţie caracteristică a matricei. Rădăcinile acestei ecuaţii reprezintă valorile proprii care dau soluţia nebanală a sistemului original al ecuaţiilor. În general, bibliotecile maşinilor de calcul au programe care determină atît valorile cît şi vectorii proprii prin simpla introducere, ca date de intrare în calculator, a elementelor determinantului

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cînd se calculează răspunsul dinamic al unei structuri, ecuaţia vibraţiilor armonice libere fără amortizare este

$$(K - \omega^2 [M]) \{D\} = 0 \qquad (13.46)$$

În această ecuaţie, $[K]$ este matricea de rigiditate structurală, cunoscută, $[M]$ este matricea de masă a structurii, ω este pulsaţia modurilor de vibraţie, respectiv şirul valorilor proprii, iar $\{D\}$, respectiv vectorii proprii, constituie amplitudinile deplasărilor corespunzătoare gradelor de libertate. Atît $[K]$ cît şi $[M]$ sînt independente de ω.

În cazul flambajului, problema valorilor proprii este reprezentată prin ecuaţia

$$([K] + \lambda [K_\sigma]) \{\delta D\} = 0 \qquad (13.47)$$

în care semnul plus devine minus în probleme cu eforturi de compresiune. În relaţia (13.47), $[K_\sigma]$ se numeşte matricea de rigiditate geometrică sau matricea de rigiditate a tensiunilor iniţiale, iar $\{\delta D\}$ reprezintă matricea deplasărilor virtuale. Suma $([K] + \lambda [K_\sigma])$ este matricea rigidităţii totale a structurii.

Prin transformări matriceale adecvate, atît ecuaţia (13.46) cît şi (13.47) pot fi aduse la forma standard a problemei valorilor proprii reprezentată de ecuaţia (13.45). În esenţă, matricele $[K]$, $[M]$ şi $[K_\sigma]$ constituie „materia primă" a problemelor de valori proprii; în acest capitol, a fost arătat doar modul de alcătuire a matricei clasice de rigiditate structurală.

Scanned with OKEN Scanner

Se dă matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

se cere să se calculeze valorile proprii şi vectorii proprii.

Se poate scrie

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 3 & 0 \\ 2 & (-1-\lambda) & 3 \\ 0 & 3 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

încît

$$-(1-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) - 9(1-\lambda) - 3 \times 2(1-\lambda) = 0.$$

Rezultă valorile proprii

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 4.$$

Pentru $\lambda = 1$, ecuaţia $AX = \lambda X$ are forma explicită

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{Bmatrix}$$

din care se obţine

$$X_{11} + 3X_{21} = X_{11}, \text{ cu } X_{21} = 0.$$

$$2X_{11} - X_{21} + 3X_{31} = X_{21}, \text{ cu } X_{31} = -\frac{2}{3} X_{11}$$

încît vectorii proprii sînt

$$\begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{Bmatrix} = \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix}.$$

Pentru $\lambda = -4$ se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix} = -4 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix}$$

din care rezultă

$$X_{12} + 3X_{22} = -4X_{12}, \text{ cu } X_{22} = -\frac{5}{3} X_{12}$$

$$2X_{12} - X_{22} + 3X_{32} = -4X_{22}, \text{ cu } X_{32} = X_{12}.$$

Vectorii proprii sînt

$$\begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix} = \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Pentru $\lambda = 4$ se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix} = 4 \begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix}$$

din care rezultă

$$X_{13} + 3X_{23} = 4X_{13}, \text{ cu } X_{23} = X_{13}$$

$$2X_{13} - X_{23} + 3X_{33} = 4X_{23}, \text{ cu } X_{33} = X_{13}.$$

Vectorii proprii sînt

$$\begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix} = \alpha_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 13.1.

PROGRAMUL PENTRU ANALIZĂ PRIN ELEMENTE FINITE A TENSIUNILOR ŞI DEPLASĂRILOR ÎN PLĂCILE PLANE

```
FORTRAN IV (VERL037) SOURCE LISTING:                           06/29/76      PAGE  0001

      PROGRAM ELFINI
C
C     XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
C     PROGRAM ELABORAT DE ING. VLADIMIR SERBAN SI ING. DAN GARBEA, M.T.TC.
C     XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
C
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      DIMENSION HTITLE(40)
      COMMON /B1/IBCON(25,3)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B3/X(25),Y(25)
      COMMON /B4/H(25),ALFA(25),BETA(25)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
      COMMON /B7/XL(10),YL(10)
      COMMON /B8/B(5,30)
      COMMON /B9/D(5,5)
      COMMON /B10/U(5,5)
      COMMON /B11/P(10)
      COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
      COMMON /B13/AX,AY
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B15/SE(30,30)
      COMMON /B16/RE(30)
      COMMON /B17/S(75,50)
      COMMON /B18/R(75)
      COMMON /B19/RR(75)
      COMMON /B20/SM(4,3,27)
      COMMON /B21/RM(4,3)
      COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
      PRINT 100
      PRINT 105
      PRINT 100
      READ(97,110)NPROBL
      DO 15 IPROBL=1,NPROBL
      READ(97,115)HTITLE
      PRINT 120,IPROBL
      PRINT 125,HTITLE
      READ(97,130)NUMNOD,NUMEL,NDOF,NNODEL
      PRINT 135,NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF
      READ(97,140)DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY,AX,AY
      PRINT 145
      PRINT 150
      PRINT 155
      PRINT 160
      PRINT 165
      PRINT 170
      PRINT 175,DX,DY,DXY,GNUX,SX,SY,AX,AY
      CALL INPUT
      CALL FORMK
```

```
      PRINT 195
      PRINT 180,NEQ,MBAND
      CALL SOLVE
      PRINT 185
      L=0
      DO 5 I=1,NUMNOD
      DO 5 J=1,NDOF
      L=L+1
      II=IBCON(I,J)
      IF(II.EQ.0)RR(L)=0.
      IF(II.GT.0)RR(L)=R(II)
    5 CONTINUE
      DO 10 N=1,NUMNOD
      M=NDOF*N
   10 PRINT 190,N,X(N),Y(N),RR(M-2),RR(M-1),RR(M)
      CALL MOMENT
   15 CONTINUE
  100 FORMAT(11X,109(1H*),/)
  105 FORMAT(11X,'I N C O V O I E R E A   P L A C I L O R   P L A N E ,  R
     1 E Z O L V A T A   P R I N   E L E M E N T E   F I N I T E',/)
  110 FORMAT(I2)
  115 FORMAT(20A4)
  120 FORMAT(/////,26X,'P R O B L E M A  ',I2/26X,19(1H=))
  125 FORMAT(26X,20A4/26X,20A4)
  130 FORMAT(4I5)
  135 FORMAT(20X,'PLACA ARE',I2,' ELEMENTE SI ',I2,' NODURI, UN ELEMENT
     1ARE',I2,' NODURI, UN NOD ARE',I2,' GRADE DE LIBERTATE')
  140 FORMAT(8F10.0)
  145 FORMAT(/,56X,'PROPRIETATI MECANICE'/56X,20(1H.),/)
  150 FORMAT(/,7X,'RIGIDITATI  LA  INCOVOIERE   RIGID. LA TORS. COEFICIE
     1NTUL      RIGIDITATI LA FORFECARE       COEF. DE DILATARE LINIARA')
  155 FORMAT(7X,27(1H=),2X,1?(1H=),16X,27(1H=),4X,26(1H=))
  160 FORMAT(12X,'DX',13X,'DY',12X,'DXY ',11X,'LUI',13X,'SX',13X,'SY',11
     1X,'ALFA X',9X,'ALFA Y')
  165 FORMAT(/,9X,'(DAN*CM)',7X,'(DAN*CM)',7X,'(DAN*CM)',7X,'POISSON  ',
     16X,'(DAN/CM)',9X,'(DAN/CM)',7X,'(GRAD FAHRENHEIT LA -1)')
  170 FORMAT(7X,117(1H=))
  175 FORMAT(7X,8(D12.6,3X),//)
  180 FORMAT(/,17X,'DIMENSIUNILE MATRICII DE RIGIDITATE A PLACII SINT'
     1 NEQ=',I3,' LINII',' MBAND=',I3,' COLOANE'/70X,7(1H*),9X,9(1H*))
  185 FORMAT(//,51X,'DEPLASARILE IN NODURILE PLACII'/51X,30(1H=)//25X,'N
     1OD',7X,'X',13X,'Y',10X,'SAGEATA      ROTIREA IN      ROTIREA IN'/59
     2X,'IN DIR. Z    JURUL AXEI Y   JURUL AXEI X'//34X,'(CM)',10X,'(CM)
     3',9X,'(CM)',16X,'(RADIANI)'/25X,75(1H=),/)
  190 FORMAT(25X,I3,2(3X,D10.4),3(3X,D12.5))
  195 FORMAT(///,58X,'R E Z U L T A T E'/58X,17(1H*),///)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE INPUT
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      COMMON /B1/IBCON(25,3)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B3/X(25),Y(25)
      COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      DO 5 N=1,NUMNOD
      READ(97,100)N,(IBCON(N,I),I=1,NDOF),X(N),Y(N),W(N),ALFA(N),BETA(N)
     1,THICK(N),PSI(N),TEMP(N)
    5 CONTINUE
      DO 10 M=1,NUMEL
   10 READ(97,105)M,(ID(M,I),I=1,NNODEL)
      PRINT 110
      PRINT 115
      PRINT 120
      PRINT 125
      PRINT 130
      DO 15 N=1,NUMNOD
      PRINT 135,N,X(N),Y(N),THICK(N),PSI(N),TEMP(N),(IBCON(N,I),I=1,NDOF
     1),W(N),ALFA(N),BETA(N)
   15 CONTINUE
      PRINT 140
      PRINT 145
      PRINT 150
      DO 20 M=1,NUMEL
   20 PRINT 155,M,(ID(M,I),I=1,NNODEL)
  100 FORMAT(I4,3I2,5F10.0,3F5.0)
  105 FORMAT(10I5)
  110 FORMAT(60X,'DATE NODALE'/60X,11(1H.),/)
  115 FORMAT(/,15X,'NOD',7X,'X',12X,'Y',8X,'GROS.',3X,'PRES.',4X,'TEMP.
     1 CONDITII',4X,'FORTA ',2(5X,8HMOMENTUL))
  120 FORMAT(74X,'LA     IN DIRECTIA  IN LUNGUL     IN LUNGUL')
  125 FORMAT(72X,'LIMITA',7X,'Z',9X,'AXEI Y',7X,'AXEI X'//24X,'(CM)',9X,
     1'(CM)',6X,'(CM)  (DAN/CM2) (GRAD F)',12X,'(DAN)     (DAN*CM/CM)  (D
     2AN*CM/CM)')
  130 FORMAT(15X,101(1H=),/)
  135 FORMAT(16X,I2,3X,2(D10.4,3X),2(F5.2,3X),F6.1,3X,3(I1,1X),2X,3(D10.
     13,3X))
  140 FORMAT(//,44X,'NODURILE PLACII =EXPLORATE IN SENS ANTIORAR'/44X,43
     1(1H.),/)
  145 FORMAT(/,52X,'NR.      NUMERELE      NODURILOR'/50X,'ELEMENT  1  2
     1 3  4  5  6  7  8')
  150 FORMAT(50X,32(1H=),/)
  155 FORMAT(52X,I2,4X,8(1X,I2))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FORMK
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      DIMENSION GW(2),KK(50)
      COMMON /B1/IBCON(25,3)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B3/X(25),Y(25)
      COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
      COMMON /B7/XL(10),YL(10)
      COMMON /B8/B(5,30)
      COMMON /B9/D(5,5)
      COMMON /B10/U(5,5)
      COMMON /B11/P(10)
      COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
      COMMON /B13/AX,AY
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B15/SE(30,30)
      COMMON /B16/RE(30)
      COMMON /B17/S(75,50)
      COMMON /B18/R(75)
      COMMON /B20/SM(4,3,27)
      COMMON /B21/RM(4,3)
      COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
      DATA GW/1.,1./
      NEQ=0
      DO 10 N=1,NUMNOD
      DO 10 I=1,NDOF
      IF(IBCON(N,I).GT.0)GO TO 5
      NEQ=NEQ+1
      IBCON(N,I)=NEQ
      GO TO 10
    5 IBCON(N,I)=0
   10 CONTINUE
      LMAX=NNODEL*NDOF
      MBAND=0
      DO 25 M=1,NUMEL
      L=0
      DO 15 I=1,NNODEL
      II=ID(M,I)
      DO 15 J=1,NDOF
      L=L+1
   15 KK(L)=IBCON(II,J)
      MAX=0
      MIN=10000
      DO 20 I=1,LMAX
      IF(KK(I).EQ.0)GO TO 20
      IF(KK(I).GT.MAX)MAX=KK(I)
      IF(KK(I).LT.MIN)MIN=KK(I)
   20 CONTINUE
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      NDIF=MAX-MIN+1
      IF(NDIF.GT.MBAND)MBAND=NDIF
   25 CONTINUE
      DO 30 I=1,75
      R(I)=0.
      DO 30 J=1,50
   30 S(I,J)=0.
      DO 130 M=1,NUMEL
      XC=0.
      YC=0.
      DO 35 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      XC=XC+X(J)
   35 YC=YC+Y(J)
      XC=XC/DFLOAT(NNODEL)
      YC=YC/DFLOAT(NNODEL)
      DO 40 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      XL(I)=X(J)-XC
   40 YL(I)=Y(J)-YC
      IMAX=(NNODEL+1)*NDOF
      JMAX=IMAX+1
      DO 45 I=1,IMAX
      RE(I)=0.
      DO 45 J=1,JMAX
   45 SE(I,J)=0.
      MACAZ1=1
      XI=0.
      ETA=0.
      DO 95 II=1,2
      DO 95 JJ=1,2
      CALL SHAPE(II,JJ,M,MACAZ1)
      IF(II.EQ.1.AND.JJ.EQ.1)GO TO 55
      DO 50 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      IF(THICK(1).EQ.THICK(J))GO TO 50
      GO TO 55
   50 CONTINUE
      GO TO 60
   55 MACAZ=0
      CALL ELAST(MACAZ)
   60 DO 70 K=1,5
      DO 70 L=1,JMAX
      DUM1=0.
      DO 65 I=K,5
   65 DUM1=DUM1+U(K,I)*B(I,L)
   70 B(K,L)=DUM1
      DUM1=GW(II)*GW(JJ)*DETJAC
      IF(PSIZ.EQ.0.)GO TO 80
      DO 75 NLIN=1,IMAX,2
```

```
      L=NLIN/3+1
   75 SE(NLIN,JMAX)=SE(NLIN,JMAX)+P(L)*PSIZ*DUM1
   80 DO 90 NLIN=1,IMAX
      DO 90 NCOL=NLIN,JMAX
      DUM2=0.
      DO 85 L=1,5
   85 DUM2=DUM2+B(L,NLIN)*B(L,NCOL)
   90 SE(NLIN,NCOL)=SE(NLIN,NCOL)+DUM2*DUM1
   95 CONTINUE
      DO 100 I=2,IMAX
      DO 100 J=1,I
  100 SE(I,J)=SE(J,I)
      DO 110 K=1,NDOF
      J=IMAX-K
      I=JMAX-K
      DO 110 L=1,J
      DUM1=SE(L,I)/SE(I,I)
      DO 105 II=1,J
  105 SE(L,II)=SE(L,II)-SE(I,II)*DUM1
  110 SE(L,JMAX)=SE(L,JMAX)-SE(I,JMAX)*DUM1
      I1=NNODEL*NDOF
      DO 115 I=1,I1
  115 RE(I)=SE(I,JMAX)
      DO 125 I=1,NDOF
      K=IMAX-NDOF+I
      DO 120 J=1,IMAX
  120 SM(M,I,J)=SE(K,J)
  125 RM(M,I)=SE(K,JMAX)
      CALL ASEMBL(M)
  130 CONTINUE
      RETURN
      END
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      SUBROUTINE SHAPE(II,JJ,M,MACAZ1)
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      REAL*8 JAC(3,3)
      DIMENSION AA(2),XII(8),ETAI(10),PXI(10),PYI(10)
      DIMENSION BB(2)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
      COMMON /B7/XL(10),YL(10)
      COMMON /B8/B(5,30)
      COMMON /B11/P(10)
      COMMON /B13/AX,AY
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
      DATA BB/-0.5773502691896257650,0.577350269189625765/
      DATA ETAI/-1.,-1.,-1.,0.,1.,1.,1.,0.,-1.,-1./
      EQUIVALENCE (XII(1),ETAI(3))
      AA(II)=BB(II)
      AA(JJ)=BB(JJ)
      IF(MACAZ1.NE.0)GO TO 5
      AA(II)=XI
      AA(JJ)=ETA
    5 AAII=1.-AA(II)**2
      AAJJ=1.-AA(JJ)**2
      DO 25 I=1,NNODEL
      DUM1=1.+XII(I)*AA(II)
      DUM2=1.+ETAI(I)*AA(JJ)
      DUM3=XII(I)*AA(II)+ETAI(I)*AA(JJ)-1.
      GO TO(10,15,10,20,10,15,10,20),I
   10 P(I)=DUM1*DUM2*DUM3/4.
      PXI(I)=(DUM1+DUM3)*XII(I)*DUM2/4.
      PYI(I)=(DUM2+DUM3)*ETAI(I)*DUM1/4.
      GO TO 25
   15 P(I)=AAII*DUM2/2.
      PXI(I)=-DUM2*AA(II)
      PYI(I)=AAII*ETAI(I)/2.
      GO TO 25
   20 P(I)=AAJJ*DUM1/2.
      PXI(I)=AAJJ*XII(I)/2.
      PYI(I)=-DUM1*AA(JJ)
   25 CONTINUE
      P(9)=AAII*AAJJ
      PXI(9)=-2.*AA(II)*AAJJ
      PYI(9)=-2.*AA(JJ)*AAII
      DO 30 I=1,3
      DO 30 J=1,3
   30 JAC(I,J)=0.
      DO 35 I=1,NNODEL
      JAC(1,1)=JAC(1,1)+PXI(I)*XL(I)
      JAC(1,2)=JAC(1,2)+PXI(I)*YL(I)
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      JAC(2,1)=JAC(2,1)+PYI(I)*XL(I)
   35 JAC(2,2)=JAC(2,2)+PYI(I)*YL(I)
      JAC(3,3)=1.
      DETJAC=JAC(1,1)*JAC(2,2)-JAC(1,2)*JAC(2,1)
      DUM1=JAC(1,1)/DETJAC
      JAC(1,1)=JAC(2,2)/DETJAC
      JAC(1,2)=-JAC(1,2)/DETJAC
      JAC(2,1)=-JAC(2,1)/DETJAC
      JAC(2,2)=DUM1
      NNOD=NNODEL+1
      DO 40 L=1,NNOD
      J=3*L
      I=J-1
      IJ=I-1
      B(1,IJ)=0.
      B(1,I)=JAC(1,1)*PXI(L)+JAC(1,2)*PYI(L)
      B(1,J)=0.
      B(2,IJ)=0.
      B(2,I)=0.
      B(2,J)=-JAC(2,1)*PXI(L)-JAC(2,2)*PYI(L)
      B(3,IJ)=0.
      B(3,I)=-B(2,J)
      B(3,J)=-B(1,I)
      B(4,IJ)=B(3,I)
      B(4,I)=0.
      B(4,J)=-P(L)
      B(5,IJ)=B(1,I)
      B(5,I)=P(L)
   40 B(5,J)=0.
      THIK=0.
      TEMPR=0.
      PSIZ=0.
      DO 45 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      THIK=THIK+P(I)*THICK(J)
      TEMPR=TEMPR+P(I)*TEMP(J)
   45 PSIZ=PSIZ+P(I)*PSI(J)
      K=NNOD*NDOF+1
      TT=2.*TEMPR/THIK
      B(1,K)=AX*TT
      B(2,K)=AY*TT
      B(3,K)=0.
      B(4,K)=0.
      B(5,K)=0.
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ELAST(MACAZ)
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B9/D(5,5)
      COMMON /B10/U(5,5)
      COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
      COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
      DO 5 I=1,5
      DO 5 J=1,5
    5 D(I,J)=0.
      D(1,1)=DX
      D(1,2)=GNUX*DY
      D(2,1)=D(1,2)
      D(2,2)=DY
      D(3,3)=DXY
      D(4,4)=SX
      D(5,5)=SY
      DUM1=THIK/THICK(1)
      DUM2=DUM1**3
      D(1,1)=D(1,1)*DUM2
      D(1,2)=D(1,2)*DUM2
      D(2,1)=D(1,2)
      D(2,2)=D(2,2)*DUM2
      D(3,3)=D(3,3)*DUM2
      D(4,4)=D(4,4)*DUM1
      D(5,5)=D(5,5)*DUM1
      IF(MACAZ.EQ.1)RETURN
      DO 10 I=1,5
      DO 10 J=1,5
   10 U(I,J)=0.
      U(1,1)=DSQRT(D(1,1))
      U(1,2)=D(1,2)/U(1,1)
      U(2,2)=DSQRT(D(2,2)-U(1,2)**2)
      U(3,3)=DSQRT(D(3,3))
      U(4,4)=DSQRT(D(4,4))
      U(5,5)=DSQRT(D(5,5))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ASEMBL(M)
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      DIMENSION KK(30)
      COMMON /B1/IBCON(25,3)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B15/SE(30,30)
      COMMON /B16/RE(30)
      COMMON /B17/S(75,50)
      COMMON /B18/R(75)
      I=0
      K1=NNODEL*NDOF
      DO 20 K=1,NNODEL
      NNOD=ID(M,K)
      DO 20 L=1,NDOF
      I=I+1
      KK(I)=IBCON(NNOD,L)
      GO TO (5,10,15),L
    5 RE(I)=RE(I)+W(NNOD)
      GO TO 20
   10 RE(I)=RE(I)+ALFA(NNOD)
      GO TO 20
   15 RE(I)=RE(I)+BETA(NNOD)
   20 CONTINUE
      DO 25 I=1,K1
      IF(KK(I).EQ.0)GO TO 25
      II=KK(I)
      R(II)=R(II)+RE(I)
      DO 25 J=1,K1
      IF(KK(J).LT.II)GO TO 25
      JJ=KK(J)-II+1
      S(II,JJ)=S(II,JJ)+SE(I,J)
   25 CONTINUE
      RETURN
      END
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      SUBROUTINE SOLVE
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B17/S(75,50)
      COMMON /B18/R(75)
      DO 15 N=1,NEQ
      DO 10 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 10
      I=N+L-1
      DUM=S(N,L)/S(N,1)
      J=0
      DO 5 K=L,MBAND
      J=J+1
    5 S(I,J)=S(I,J)-DUM*S(N,K)
      S(N,L)=DUM
   10 CONTINUE
   15 CONTINUE
      DO 25 N=1,NEQ
      DO 20 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 20
      I=N+L-1
      R(I)=R(I)-S(N,L)*R(N)
   20 CONTINUE
   25 R(N)=R(N)/S(N,1)
      DO 35 M=2,NEQ
      N=NEQ+1-M
      DO 30 L=2,MBAND
      IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 30
      K=N+L-1
      R(N)=R(N)-S(N,L)*R(K)
   30 CONTINUE
   35 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE MOMENT
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      DIMENSION DISP(30),CURV(5),XII(8),ETAI(10)
      DIMENSION CMX(25),CMY(25),CMXY(25),CMMAX(25),CMMIN(25),CMXYM(25)
      DIMENSION GRADE(25)
      COMMON /B1/IBCON(25,3)
      COMMON /B2/ID(4,8)
      COMMON /B3/X(25),Y(25)
      COMMON /B5/THICK(25)
      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
      COMMON /B7/XL(10),YL(10)
      COMMON /B8/B(5,30)
      COMMON /B9/D(5,5)
      COMMON /B10/U(5,5)
      COMMON /B11/P(10)
      COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
      COMMON /B13/AX,AY
      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
      COMMON /B19/RR(75)
      COMMON /B20/SM(4,3,27)
      COMMON /B21/RM(4,3)
      COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
      DATA PI,G/3.14159265,57.2957795/
      DATA ETAI/-1.,-1.,-1.,0.,1.,1.,1.,0.,-1.,-1./
      EQUIVALENCE (XII(1),ETAI(3))
      PRINT 100
      PRINT 105
      PRINT 110
      PRINT 115
      DO 65 M=1,NUMEL
      DO 5 I=1,NNODEL
      II=3*I
      JJ=3*ID(M,I)
      DISP(II-2)=RR(JJ-2)
      DISP(II-1)=RR(JJ-1)
    5 DISP(II)=RR(JJ)
      A1=SM(M,1,25)
      A2=SM(M,1,26)
      A3=SM(M,1,27)
      B1=SM(M,2,25)
      B2=SM(M,2,26)
      B3=SM(M,2,27)
      C1=SM(M,3,25)
      C2=SM(M,3,26)
      C3=SM(M,3,27)
      DISP(25)=0.
      DISP(26)=0.
      DISP(27)=0.
      JMAX=NNODEL*NDOF
      DUM1=0.
```

```
      DUM2=0.
      DUM3=0.
      DO 25 I=1,NDOF
      DO 25 J=1,JMAX
      GO TO (10,15,20),I
   10 DUM1=DUM1+SM(M,I,J)*DISP(J)
      GO TO 25
   15 DUM2=DUM2+SM(M,I,J)*DISP(J)
      GO TO 25
   20 DUM3=DUM3+SM(M,I,J)*DISP(J)
   25 CONTINUE
      R1=RM(M,1)-DUM1
      R2=RM(M,2)-DUM2
      R3=RM(M,3)-DUM3
      DUM=A1*B2*C3+A2*B3*C1+A3*B1*C2-A3*B2*C1-A1*B3*C2-A2*B1*C3
      IF(DUM)30,35,30
   30 DISP(25)=(R1*B2*C3+A2*B3*R3+A3*R2*C2-A3*B2*R3-R1*B3*C2-A2*R2*C3)/D
     1UM
      DISP(26)=(A1*R2*C3+R1*B3*C1+A3*B1*R3-A3*R2*C1-A1*B3*R3-R1*B1*C3)/D
     1UM
      DISP(27)=(A1*B2*R3+A2*R2*C1+R1*B1*C2-R1*B2*C1-A1*R2*C2-A2*B1*R3)/D
     1UM
   35 XC=0.
      YC=0.
      DO 40 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      XC=XC+X(J)
   40 YC=YC+Y(J)
      XC=XC/DFLOAT(NNODEL)
      YC=YC/DFLOAT(NNODEL)
      DO 45 I=1,NNODEL
      J=ID(M,I)
      XL(I)=X(J)-XC
   45 YL(I)=Y(J)-YC
      IMAX=(NNODEL+1)*NDOF+1
      JMAX=IMAX-1
      II=1
      JJ=2
      MACAZ1=0
      MACAZ=1
      DO 60 III=1,NNODEL
      XI=XII(III)
      ETA=ETAI(III)
      CALL SHAPE(II,JJ,M,MACAZ1)
      DO 50 I=1,NDOF
   50 CURV(I)=0.
      DO 55 I=1,NDOF
      CURV(I)=CURV(I)-B(I,IMAX)
      DO 55 J=1,JMAX
   55 CURV(I)=CURV(I)+B(I,J)*DISP(J)
```

```
      CALL ELAST(MACAZ)
      J=ID(M,III)
      BMX=D(1,1)*CURV(1)+D(1,2)*CURV(2)
      BMY=D(2,2)*CURV(2)+D(2,1)*CURV(1)
      TMXY=D(3,3)*CURV(3)
      CMX(J)=BMX
      CMY(J)=BMY
      CMXY(J)=TMXY
      DUM=DSQRT((BMX-BMY)**2+4.*(TMXY**2))
      BMMAX=0.5*(BMX+BMY+DUM)
      BMMIN=0.5*(BMX+BMY-DUM)
      TMXYM=0.5*(BMMAX-BMMIN)
      CMMAX(J)=BMMAX
      CMMIN(J)=BMMIN
      CMXYM(J)=TMXYM
      SI=2.*TMXY
      CO=BMY-BMX
      A=DATAN2(SI,CO)
      IF(A.LT.0.)A=2.*PI+A
      ANGLE=G*A/2.
      GRADE(J)=ANGLE
   60 CONTINUE
   65 CONTINUE
      DO 70 I=1,NUMNOD
   70 PRINT 120,I,X(I),Y(I),CMX(I),CMY(I),CMXY(I),CMMAX(I),CMMIN(I),CMXY
     1M(I),GRADE(I)
      PRINT 125
  100 FORMAT(//,47X,'VALORILE MOMENTELOR IN NODURILE PLACII'/47X,38(1H=)
     1,//)
  105 FORMAT(4X,' NOD',6X,'X',11X,'Y',12X,'MX',12X,'MY',11X,'MXY',11X,'M
     1MAX',10X,'MMIN',9X,'MXYMAX',8X,'UNGHI')
  110 FORMAT(/,12X,'(CM)',8X,'(CM)',3X,6(3X,11H(DAN*CM/CM)),5X,'(GRADE)'
     1)
  115 FORMAT(4X,125(1H=)/)
  120 FORMAT(4X,I3,2(2X,D10.3),7(2X,D12.5))
  125 FORMAT(1H1)
      RETURN
      END
```


Scanned with OKEN Scanner

FORTRAN IV PROGRAM ELFINI (LINKED AS ELFINI) STARTED --- 06/29/76

****

I N C O V O I E R E A P L A C I L O R P L A N E , R E Z O L V A T A P R I N E L E M E N T E F I N I T E

****

P R O B L E M A

PLACA PATRATA SUBTIRE, IZOTROPICA, INCASTRATA PE CONTUR, INCARCATA CU O SARCINA CONCENTRATA IN CENTRUL PLACII

PLACA ARE 4 ELEMENTE SI 21 NODURI, UN ELEMENT ARE 8 NODURI. UN NOD ARE 3 GRADE DE LIBERTATE

PROPRIETATI MECANICE

RIGIDITATI LA INCOVOIERE DX (DAN*CM)	DY (DAN*CM)	RIGID. LA TORS. DXY (DAN*CM)	COEFICIENTUL LUI POISSON	RIGIDITATI LA FORFECARE SX (DAN/CM)	SY (DAN/CM)	COEF. DE DILATARE LINIARA ALFA X (GRAD FAHRENHEIT LA -1)	ALFA Y
0,649038D 03	0,649038D 03	0,227813D 03	0,300000D 00	0,121500D 06	0,121500D 06	0,700000D-05	0,700000D-05

DATE NODALE

NOD	X (CM)	Y (CM)	GROS. (CM)	PRES. (DAN/CM2)	TEMP. (GRAD F)	CONDITII LA LIMITA	FORTA IN DIRECTIA Z (DAN)	MOMENTUL IN LUNGUL AXEI Y (DAN*CM/CM)	MOMENTUL IN LUNGUL AXEI X (DAN*CM/CM)
1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
2	0,0000D 00	0,5000D 01	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
3	0,0000D 00	0,1000D 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
4	0,0000D 00	0,1500D 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
5	0,0000D 00	0,2000D 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
6	0,5000D 01	0,0000D 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
7	0,5000D 01	0,1000D 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
8	0,5000D 01	0,2000D 02	0,15	0,00	0,0	0 0 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
9	0,1000D 02	0,0000D 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
10	0,1000D 02	0,5000D 01	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
11	0,1000D 02	0,1000D 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
12	0,1000D 02	0,1500D 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
13	0,1000D 02	0,2000D 02	0,15	0,00	0,0	0 0 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
14	0,1500D 02	0,0000D 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,0000D 00
15	0,1500D 02	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Scanned with OKEN Scanner

NODURILE PLACII -EXPLORATE IN SENS ANTIORAR
....

NR. ELEMENT	NUMERELE 1	2	3	4	5	6	NODURILOR 7	8
1	1	6	9	10	11	7	3	2
2	3	7	11	12	13	8	5	4
3	9	14	17	18	19	15	11	10
4	11	15	19	20	21	16	13	12

R E Z U L T A T E
****

DIMENSIUNILE MATRICII DE RIGIDITATE A PLACII SINT: NEQ= 28 LINII MBAND= 20 COLOANE

DEPLASARILE IN NODURILE PLACII

NOD	(CM)	Y (CM)	SAGEATA IN DIR. Z (CM)	ROTIREA IN JURUL AXEI Y (RADIANI)	ROTIREA IN JURUL AXEI X (RADIANI)
1	0,0000D 00	0,0000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
2	0,0000D 00	0,5000D 01	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
3	0,0000D 00	0,1000D 02	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
4	0,0000D 00	0,1500D 02	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
5	0,0000D 00	0,2000D 02	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
6	0,5000D 01	0,0000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
7	0,5000D 01	0,1000D 02	0,46474D-03	-0,17069D-03	0,67507D-04
8	0,5000D 01	0,2000D 02	0,25873D-03	-0,34262D-03	0,00000D 00
9	0,1000D 02	0,0000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
10	0,1000D 02	0,5000D 01	0,46474D-03	-0,67507D-04	0,17069D-03
11	0,1000D 02	0,1000D 02	0,15537D-02	-0,24920D-03	0,24920D-03
12	0,1000D 02	0,1500D 02	0,25960D-02	-0,40183D-03	0,15701D-03
13	0,1000D 02	0,2000D 02	0,30162D-02	-0,43872D-03	0,00000D 00
14	0,1500D 02	0,0000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
15	0,1500D 02	0,1000D 02	0,25960D-02	-0,15701D-03	0,40183D-03
16	0,1500D 02	0,2000D 02	0,55282D-02	-0,47948D-03	0,00000D 00
17	0,2000D 02	0,0000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00	0,00000D 00
18	0,2000D 02	0,5000D 01	0,25873D-03	0,00000D 00	0,34262D-03
19	0,2000D 02	0,1000D 02	0,30162D-02	0,00000D 00	0,43872D-03
20	0,2000D 02	0,1500D 02	0,55282D-02	0,00000D 00	0,47948D-03
21	0,2000D 02	0,2000D 02	0,69463D-02	0,00000D 00	0,00000D 00

VALORILE MOMENTELOR IN NODURILE PLACII

NOD X Y ...

			IN DIR. Z	JURUL AXEI Y	JURUL AXEI X
	(CM)	(CM)	(CM)	(RADIANI)	
1	0.0000D 00	0.0000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
2	0.0000D 00	0.5000D 01	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
3	0.0000D 00	0.1000D 02	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
4	0.0000D 00	0.1500D 02	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
5	0.0000D 00	0.2000D 02	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
6	0.5000D 01	0.0000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
7	0.5000D 01	0.1000D 02	0.46474D-03	-0.17069D-03	0.67507D-04
8	0.5000D 01	0.2000D 02	0.25878D-03	-0.34262D-03	0.00000D 00
9	0.1000D 02	0.0000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
10	0.1000D 02	0.5000D 01	0.46474D-03	-0.67507D-04	0.17069D-03
11	0.1000D 02	0.1000D 02	0.15537D-02	-0.24920D-03	0.24920D-03
12	0.1000D 02	0.1500D 02	0.25960D-02	-0.40183D-03	0.15701D-03
13	0.1000D 02	0.2000D 02	0.30162D-02	-0.43872D-03	0.00000D 00
14	0.1500D 02	0.0000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
15	0.1500D 02	0.1000D 02	0.25960D-02	-0.15701D-03	0.40183D-03
16	0.1500D 02	0.2000D 02	0.55282D-02	-0.47948D-03	0.00000D 00
17	0.2000D 02	0.0000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
18	0.2000D 02	0.5000D 01	0.25878D-03	0.00000D 00	0.34262D-03
19	0.2000D 02	0.1000D 02	0.30162D-02	0.00000D 00	0.43872D-03
20	0.2000D 02	0.1500D 02	0.55282D-02	0.00000D 00	0.47948D-03
21	0.2000D 02	0.2000D 02	0.69463D-02	0.00000D 00	0.00000D 00

VALORILE MOMENTELOR IN NODURILE PLACII

NOD	X	Y	MX	MY	MXY	MMAX	MMIN	MXYMAX	UNGHI
	(CM)	(CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(GRADE)
1	0.000D 00	0.000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00	0.00000D 00
2	0.000D 00	0.500D 01	-0.93418D-02	-0.28025D-02	-0.92827D-03	-0.26733D-02	-0.94710D-02	0.33988D-02	0.17208D 03
3	0.000D 00	0.100D 02	-0.28141D-01	-0.84423D-02	-0.47463D-03	-0.84308D-02	-0.28152D-01	0.98607D-02	0.17862D 03
4	0.000D 00	0.150D 02	-0.48916D-01	-0.14675D-01	-0.16400D-02	-0.14596D-01	-0.48994D-01	0.17199D-01	0.17726D 03
5	0.000D 00	0.200D 02	-0.60475D-01	-0.18142D-01	0.00000D 00	-0.18142D-01	-0.60475D-01	0.21166D-01	0.00000D 00
6	0.500D 01	0.000D 00	-0.28025D-02	-0.93418D-02	-0.92827D-03	-0.26733D-02	-0.94710D-02	0.33788D-02	0.97925D 02
7	0.500D 01	0.100D 02	-0.16689D-01	-0.65701D-02	-0.12530D-01	0.18829D-02	-0.25142D-01	0.13513D-01	0.14599D 03
8	0.500D 01	0.200D 02	-0.25330D-01	0.19387D-02	-0.98069D-03	0.19739D-02	-0.25365D-01	0.13670D-01	0.17794D 03
9	0.100D 02	0.000D 00	-0.84423D-02	-0.28141D-01	-0.47463D-03	-0.84308D-02	-0.28152D-01	0.98607D-02	0.91379D 02
10	0.100D 02	0.500D 01	-0.65701D-02	-0.16689D-01	-0.12530D-01	0.18829D-02	-0.25142D-01	0.13513D-01	0.12401D 03
11	0.100D 02	0.100D 02	0.10088D-01	0.10088D-01	-0.19183D-01	0.29272D-01	-0.90751D-02	0.19183D-01	0.13500D 03
12	0.100D 02	0.150D 02	-0.49979D-02	0.13219D-01	-0.13584D-01	0.20466D-01	-0.12245D-01	0.16355D-01	0.15192D 03
13	0.100D 02	0.200D 02	-0.31682D-01	0.12870D-01	0.95673D-03	0.12890D-01	-0.31702D-01	0.22296D-01	0.12297D 01
14	0.150D 02	0.000D 00	-0.14675D-01	-0.48916D-01	-0.16400D-02	-0.14596D-01	-0.48994D-01	0.17199D-01	0.92736D 02
15	0.150D 02	0.100D 02	0.13219D-01	-0.49979D-02	-0.13584D-01	0.20466D-01	-0.12245D-01	0.16355D-01	0.11808D 03
16	0.150D 02	0.200D 02	0.47078D-01	0.70554D-01	-0.54262D-02	0.71747D-01	0.45884D-01	0.12931D-01	0.16760D 03
17	0.200D 02	0.000D 00	-0.18142D-01	-0.60475D-01	0.00000D 00	-0.18142D-01	-0.60475D-01	0.21166D-01	0.90000D 02
18	0.200D 02	0.500D 01	0.19387D-02	-0.25330D-01	-0.98069D-03	0.19739D-02	-0.25365D-01	0.13670D-01	0.92057D 02
19	0.200D 02	0.100D 02	0.12870D-01	-0.31682D-01	0.95673D-03	0.12890D-01	-0.31702D-01	0.22296D-01	0.88770D 02
20	0.200D 02	0.150D 02	0.70554D-01	0.47078D-01	-0.54262D-02	0.71747D-01	0.45884D-01	0.12931D-01	0.10240D 03
21	0.200D 02	0.200D 02	0.12481D 00	0.12481D 00	0.00000D 00	0.12481D 00	0.12481D 00	0.63838D-15	0.00000D 00

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. AHMAD, S., IRONS, M.B. şi ZIENKIEWICZ, C.O., *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), nr. 3, 1970.
2. AKIN, E. J., FENTON, L.D. şi STODDART, T. C. W., *The Finite Element Method: A Bliography of Its Theory and Applications*, University of Tennessee, 1972
3. BURADA CORNELIU, *Contribuţii la determinarea solicitărilor în roata disc a vagonului de cale ferată*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic „Gh. Asachi" Iaşi, 1976
4. BLUMENFELD, M., *Calculul barelor cu calculatoare numerice*, Editura tehnică, 1975
5. BUHTIIAROV, M. A., ZIKEVSKAIA, M. L. şi FROLOV, D. G., *Culegere de probleme de programare*, Traducere din limba rusă, Editura tehnică, 1975
6. COOK, D. ROBERT, *Eigenvalue Problems with a „Mixed" Plate Element*, AIAAJ, nr. 5, 1969
7. COOK, D. ROBERT, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1974
8. COOK, D. ROBERT, *Improved Two-Dimensional Finite Element*, JSD, nr. ST9, 1974
9. COOK, D. ROBERT şi LADKANY G. SAMAAN, *Observations Regarding Assumed-Stress Hybrid Plate Elements*, IJNME, vol. 8, 1974
10. COOK, D. ROBERT, *Finite Element Buckling Analysis of Homogeneous and Sandwich Plates*, IJNME, vol. 9, 1975
11. COOK, D. ROBERT, *Avoidance of Parasitic Shear in Plane Element*, Journal of the Structural Division (JSD), nr. ST6, 1975.
12. CONTE, D. S., *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1965.
13. DESAI, S. C. şi ABEL, F. J., *Introduction to the Finite Element Method: A Numerical Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
14. DIMO, P., *Programarea in FORTRAN*, Editura didactică şi pedagogică, 1971.
15. NICULESCU, ST., *Iniţiere în FORTRAN*, Editura tehnică, 1972.
16. PASCARIU, I.I., *An Improved Theory for Studying Mechanically and Thermally Induced Vibrations of Cylindrical Shells with Transverse Shear Depending on Frequency*, Dissertation Abstracts International (U.S.A.), nr. 1, 1974.
17. PAWSEY, F. S. şi CLOUGH, W. R., *Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements*, IJNME, nr. 4, 1971.
18. ROSE, J.D. şi WILLOUGHBY, A.R., eds., *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, 1972.
19. SCHLACK, L. A., Jr., KESSEL, G. P. şi DONG, N. W., *Dynamic Response of Elastically Supported Circular Plates to a General Surface Load*, AIAA Journal, nr. 6, 1972.
20. TIMOSHENKO, S. şi WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
21. URAL OKTAY, *Matrix Operations and Use of Computers in Structural Engineering*, International Textbook Company, 1971.
22. URAL OKTAY, *Finite element Method: Basic Concepts and Applications*, Intext Educational Publishers, 1973.
23. TEODORESCU, ST. şi FLORENŢIU, AL., *Algoritmul şi optimizarea calculului de rezistenţă al aparatelor cilindrice de tip coloană*, Editura tehnică, 1972.
24. VĂDUVA ION şi POPOVICIU NICOLAE, *Introducere în programarea automată*, Editura didactică şi pedagogică, 1973.
25. ZIENKIEWICZ, C.O., *The Finite Element Metod in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1971.
26. ZIENKIEWICZ, C. O., TAYLOR, L.R. şi TOO, M. J., *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*, IJNME, nr. 2, 1971.
27. * * * FORTRAN IV: *Manual pentru programatori*, Ministerul Căilor Ferate, 1969.

ÎNCHEIERE

INDICAȚII PRIVIND ALEGEREA METODELOR ȘI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Din conţinutul prezentei cărţi rezultă că pentru determinarea, pe cale experimentală, a deformaţiilor şi tensiunilor există numeroase metode şi tehnici de lucru, care sînt în continuă perfecționare şi al căror număr creşte de la an la an. Ca urmare, alegerea celei mai potrivite metode, pentru o anumită aplicaţie practică, devine o problemă din ce în ce mai complexă.

Inginerul sau cercetătorul trebuie să cunoască bine caracteristicile diferitelor metode şi tehnici tensometrice, avantajele şi dezavantajele pe care acestea le prezintă, precum şi diferitele limitări ale acestora, pentru a putea alege pe cea mai potrivită.

1. PRINCIPALELE CARACTERISTICI ALE METODELOR ŞI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Caracteristicile metodelor tensometrice precum şi ale diferitelor tehnici ale acestora sînt prezentate în cadrul lucrării, mai dezvoltat pentru primele şase metode (cap. 2—7) considerate drept metode fundamentale. În scopul măririi operativităţii, la selectarea metodei şi tehnicii celei mai adecvate scopului urmărit, se consideră util a fi subliniate succint, în paginile ce urmează, caracteristicile de bază ale acestora precum şi principalele domenii de utilizare.

Extensometrele mecano-optice (cap. 2). Extensometrele mecano-optice sînt dispozitive utilizate pentru măsurarea deformaţiilor. În majoritatea cazurilor sînt întrebuinţate pentru trasarea curbelor caracteristice ale materialelor utilizate în construcţii. În multe cazuri sînt utilizate şi în

tensometrie aşa cum rezultă din exemplele date în cuprinsul cărţii (§ 2.6. şi § 8.3).

Extensometrele mecanice (§ 2.1), au o sensibilitate la deformaţie ce variază între 10 şi 100 μcm/cm în funcţie de sistemul de multiplicare şi baza de măsurare, în timp de *extensometrele optice*, (§ 2.2) au o sensibilitate la deformaţie ce poate ajunge la 1 μcm/cm. Sensibilitate mai ridicată au *extensometrele pneumatice* (§ 2.3.).

Tensometrele cu coardă vibrantă (§ 2.4.) precum şi *tensometrele acustice* (§ 2.5.), au, de regulă, baza de măsurare mare (pînă la 100 mm) şi sînt indicate, în special, în cazul încercărilor de lungă durată. Ele sînt utilizate, cu succes, la studiul fluajului în cazul construcţiilor din beton.

Tensometria electrică (cap. 3). Tensometria electrică şi, îndeosebi, cea rezistivă reprezintă la ora actuală una dintre cele mai utilizate metode de analiză experimentală a stării de tensiune. *Traductoarele rezistive* sînt folosite pe scară din ce în ce mai largă datorită dimensiunilor relativ mici, aplicării uşoare asupra structurii, costului relativ redus precum şi posibilităţii de citire directă a deformaţiei. Prin folosirea rozetelor cu două, trei sau patru traductoare, în funcţie de starea de tensiune, pot fi determinate direcţiile şi tensiunile principale în cele mai diverse situaţii.

Cu *traductoarele rezistive* uzuale pot fi măsurate deformaţii specifice cuprinse între 1 şi 20000 μcm/cm iar cu traductoarele de mare alungire pot fi măsurate deformaţii plastice (de pînă la 100000 μcm/cm). Cu lanţurile de traductoare se pot determina gradienţii din zonele cu concentrări mari de tensiune.

Cu traductoarele adaptate pentru solicitările variabile se pot măsura variaţii de deformaţie specifică de ±1,5 μcm/cm repetate de 10^7 ori. Fiind lipsite, practic, de inerţie traductoarele rezistive sînt apte pentru măsurarea deformaţiilor specifice produse prin solicitările prin şoc şi de vibraţii şi permit măsurări într-un domeniu larg de temperatură (−270°C ... 1000°C).

Prin utilizarea unei aparaturi adecvate se poate automatiza atît procesul de măsurare cît şi de prelucrare a rezultatelor; de asemenea, este posibilă efectuarea măsurărilor de la distanţă.

Traductoarele rezistive cu *semiconductoare*, avînd o sensibilitate mult mai mare, permit măsurarea unor deformaţii specifice foarte mici (<0,01 μcm/cm) şi necesită o aparatură mult mai simplă.

Traductoarele inductive sînt folosite pentru măsurarea deplasărilor într-un domeniu mai larg (1 μcm ... 100 mm) iar cele *capacitive* pentru deplasări mai mici. De asemenea, cu aceste traductoare se pot măsura viteze şi acceleraţii.

Fotoelasticitatea (cap. 4). Fotoelasticitatea cuprinde un ansamblu de tehnici experimentale utilizate pentru analiza stării de tensiune şi deformaţie din elemente şi structuri, care se bazează pe relaţiile ce se stabilesc între starea de tensiune dintr-un mediu transparent (model sau peliculă fotoelastică) şi modul în care acest mediu transmite lumina polarizată.

Analiza fotoelastică este larg folosită în practică pentru problemele în care se cer informaţii privind starea de tensiune într-o zonă extinsă din model sau structură. Utilizînd o mare diversitate de procedee, fotoelasticitatea permite o analiză cantitativă a zonelor puternic tensionate, determinînd, în majoritatea cazurilor, cu suficientă precizie, valorile maxime ale tensiunilor (cazul concentratorilor) atît la exteriorul cît şi în interiorul structurii, precum şi a zonelor slab solicitate în care materialul structurii este ineficient utilizat.

Starea de tensiune din elemente şi structuri este investigată fie pe *modelele acestora* (plane sau spaţiale), fie direct pe aceste elemente, cînd se folosesc *acoperiri fotoelastice*. Determinările cantitative se fac analizînd cîmpul de franje alb-negru (sau colorate) ce se observă pe suprafaţa modelului sau lacului fotoelastic, cînd sînt traversate de lumină polarizată. Din prelucrarea datelor experimentale rezultă atît valorile tensiunilor principale cît şi direcţiile acestora, în orice punct din zona investigată.

Analiza fotoelastică pe modele s-a extins astăzi şi la investigarea *stării spaţiale de tensiune*, atît în regim static cît şi în regim dinamic, devenind o metodă experimentală completă capabilă să furnizeze o mare diversitate de date. Tehnica fotoelasticităţii prin reflexie, oferă posibilitatea determinării stării de tensiune, direct pe suprafaţa structurilor solicitate atît în regim static cît şi în regim dinamic. Această tehnică este tot mai mult folosită astăzi pentru determinarea tensiunilor remanente rezultate în urma unor procedee de fabricaţie (v. § 8.1.) într-o serie de elemente ale structurilor metalice.

Datele experimentale furnizate de diferitele tehnici fotoelastice trebuie prelucrate în vederea determinării stării de tensiune din zonele cercetate. Prelucrarea acestor date cu ajutorul mijloacelor moderne de calcul permite o analiză completă şi rapidă a stării de tensiune pentru elemente cu geometrii şi moduri de încărcare din cele mai complicate.

Metodele interferometrice (cap. 5) a) *Metodele bazate pe fenomenul moiré.*

În ultimii ani, utilizarea franjelor moiré în tensometrie a căpătat o largă utilizare datorită, în principal, următoarelor avantaje:

— Oferă posibilitatea de a se determina direct mărimea și distribuția deformațiilor specifice, din relații pur geometrice, fără intermediul vreunui fenomen fizic intermediar ca de exemplu : schimbări de rezistență electrică (în cazul tensometriei electrice rezistive) sau de birefringență (în cazul fotoelasticității).

— Studiul se poate face direct pe structură sau pe modele realizate din același material ca și prototipul.

— Oferă posibilitatea obținerii unui spectru general și continuu în timp a deformațiilor specifice — deci și a tensiunilor — în piesa supusă cercetării.

— Se poate studia comportarea materialelor la temperaturi ridicate, pînă în apropierea temperaturii de topire a acestora, utilizînd rețele imprimate prin gravare (§ 5.2). Ne venind în contact cu modelul încălzit nici un fel de corp străin nu exercită nici un fel de influență asupra distribuției căldurii în corpul modelului supus cercetării.

— Franjele obținute prin reflexie dau bune rezultate la studiul deformațiilor și a rezistenței plăcilor solicitate la încovoiere.

— Cu excepția tehnicii gravării, celelalte tehnici de reproducere a rețelei pe model, pe suprafața piesei supusă cercetării, nu introduc concentratori de tensiuni și nu este influențată rigiditatea acesteia ca în cazul altor metode tensometrice (cazul peliculelor fotoelastice, a extensometrelor mecano-optice etc. și în anumită măsură și în cazul traductoarelor rezistive).

— Starea de deformație a piesei cercetate se interpretează după fotografii care rămîn valabile pentru verificări ulterioare.

— Sensibilitatea metodei variază în limite mari, ca urmare metoda poate fi utilizată, alegînd rețele cu frecvența corespunzătoare și tehnica de lucru adecvată, atît la determinarea deformațiilor specifice mici (sub 10^{-4}) cît și la determinarea deformațiilor mari, corespunzătoare solicitărilor în domeniul plastic, cu o precizie satisfăcătoare și cu ajutorul unor mijloace relativ simple și la un preț de cost redus.

Se poate afirma că utilizarea franjelor moiré în tensometrie se extinde, în special, acolo unde se termină posibilitățile celorlalte metode tensometrice fundamentale și, în anumite cazuri, le completează pe acestea.

b) *Interferometria holografică* (§ 5.7.). Această tehnică tensometrică, recent pusă la punct, oferă posibilitatea de a se înregistra, pe aceeași fotografie, atît izocromatele cît și izoclinele oferind astfel posibilitatea de a se determina deformațiile, respectiv, tensiunile în orice punct al unui element plan supus unei solicitări mono sau biaxiale. În cazul solicită-

rilor triaxiale, holografia poate fi utilizată — în stadiul actual — numai în cîteva cazuri particulare.

Cea mai mică deformaţie ce poate fi înregistrată prin interferometria holografică este de ordinul jumătăţii lungimii de undă a luminii utilizate şi cea mai mare de ordinul zecilor de microni. Tehnica este indicată şi pentru studierea evoluţiei în timp a stării de deformaţie precum şi la studiul vibraţiilor elementelor elastice.

Metoda causticelor (cap. 6). Metodele experimentale cunoscute pînă în prezent dau informaţii insuficiente în cazul cîmpurilor singulare de tensiuni caracterizate prin concentratori puternici. Astfel de cîmpuri pot fi creiate în următoarele condiţii :

a) Printr-o discontinuitate geometrică a cîmpului de tensiuni (fisuri, crestături, etc.);

b) Prin modul de încărcare (sarcini concentrate sau discontinui):

c) Printr-o discontinuitate geometrică a caracteristicilor elasto-mecanice ale materialului (materiale composite).

În cazul fotoelasticităţii, în zonele cu concentratori puternici de tensiune, rezultă o mare concentrare a izocromatelor din care cauză nu este posibilă evaluarea precisă a tensiunilor şi, în plus, pînă în prezent, nu se cunoaşte dacă indicele de refracţie a materialului rămîne, în aceste zone, o funcţie liniară de valorile tensiunilor principale. Prima observaţie rămîne valabilă şi în cazul cînd analiza tensiunilor se face cu ajutorul franjelor moiré sau prin interferometria holografică. Rezultatele determinărilor sînt şi mai puţin exacte — în cazul acestor cîmpuri de tensiuni — dacă se utilizează tensometria electrică (cap. 3) sau extensometrele mecano-optice (cap. 2).

Metoda causticelor, dezvoltată de prof. P.S. Theocaris (cap. 6) permite determinarea, cu mare precizie, a parametrilor cîmpurilor singulare de tensiuni în cazul stării plane de solicitare. Metoda este caracterizată — printre altele — printr-o mare simplitate care rezultă din însăşi principiul ce stă la baza metodei, (v. § 6.2.).

Metoda lacurilor casante (cap. 7). Folosirea lacurilor casante în analiza experimentală a tensiunilor este recomandată, mai ales, cînd este necesară explorarea unor zone mai ample ale structurii sau piesei de studiat. Cu ajutorul acestei metode se determină într-un mod foarte simplu, zonele cu concentratori de tensiuni, zonele de maximă solicitare, precum şi direcţiile principale ale tensiunilor.

În cazul utilizării acestei metode informaţiile privind cîmpul de tensiuni sînt furnizate de două familii de curbe :

— izostatice şi izoentatice.

Sînt cunoscute două tipuri de lacuri casante :

— lacuri pe bază de rășini utilizabile în domeniul de temperatură obișnuită, pentru determinarea atît a tensiunilor de întindere cît și a celor de compresiune, și,

— lacuri pe bază de ceramică utilizate numai pentru determinarea tensiunilor de întindere la temperaturi de pînă la 380°C.

Odată determinate direcțiile principale și distribuția tensiunilor, cu metoda lacurilor casante, valorile exacte ale tensiunilor în anumite puncte pot fi determinate folosind traductoare electrice rezistive, amplasate în locurile și după direcțiile indicate de lacurile casante.

Difracția cu raze X (§ 8.5.). Această metodă dă bune rezultate la determinarea tensiunilor remanente de suprafață fără deteriorarea structurii de cercetat. Ea este considerată ca fiind singura metodă cu care poate fi determinată starea totală de solicitare (tensiunile remanente + tensiunile produse de sarcinile ce acționează asupra structurii).

Metoda este limitată la piese de mărime relativ mică, pentru a putea fi poziționate în difractometru.

Metoda cu ultrasunete (§ 8.3.1.). Această metodă, relativ nouă, se bazează pe dependența între viteza de propagare a undelor ultrasonice transversale și valoarea tensiunii ce solicită materialul. Metoda poate fi utilizată la determinarea deformațiilor elastice, în materialele opace din punct de vedere optic.

Ea este indicată, îndeosebi, pentru măsurarea, pe cale nedistructivă, a tensiunilor remanente, cu o precizie satisfăcătoare.

Metoda electromagnetică (§ 8.3.2.). Metoda poate fi utilizată, bineînțeles, numai în cazul metalelor feromagnetice. Ea se bazează pe faptul că proprietățile magnetice ale acestor metale sînt sensibile la variația tensiunilor existente în masa metalului.

Metoda este folosită, în special, la determinarea tensiunilor remanente.

Analogia electrică (cap. 9). Metoda analogiilor electrice este indicată pentru determinarea stării de tensiune în unele cazuri în care metodele analitice de calcul devin complicate iar tehnicile experimentale obișnuite sînt mai puțin eficiente.

Această metodă se bazează pe analogia care există între cîmpul de tensiuni și cîmpul potențialului electric generat de anumite surse, într-un mediu conducător. Realizate ca sisteme electrice cu constante distribuite sau concentrate, analogiile electrice permit investigarea stării de tensiune în cazuri practice în care intervin geometrii complicate ale secțiunii elementului studiat iar cîmpul tensiunilor este descris de ecuații de tip Laplace sau Poisson (cazul plăcilor plane solicitate la încovoiere, al barelor torsionate cu

secţiune necirculară etc.). Metoda oferă posibilitatea vizualizării cîmpului de tensiune din întreg domeniul studiat, permiţînd determinarea cu suficientă precizie a tensiunilor maxime în zonele puternic solicitate (cazul concentratorilor la bare torsionate).

Analogiile electrice sînt folosite şi ca tehnică experimentală auxiliară într-o serie de cercetări de fotoelasticitate pentru determinarea valorilor individuale ale tensiunilor principale.

Prelucrarea datelor rezultate din determinările experimentale se poate face cu uşurinţă pe calculator, mărindu-se astfel, considerabil, operativitatea metodei.

O prezentare mai completă a caracteristicilor esenţiale ale metodelor şi tehnicilor tensometrice prezentate în cuprinsul lucrării este dată sintetic în anexa A.

2. INDICAŢII PRIVIND SELECTAREA METODELOR ŞI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Înainte de a stabili metoda şi tehnica de lucru este necesar să se cunoască răspunsul la următoarele trei întrebări :

1. Ce tip sau tipuri de deformaţii urmează să fie măsurate (uniaxiale, biaxiale, triaxiale)?

2. Cum este încărcarea : statică sau dinamică?

3. La ce temperatură se face încercarea?

Din anexa B rezultă că, ţinînd seama de răspunsurile la aceste întrebări, pot fi utilizate mai multe tehnici. Pentru a selecta, din acestea, pe cea mai potrivită se utilizează anexa A în care se arată pentru fiecare tehnică tensometrică :

— gradul de sensibilitate, în μcm/cm (col. 3) ;
— lungimea bazei de măsurare, în mm (col. 4) ;
— dacă indică direcţia tensiunilor principale (col. 5) ;
— dacă explorează întregul cîmp supus cercetării (col. 6) ;
— dacă indică gradientul deformaţiilor (col. 7) ;
— dacă citirea rezultatelor se face direct sau de la distanţă (col. 8 şi 9) ;
— pe ce se face citirea rezultatelor (col. 10) ;
— dacă permite automatizarea înregistrării şi prelucrării rezultatelor (col. 11 şi 12) ;
— complexitatea echipamentului utilizat (col. 13) notată cu cifre de la 1 la 4 (complexitatea maximă 4) ;

— gradul de instruire a operatorului (col. 14) notat cu cifre de la 1 la 4 (instruire superioară 4);

— dacă încercarea se poate face numai în laborator (L) sau şi în exterior (E) (col. 15);

— durata calculelor necesare pentru interpretarea rezultatelor (col. 16) notat cu cifre de la 1 (scurtă) la 4 (lungă);

— timpul necesar de la prima operaţie pînă la prima măsurare (col. 17);

— dacă măsurarea deformaţiilor se poate face numai la suprafaţa piesei sau şi în interiorul acesteia (col. 18 şi 19);

— ce tensiuni pot fi determinate: numai cele produse de sarcinile exterioare, (col. 20), tensiunile remanente (col. 21), suma acestora (col. 22) simultan;

În coloana 23, observaţii, se atrage atenţia asupra restricţiilor deosebite în cazul tehnicii de lucru respective sau a unor posibilităţi deosebite pe care aceasta le oferă.

Sigur, la alegerea metodei şi tehnicii de lucru se va ţine seamă de mijloacele de care se dispune precum şi de gradul de instruire a personalului ce urmează să execute încercările şi să interpreteze rezultatele.

Cînd se pune o problemă de analiză a tensiunilor, mai întîi trebuie căutată soluţia matematică şi numai dacă există certitudinea că pe această cale nu se poate ajunge la soluţii satisfăcătoare, se recomandă utilizarea metodelor experimentale.

Căutarea mai întîi a soluţiilor matematice, se recomandă şi datorită faptului că analizele experimentale sînt, de regulă, mai costisitoare. Dar cheltuielile suplimentare, legate de utilizarea uneia sau a mai multor tehnici tensometrice, sînt justificate de rezultatele mai realiste şi mai semnificative ce se pot obţine.

Avînd în vedere că majoritatea metodelor şi tehnicilor experimentale măsoară numai deformaţiile la suprafaţă, rezultatele obţinute pe cale matematică, chiar dacă sînt aproximative, pot completa sau verifica, uneori, pe cele experimentale. Ca urmare, se recomandă aşa cum afirmă prof. *P. S. Theocaris* în prefaţa lucrării, utilizarea drumului de mijloc, în cele mai multe cazuri de analiză a tensiunilor.

3. EXEMPLE DE APLICAŢII

a) *Stabilirea secţiunilor periculoase precum şi valoarea tensiunilor principale maxime şi direcţia acestora la prototipul unei carcase de vagon de călători în condiţii de exploatare.*

PRINCIPALELE CARACTERISTICI DE LUCRU ALE

Nr. crt.	Capitolul	Metodele şi tehnicile tensometrice	Sensibilitatea (pragul de deformaţie) µ cm/cm	Baza de măsurare mm	Dacă indică direcţia tensiunilor principale	Dacă explorează întregul cimp	Dacă indică gradientul deformaţiilor (tensiunilor)	Cum se fac determinările: Observare directă	de la distanţă	Indicaţiile sînt prezentate;
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	*Extensometre mecanooptice*								
		a) mecanice	10–100	2–20	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
		b) optice	1– 20	10– 30.	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
		c) pneumatice	1–100	2– 10	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
		d) cu coardă vibrantă	1–100	20–100	nu	nu	nu	da	da	pe scală
2	3	Tensometria electrică								
		a) traductoare rezistive[2])								
		– simple	1– 10	0,2–200	nu	nu	nu	da	da	pe scală sau numeric
		– rozete	1– 10	0,8– 25	da	nu	nu	da	da	pe scala sau numeric
		b) traductoare rezistive cu semiconductoare[2])	< 0,01	0,4– 25	nu	nu	nu	da	da	pe scală sau numeric
		c) traductoare inductive			nu	nu	nu	da	da	pe scală
		d) traductoare capacitive			nu	nu	nu	da	da	pe scală
3	4	*Fotoelasticitatea*								
		a) model bidimensional	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
		b) model tridimensional	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
		c) acoperiri cu pelicule fotoelastice	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
4	5	*Metode interferometrice*								
		a) metoda moiré								
		– cu reţea imprimată pe model	1–100		nu	da	da	da	nu	pe fotografia franjelor
		– prin reflexie	10–100		nu	da	da	da	nu	pe fotografia franjelor
		b) holografia	2		nu	da	da	da	nu	pe hologramă
5	6	*Metoda causticilor*	< 0,1		da	da	da	da	nu	pe fotografii
6	7	*Metoda lacurilor casante*								
		a) din răşină (temp. camerei)								
		– macrotehnică	500		0,3	da	da	da	nu	
		– microtehnică	800–1000		0,2	da	da	da	nu	
		b) din ceramică	300		0,2	da	da	da	nu	
7	8	*Metoda bazată pe difracţia razelor X*	2– 5		da	nu	nu	nu	nu	pe radiograma
8	8	*Metoda cu ultrasunete*	5– 10		da	nu	nu	nu	nu	pe polariscop
9	8	*Metoda electromagnetică*	10–100		da	nu	nu	da	da	pe scală
10	9	*Analogia electrică*	5		da	da	da	da	nu	pe scală

[1] A–tensiunile remanente şi B – tensiunile produse de sarcinile exterioare.
[2] Sensibilitatea, este determinată în principal, de sensibilitatea aparatului de măsură.

Scanned with OKEN Scanner

METODELOR ŞI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Dacă permite automatizarea		Complexitatea echipamentului utilizat	Gradul de instruire a operatorului	Măsurările se pot executa în laborator sau şi în exterior (L, E)	Durata calculelor pt. interpretarea rezultatelor	Timpul necesar de la prima operaţie pînă la prima măsurare h.	Permite măsurarea deformaţiilor		Se măsoară tensiunile[1]			Observaţii
înregistrării datelor	prelucrării datelor						la suprafaţă	în interiorul structurii	*A*	*B*	*A + B*	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
nu	nu	1,2	1,2	L + E	0	0,2−0,5	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2,3	2,3	L + E	0	0,2−1	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2,3	2,3	L + E	0	0,2−1	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2,3	2,3	L + E	1	0,5−1,5	da	da	da	da	nu	
da	da	3,4	2,3	L + E	1	0,25−24	da	nu	da	da	nu	
da	da	3,4	2,3	L + E	3	0,25−24	da	nu	da	da	nu	
da	da	3,4	2,3	L + E	1	0,25−24	da	nu	da	da	nu	Nu sînt indicate pentru deformaţii mari, mai ales de încovoiere
da	da	3,4	2,3	L + E	1	0,1−1	da	nu	da	da	nu	
da	da	3,4	2,3	L + E	1	0,1−1	da	nu	da	da	nu	
da	da	2,3	3,4	L	1,2,3	1−3	da	nu	da	nu	nu	Permite numai studii pe modele din materiale fotoelastice
da	da	3,4	3 4	L	3,4	48	da	da	da	nu	nu	
da	da	2,3	3,4	L + E	1,2,3	> 24	da	nu	da	da	nu	
da	da	2	3,4	L	3,4	1−2	da	da	da	da	nu	
da	da	2	3,4	L	3,4	1−2	da	nu	nu	da	nu	
da	da	4	4	L	4	2−3	da	nu	da	nu	nu	Numai ptr. deformaţii sub 50
da	da	2	3,4	L	3,4	1−2	da	nu	da	nu	nu	Indicat numai ptr. cîmpuri singulare de tensiune
nu	nu	1,2	1,2	L + E		18−24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	1,2,	3,4	L		18−24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	1,2	2,3	L + E		10−24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	4	3,4	L	2,3	0,5−1	da	nu	da	da	da	Numai pentru piese mici
nu	nu	3,4	3,4	L + E	1,2	0,5−1	da	da	da	da	nu	
nu	nu	2,3	2,3	L	1,2	1−2	da	da	da	da	nu	Numai pentru metale feromagnetice
da	da	2,3,4	3,4	L	3,4	> 48		da	da	nu	nu	

ANEXA B

Alegerea metodelor şi tehnicilor tensometrice în funcţie de: starea de tensiune, felul solicitărilor şi temperatură

Nr. crt.	Metodele şi tehnicile tensometrice	Tensiuni uniaxiale		Tensiuni biaxiale		Tensiuni triaxiale	
		Static	Dinamic	Static	Dinamic	Static	Dinamic
		Limită de temp. °C		Limită de temp. °C		Limită de temp. °C	
0	1	2	3	4	5	6	7
1	*Extensometre mecano-optice* a) Mecanice	−20÷100	−20÷100	−20÷100			
	b) Optice	−20÷100	−20÷100				
	c) Pneumatice	+20÷100	+20÷100				
	d) Cu coardă vibrantă	+20÷100	+20÷100				
2	*Tensometria electrică* a) Traductoare rezistive						
	— Simple	−200÷800	−200÷1000			20÷40	20÷40
	— Rozete	−200÷800	−200÷1000	−200÷800	−200÷1000		
	b) Traductoare cu semiconductoare	−20÷100	−20÷150				
	c) Traductoare inductive	−20÷80	−20÷80				
	d) Traductoare capacitive	−20÷80	−20÷80				
3	*Fotoelasticitatea* a) Model bidimensional	15÷35	15÷30	15÷35	15÷30		
	b) Model tridimensional	15÷35	15÷30	15÷35	15÷30	15÷35	15÷30
	c) Acoperiri cu pelicule fotoelastice	15—35	15÷30	15÷35	15÷30		

Scanned with OKEN Scanner

4	*Metode interferometrice* a) Metoda moiré-urilor — Cu rețeaua imprimată pe model	−20÷1000	+20÷800	+20÷1000	+20—800	−20÷300	−20÷300
	— Prin reflexie	+20÷1000	+20÷800	+20—1000	+20÷800		
	b) Holografia	20÷800*)	20÷800*)	20÷800*	20÷800*)		
5	*Metoda causticilor*	+20÷500	+20÷800	+20÷500	+20÷800		
6	*Metoda lacurilor casante* a) Din rășini — Macrotehnică	−10÷40	−10÷40	−10÷40	−10÷40		
	— Microtehnică	20÷30	20÷30	20÷30	20÷30		
	b) Din ceramică	−20÷400	−20÷400	−20÷400	−20÷400		
7	*Metoda bazată pe difracția razelor X*	−20÷+500	−20÷+800	−20÷+500			
8	*Metoda cu ultrasunete*	20÷40	20÷40	20÷40		20÷40	
9	*Metoda electromagnetică*	20÷40	20÷40	20÷40		20÷40	
10	Analogia electrică	15÷25		15÷25			

*) Cu măsuri speciale

Condiţii de încercare : (1) temperatură normală ; (2) funcţionare în aer liber ; (3) încărcarea statică şi dinamică şi (4) zone largi de explorare.

Potrivit anexei B ar putea fi întrebuinţate lacurile casante, traductoarele electrice rezistive, fotoelasticitatea sau extensometrele mecano-optice. Totuşi, conform anexei A cercetătorul este limitat, în prima etapă, la fotoelasticitate (tehnică cu lacuri fotosensibile) sau, metoda cu lacuri casante pentru localizarea zonelor cu deformaţii maxime. Alegerea uneia sau celeilalte din metode depinde de timpul şi echipamentul disponibil. În a doua etapă este indicată utilizarea traductoarelor rezistive pentru a obţine informaţii privind mărimea deformaţiilor, respectiv a tensiunilor maxime în zonele analizate. Metoda permite efectuarea măsurărilor de la distanţă, folosind vagonul laborator incorporat în acelaşi tren cu vagonul ce face obiectul cercetării. Dacă s-ar folosi numai tensometria electrică rezistivă, în loc de traductoare simple ar fi necesar să se utilizeze rozete tensometrice într-un număr mult mai mare. Preţul de cost al analizei ar fi sensibil mai ridicat. Încercarea pe modele nu este indicată deoarece :

— confecţionarea modelului ridică probleme dificile ;

— încercarea modelului în condiţiile de exploatare ale vagonului practic, nu poate fi realizată.

b) *Studiul stării de tensiune din elementele unui filtru de limpezire.* Pentru proiectarea raţională a filtrelor de limpezire utilizate în circuitul de alimentare cu apă din termocentrale, se impune cunoaşterea cît mai exactă a stării de tensiune din elementele acestor structuri. Filtrul se execută ca o construcţie metalică complet sudată, avînd forma unui recipient cilindric închis la capete prin două capete sferice, prevăzut la interior cu o placă circulară perforată fixată pe contur pe pereţii virolei. În zona cilindrică şi în capacul superior, există o serie de găuri şi racorduri de legătură. Filtrul se montează în poziţie verticală sprijinindu-se prin intermediul capacului inferior fie pe trei coloane, fie pe un şorţ de rezemare. În timpul funcţionării învelişul filtrului este supus la presiune interioară în condiţii normale de temperatură, iar placa interioară perforată, la presiune şi sarcini concentrate.

Aşa cum rezultă din anexa A, pentru determinarea stării de tensiune din elementele care alcătuiesc învelişul filtrului şi dispozitivul de rezemare, poate fi utilizată tehnica lacurilor casante combinată cu tensometria electrică rezistivă, fotoelasticitatea şi metoda moiré. Pentru analiza stării de tensiune din placă este indicat să se utilizeze tensometria electrică rezistivă, fotoelasticitatea şi tehnicile interferometrice (moiré sau holografia). Cercetările experimentale pot fi întreprinse fie direct pe structura reală,

fie pe modele, executate la scară. Prin utilizarea tehnicii lacurilor casante pot fi puse în evidență zonele puternic solicitate, stabilindu-se aproximativ nivelul tensiunilor principale, dar mai ales, direcțiile acestor tensiuni. Pe aceste direcții se aplică apoi traductoare tensometrice rezistive sau mărci moiré, cu ajutorul cărora se determină cu precizie, starea de tensiune în zonele respective. În afară de aceste tehnici mai poate fi folosită și fotoelasticitatea prin reflexie, aplicînd pe zonele mai solicitate acoperiri fotoelastice pe suport reflectorizant.

Avînd în vedere dimensiunile mari pe care le au filtrele de limpezire, utilizarea acestor tehnici direct pe structura reală este costisitoare iar operațiile de pregătire ridică foarte multe dificultăți practice.

De aceea este preferabil ca analiza în acest caz să se facă pe modele executate la scară, utilizînd tehnicile amintite mai sus. De multe ori însă, datele experimentale furnizate de aceste tehnici sînt insuficiente pentru ca pe baza lor să se poată face un studiu de optimizare în vederea trecerii la o proiectare rațională a acestor elemente. În asemenea cazuri este recomandabil să se utilizeze fotoelasticitatea pe modele spațiale. Modelul recipientului la scară se confecționează dintr-un material fotoelastic, iar tensiunile produse de încărcare se fixează în elementele modelului folosind tehnica înghețării.

Prin secționarea modelului în felii și subfelii, după diferite plane, se poate determina, cu precizie, starea de tensiune în toate zonele modelului, mai ales în acele cu concentratori (găuri, racorduri, îmbinări, puncte de sprijin, etc.).

Starea de tensiune din placa perforată poate fi, de asemenea comod determinată efectuînd studii pe modele. În cazul că se cere cunoașterea stării de tensiune pe toată suprafața plăcii este indicat să se folosească fotoelasticitatea sau tehnicile interferometrice. Tehnica fotoelasticității în acest caz este mai puțin indicată deoarece necesită mult timp și o serie de pregătiri pentru fixarea tensiunilor, secționarea modelului și chiar pentru prelucrarea datelor. În comparație cu această tehnică, metodele interferometrice de analiză se dovedesc mai practice și mai rapide. Analiza prin interferometrie holografică impune modele cu dimensiuni mici și un echipament experimental mai prețios. De aceea metoda moiré prin reflexie se dovedește cea mai potrivită în acest caz, utilizînd un echipament experimental simplu și puțin pretențios, capabil să furnizeze un număr mare de date, cu precizie suficientă, realizîndu-se totodată și o mare economie de timp.

c) *Determinarea stării de tensiune din bandajul și discul unei roți de vagon produsă de montarea la cald a bandajului pe disc.* Deoarece bandajul,

datorită serajului, se montează pe disc încălzit la o temperatură de peste 300°C, pot fi utilizate pentru determinarea pe cale experimentală a stării de tensiune :

— tensometria electrică rezistivă, sau

— metodele interferometrice (moiré sau holografică).

Din cauza formei complicate pe care o are conturul secțiunii bandajului și a discului, nu este indicată utilizarea metodelor interferometrice deoarece se întîmpină dificultăți deosebite la interpretarea franjelor. În schimb pot fi utilizate, cu bune rezultate traductoarele rezistive. Deoarece direcțiile tensiunilor principale sînt cunoscute (după direcția razei și a tangentei) pot fi utilizate traductoare simple plasate după aceste direcții, utilizînd bineînțeles, adezivi și materiale de protecție corespunzătoare temperaturii la care este încălzit bandajul.

d) *Determinarea stării de deformație și de tensiune într-o placă plană perforată.* Un alt exemplu care ilustrează modul de alegere a metodei tensometrice adecvate îl poate constitui studiul deplasărilor și tensiunilor în plăcile plane perforate efectuate în lucrarea [1].

Inițial problema a fost rezolvată prin metoda elementelor finite care permite determinarea deplasărilor și tensiunilor în orice punct al plăcii, ceea ce era dificil de efectuat prin metodele teoretice uzuale.

Studiul experimental privind determinarea deplasărilor plăcii s-a făcut atît prin metoda *interferometriei holografice* cît și prin *metoda moiré prin reflexie*. Sensibilitatea foarte mare a interferometriei holografice (posibilitatea de a măsura deplasări de ordinul micronilor), obținerea cîmpului deplasărilor pe întreaga suprafață a plăcii și deci a deplasării în orice punct al acesteia precum și faptul că contactul cu placa de studiat nu este necesar, reprezintă avantaje hotărîtoare față de celelalte metode tensometrice. Metoda moiré prin reflexie oferă, de asemenea, posibilitatea determinării deplasării în orice punct al plăcii dar sensibilitatea mai redusă a metodei, comparativ cu interferometria holografică, și necesitatea efectuării unor integrări grafice sau numerice, îi limitează aplicabilitatea la determinarea deplasărilor relativ mari ale plăcilor. În schimb această metodă necesită o instalație mult mai simplu de realizat și permite — derivînd grafic sau numeric curbele de variație a pantelor obținute în lungul a două direcții care trec prin punctul considerat și sînt paralele cu axele OX și OY — determinarea tensiunii în punctul respectiv.

Fotoelasticitatea clasică nu ar fi putut fi utilizată în acest studiu pentrucă efectul optic produs în zona de întindere a plăcii asupra razei de

lumină polarizată ce trece prin placă este anulat de efectul de sens contrar din zona de compresiune a plăcii. Depunînd un strat de material fotoelastic pe suprafaţa reflectantă a plăcii se poate studia starea de tensiune din placă dar procedeul necesită o aparatură specială şi nu permite şi studiul deplasărilor.

Tensometria electrică rezistivă, cu toate că are o mare sensibilitate, nu a fost utilizată de autor pentrucă permite obţinerea deformaţiilor specifice şi a tensiunilor numai în punctele unde au fost aplicate rozete tensometrice, deci nu dă o imagine a întregului cîmp al deformaţiilor şi tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL VOLUMULUI I

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

I